АСТРОФИЗИКА

ТОМ 39 МАЙ, 1996 ВЫПУСК 2

УДК: 52-423

СТРУННАЯ КОСМОЛОГИЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ

А.А.СААРЯН

Поступила 6 февраля 1996
Принята к печати 8 марта 1996

Исследованы многомерные анизотропные космологические модели с Риччи-плоскими подпространствами в рамках н изкоэнергетической теории струн. На основе качественной теории динамических систем выявлены основные свойства этих моделей, в частности, их поведение в ранние и поздние стадии эволюции. Найдены условия динамической компактификации дополнительных измерений. В качестве иллюстрации рассмотрена конкретная модель с полем Калба-Рамона в роли источника.

1. *Введение*. Теоремы Хокинга-Пенроуза [1] указывают на наличие сингулярностей в широком классе решений общей теории относительности (ОТО) при достаточно общих предположениях о тензоре энергии-импульса негравитационной материи. Хорошо известными примерами являются черные дыры и начальная сингулярность в теории Большого Взрыва. В окрестности этих сингулярностей необходима новая физическая теория, по всей вероятности, квантовая по своей природе. В настоящее время единственным самосогласованным кандидатом квантовой гравитации является теория струн [2, 3]. Элементарными составляющими материи в этой теории являются струны - одномерно протяженные объекты с характерными масштабами длины и энергии возбуждения порядка планковских. В связи с тем, что возможности современной ускорительной техники намного далеки от этих масштабов, важное значение приобретает исследование тех областей гравитационных явлений, в которых характерные величины имеют порядок планковских изначально. Это прежде всего относится к ранним стадиям эволюции вселенной. Исследование струнных эффектов в окрестности Большого Взрыва и их возможных проявлений в настоящую эпоху важно, как с точки зрения наблюдательной проверки теории струн, так и для разрешения ряда

проблем современной космологии. Сформировалось новое направление исследований - струнная космология.

Теория струн отличается от ОТО уже на классическом уровне. В качестве бозонного гравитационного сектора здесь, помимо метрики, фигурируют также скалярное поле дилатона и антисимметричное поле Калба-Рамона (называемое также H-полем), являющиеся безмассовыми возбуждениями струны. При исследовании космологических моделей обычно исходят из низкоэнергетического струнного действия в ведущем порядке по натяжению струны. Простейшее решение такого типа с плоской метрикой и нулевым H-полем, соответствующее некритическим струнам, впервые рассматривалось в [4] и использовано для построения космологических моделей в работах [5-8]. В дальнейшем оно было обобщено на фридмановские модели с плоскими подпространствами [9, 10]. Роль антисимметричного поля Калба-Рамона в струнной космологии исследовалась в работах [11-18]. В [19-22] рассматриваются свойства моделей с газом невзаимодействующих струн в качестве источника. Многомерным решениям в низкоэнергетической теории струн посвящены [14, 21-25] (см. также [26]). В некоторых работах (см., например, [27]) учитываются также квадратичные по кривизне члены в струнном эффективном действии. Более фундаментальным является подход, основанный на двумерной σ-модели (см. [28, 29] и приведенные там ссылки).

В данной работе многомерные анизотропные космологические модели низкоэнергетической теории струн исследованы методами качественной теории динамических систем. В разделе 2 эффективное струнное действие записано в общем конформном представлении, где оно эквивалентно обобщенной скалярно-тензорной теории с зависящим от гравитационного скаляра негравитационным лагранжианом. Обсуждаются частные случаи эйнштейновского и йордановского представлений. Соответствующие космологические уравнения рассмотрены в разделе 3. Далее обсуждаются вакуумные решения (решения с полем дилатона и метрикой) (раздел 4), являющиеся асимптотами общего решения в ранние/поздние стадии эволюции Вселенной. В общем случае качественный анализ соответствующей динамической системы проведен в разделе 5. Характерная фазовая картина изображена на рис.1. В разделе 6 исследованы модели с динамической компактификацией дополнительных измерений. Выявлены условия реализации этих моделей. В качестве иллюстрации общих закономерностей рассмотрен случай поля Калба-Рамона в роли источника в десятимерном пространстве-времени с двумя подпространствами. Установлена важность многопетлевых поправок струнных диаграмм в ранние стадии эволюции.

2. *Низкоэнергетическое эффективное действие.* Эффективное действие низкоэнергетической теории струн можно получить разными методами: из условия вейлевской инвариантности соответствующей двумерной σ-модели [30, 31]; на основе подхода интегралов по траекториям [32, 33]; из выражений соответствующих струнных амплитуд [34]. В древесном приближении и в ведущем порядке по натяжению струны оно имеет вид

$$S=\int d^Dx\sqrt{-\tilde{G}}\,e^{-2\varphi}\left[-\frac{1}{16\pi G_D}(\tilde{R}+4\tilde{\partial}^M\varphi\partial_M\varphi-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{12}H_{MNP}\tilde{H}^{MNP})+\tilde{L}_M(G_{MN},\Psi)\right], \tag{1}$$

где D - размерность пространственно-временного многообразия, на фоне которого распространяется струна, G_D - D-мерная гравитационная постоянная, $\tilde{R}$ - скаляр Риччи метрики $\tilde{G}_{MN}$, φ-поле дилатона, $H_{MNP}=3\partial_{[P}B_{MN]}$ - напряженность антисимметричного поля Калба-Рамона B_{MN}, $\tilde{L}_m$ - лагранжиан, обусловленный вкладом других полей ψ. Здесь и ниже символом ~ над буквой обозначаются величины в струнном конформном представлении (σ - представление).

Ниже мы рассмотрим общее конформное представление, связанное со струнным представлением преобразованием D - мерной метрики

$$G^{MN}=e^{c\varphi}\tilde{G}^{MN} \tag{2}$$

с произвольной постоянной c. При

$$b=Dc/2-c-2\neq 0 \tag{3}$$

действие (1) можно представить в виде [35]

$$S=\int d^Dx\sqrt{-G}\left[\frac{1}{16\pi G_D}\left(-\Phi R+\omega\partial^M\Phi\partial_M\Phi/\Phi\right)+L\right]; \tag{4}$$

$$L = \Phi^{1-2c/b} H_{MNP} H^{MNP} / 192\pi G_D + L_m(\Phi, G_{MN}, \psi),$$
$$L_m = \Phi^{1+c/b} \tilde{L}_m\left(\Phi^{c/b} G_{MN}, \psi\right) \tag{5}$$

с новым скалярным полем

$$\Phi = e^{b\varphi} \tag{6}$$

и параметром

$$\omega = -1 - (1 - 4/b^2) / (D - 2) \,. \tag{7}$$

При c=4/(D-2) (b=0) реализуется эйнштейновское представление:

$$S = \int d^D x \sqrt{-G} \left\{ \frac{1}{16\pi G_D} \left[-R + (D-2) \partial^M \Phi \partial_M \Phi / 4\Phi^2 \right] + L \right\}, \tag{8}$$

где теперь

$$\Phi = \exp\left(\frac{4\varphi}{D-2}\right), \; L = \Phi^{-2} H_{MNP} H^{MNP} / 192\pi G_D + L_m,$$
$$L_m = \Phi \tilde{L}_m\left(\Phi G_{MN}, \psi\right). \tag{9}$$

Основным моментом, отличающим (4) от обычных скалярно тензорных теорий, является зависимость лагранжиана L от гравитационного скаляра Φ. В частности, это приводит к тому, что ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса

$$T_{MN} = \frac{2}{\sqrt{-G}} \frac{\delta\left(\sqrt{-G}\, L\right)}{\delta G^{MN}} \tag{10}$$

не равна нулю:

$$D_M T_N^M = -\frac{\partial_N \Phi}{\sqrt{-G}} \frac{\delta\left(\sqrt{-G}\, L\right)}{\delta \Phi} \,. \tag{11}$$

В общем случае зависимость L=L(Φ)не устраняется выбором конформного параметра c, т.е. для действия (4) представление Йордана, вообще говоря, не существует. Однако для конкретных лагранжианов такое представление может оказаться реализуемым. Примером является лагранжиан с конформным весом β, для которого

$$L = \Phi^{1+(1+\beta)c/b} \, L\left(G_{MN}, \psi\right) \,. \tag{12}$$

Выбор конформного представления согласно

$$c = 4/\left(D + 2\beta\right) \tag{13}$$

исключает поле дилатона из негравитационной части лагранжиана. Заметим, что при $\beta=-1$ представления Йордана и Эйнштейна совпадают. Для электромагнитного поля и H -поля $\beta=-2$ и $\beta=-3$, соответственно.

3. *Космологические уравнения.* Рассмотрим D-мерную космологическую модель со структурой $R \otimes M^1 \otimes \ldots \otimes M^n$, где R - соответствует временной координате, M^i, $i=1, \ldots, n$ - максимально симметричное пространство размерности n_i, $\sum n_i = D-1$. Метрика может быть представлена в виде

$$G_{MN} = \mathrm{diag}\left(1,\ldots,-R_i^2(t)\, g^{i}_{m_i n_i},\ldots\right), \tag{14}$$

где R_i - масштабный фактор подпространства M^i с метрикой $g^{(i)}_{l_i m_i}$, индексы l_i, m_i принимают значения, соответствующие этому подпространству. Тензор Риччи подпространства M^i равен $R^{(i)}_{l_i m_i} = k_i\left(n_i-1\right) g^{(i)}_{l_i m_i}$, $k_i = 0,\pm 1$. Заметим, что космологическое время t и масштабные факторы R_i зависят от конформного представления и связаны с соответствующими величинами в струнном представлении соотношениями

$$dt = e^{-c\varphi/2}\, d\tilde{t},\; R_i = e^{-c\varphi/2}\, \tilde{R}_i \;. \tag{15}$$

Из уравнений поля следует, что для метрики (14) соответствующий тензор энергии-импульса (10) диагонален и может быть представлен в виде

$$T_M^N = \mathrm{diag}\left(\varepsilon,\ldots,-\delta^{l_i}_{m_i}\, p_i,\ldots\right). \tag{16}$$

Введя обозначение

$$\alpha = \frac{\Phi}{\varepsilon\sqrt{-G}}\,\frac{\delta\left(\sqrt{-G}\,L\right)}{\delta\Phi} \tag{17}$$

мы приходим к следующим, основанным на действии (4), космологическим уравнениям

$$\dot{y}_i + y_i \sum_{l=1}^{n+1} y_l + k_i n_i\left(n_i-1\right)/R_i^2 = b_i f \tag{18}$$

$$f = 16\pi G_D\, \varepsilon/\Phi = \sum_{i,l=1}^{n+1} a_{il}\, y_i y_l + \sum_{i=1}^{n+1} k_i n_i\left(n_i-1\right)/R_i^2 . \tag{19}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$y_i = n_i \dot{R}_i / R_i, \quad i = 1,\ldots,n+1; \quad R_{n+1} = \Phi, \quad k_{n+1} = 0\ ; \tag{20а}$$

$$a_{il} = 1 - \delta_{il} / n_l, \quad i = 1,\ldots,n; \quad l = 1,\ldots, n+1; \quad a_{n+1,n+1} = -\omega\ ; \tag{20б}$$

$$b_i = \left\{a_i + b^2\left[(\omega+1)\bar{a} - \alpha\right]/4\right\} n_i/2, \quad i = 1,\ldots, n\ ; \tag{20в}$$

$$b_{n+1} = \left[\bar{a} + \alpha(D-2)\right] b^2/8, \quad \bar{a} = 1 - \sum_{l=1}^{n} n_l a_l, \quad a_l = p_l/\varepsilon\ . \tag{20г}$$

Можно показать, что к системе (18), (19) сводятся также космологические уравнения в эйнштейновском представлении, где теперь

$$b_i = \left[a_i + \bar{a}(D-2)\right] n_i/2, \quad b_{n+1} = 2\alpha/(D-2)\ , \tag{21}$$

определение коэффициентов a_{il} отличается от (20б) тем, что в эйнштейновском представлении $a_{i,n+1}=0$, $i=1,\ldots, n$, а суммирование по l в уравнении (18) проводится до значения $l=n$ включительно. Заметим, что для лагранжианов с конформным весом β величина α из (17) определяется выражением [35]

$$\alpha = -\bar{a}\left[1 + (1+\beta)\, c/b\right]/(2\beta + D)\ . \tag{22}$$

Уравнение непрерывности запишется в виде

$$\dot{\varepsilon}/\varepsilon + \sum_{l=1}^{n}\left(1 + a_l\right) y_l + \alpha\, y_{n+1} = 0\ . \tag{23}$$

Пусть масштабный фактор R_i сначала возрастает, достигает максимального значения и далее монотонно убывает. В точке максимума $\dot{R}_i = 0$, $\ddot{R}_i < 0$ и из уравнения (18) имеем

$$\ddot{R}_i / \dot{R}_i + k_i\left(n_i - 1\right)/R_i^2 = 16\pi G_D b_i\, \varepsilon/\Phi\ .$$

Отсюда следует, что при $k_i \le 0$ и для решений с положительной плотностью энергии: $b_i < 0$, т.е. для подпространств с динамической компактификацией значения коэффициентов (20 в) или (21) отрицательны. Отметим, что в приведенных выше выражениях величины a_l и α, вообще говоря, могут быть функциями от времени.

4. ***Вакуумные решения.*** В случае Риччи-плоских подпространств $M^i(k_i=0)$ система космологических уравнений (18), (19) примет вид

$$\dot{y}_i + y_i \sum_l y_l = b_i f, \quad i = 1,\ldots,n+1,$$

$$16\pi G_D\, \varepsilon / \Phi = f(y_l) = \sum_{i,l} a_{il} y_i y_l\ . \tag{24}$$

Здесь и ниже, если у знаков сумм не выписаны пределы, то подразумевается суммирование по всем значением $1,2,...,n+1$. Пусть сначала все коэффициенты b_i равны нулю. Нужно различать два случая: (i) когда

$$\sum_i y_i = 0 \tag{25}$$

и (ii) эта сумма отлична от нуля. В первом случае зависимость масштабных факторов и скалярного поля от времени имеет вид

$$R_i = R_{i0} e^{H_i t}, \quad i = 1,\dots,n+1; \quad \sum_i n_i H_i = 0, \tag{26}$$

где R_{i0}, H_i - постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями, причем соотношение между H_i является следствием (25). Из этого равенства следует, что $V\Phi$=const, где $V = \prod_{i=1}^{n} R_i^{n_i}$ - объем многомерного пространства. Плотность энергии определяется из второго уравнения (24) и равна

$$16\pi G_D \varepsilon = \Phi \sum_{i,l} a_{il} n_i n_e H_i H_l = \mathrm{const} \cdot e^{H_{n+1} t}. \tag{27}$$

В частности, отсюда следует, что полная энергия негравитационной материи в сопутствующем объеме V постоянна: $V\varepsilon \sim V\Phi$=const. Это непосредственно следует также из уравнения (23) с учетом того, что при b_i=0, i=1,...n+1 и $b\neq0$, как это следует из (20б) и (20г),

$$a_i = 1, \quad \alpha = 1. \tag{28}$$

В эйнштейновском представлении в (25) суммировние проводится до значения $l=n$ и по этому получаем V=const. Отсюда следует, что если некоторые размеренности расширяются, то другие должны сжиматься.

Примером физической системы, удовлетворяющей условиям (28), является свободное безмассовое скалярное поле ψ с лагранжианом

$$L_m = G^{MN} \partial_M \psi \partial_N \psi, \tag{29}$$

для которого β=-1 и с учетом (22) α=1, в согласии с (28).

Обратимся теперь к случаю (ii). Интегрирование суммы уравнений (24) теперь приводит к следующему результату:

$$\sum_i y_i = 1/(t - t_0), \qquad V\Phi = \mathrm{const} \cdot |t - t_0| \tag{30}$$

с постоянной интегрирования t_0, определяющей начало отсчета времени. Подставляя (30) в уравнение (24) с b_i=0 получим

$$y_i = y_{i0}/(t - t_0), \; R_i = R_{i0}|t - t_0|^{y_{i0}/n_i}, \; i = 1,\dots,n+1; \sum_i y_{i0} = 1. \tag{31}$$

Последнее соотношение между постоянными интегрирования y_{i0} является следствием первого равенства (30). Плотность энергии теперь равна

$$6\pi G_D \varepsilon = \sum_{i,l} a_{il} y_{i0} y_{l0} \Phi / (t-t_0)^2, \tag{32}$$

а полная энергия в сопутствующем объеме V : $\varepsilon V \sim 1/|t-t_0|$.

Решение (31) содержит $2(n+1)$ произвольных постоянных и поэтому представляет собой общее решение системы (24) при $b_i=0$, $i=1,...,n+1$. Заметим, что эти же функции являются общими вакуумными ($\varepsilon=0$) решениями системы (24) независимо от значений b_i. В этом случае на постоянные y_{i0} наложено еще одно дополнительное условие (условие $\varepsilon=0$, см. второе уравнение (24) или (32))

$$\sum_{i,l} a_{il} \dot{y}_{i0} y_{l0} = 0$$

(в случае решения (26) аналогичное ограничение на H_i получается из (27)). С учетом соотношений (20б) отсюда находим следующую связь между постоянными интегрирования

$$\sum_{i=1}^{n} y^2{}_{i0} / n_i + (\omega+1)\left(1 - \sum_{i=1}^{n} y_{i0}\right)^2 = 1. \tag{33}$$

В струнном представлении ($\omega=-1$) мы приходим к решению, ранее найденному в [9,10].

5. *Общий анализ*. Рассмотрим теперь систему космологических уравнений (24) в предположении, что величины a_i, α постоянны и хотя бы один из коэффициентов b_i отличен от нуля. Прежде всего заметим, что эта система допускает первый интеграл:

$$V \Phi (b_i y_k - b_k y_i) = \mathrm{const} \tag{34}$$

для заданных i и k из набора $\{1, ..., n+1\}$. Отсюда, в частности, следует, что существует класс решений

$$y_k = b_k y_i / b_i, \quad k=1,...,n+1, \tag{35}$$

определяемый уравнением

$$\dot{y}_i = s^{(0)} y^2{}_i / b_i, \quad s^{(0)} = f_0 - \sum_i b_i, \quad f_0 = \sum_{i,k} a_{ik} b_i b_k \tag{36}$$

и с плотностью энергии

$$16\pi G_D \varepsilon / \Phi = y_i^2 f_0 / b_i^2. \tag{37}$$

Здесь нужно различать два случая. При $s^{(0)}=0$ решение имеет вид

$$R_l = R_{l0} e^{b_l H_0 t / n_l}, \quad l = 1, \ldots, n+1, \tag{38}$$

где R_{l0} и H_0 произвольные постоянные интегрирования, число которых равно $n+2$. Так как общее решение системы уравнений (24) должно содержать $2(n+1)$ произвольных постоянных, то решение (38) является лишь частным решением системы (24).

При $s^{(0)}\neq 0$ решение уравнений (36) имеет вид

$$y_l = 1 / \left(c_0 - s^{(0)}\, t / b_l\right), R_l = R_{l0} \left|t - t_0\right|^{-b_l / n_l s^{(0)}}, \quad t_0 = c_0\, b_l / s^{(0)} \tag{39}$$

являющееся частным решением (24). Заметим, что решение (38) можно получить отсюда в пределе $s^{(0)}\to 0$. Нетрудно показать, что (38) и (39) совпадают с решениями, ранее расмотренными в [24].

Вернемся снова к системе (24). Из первого интеграла (34) следует, что отношение

$$\left(b_l y_k - b_k y_l\right) / \left(b_l y_m - b_m y_l\right) = c^k_{lm}, \quad c^l_{lm} = 0, \quad c^m_{lm} = 1 \tag{40}$$

остается постоянным в ходе эволюции и поэтому все функции y_k являются линейными комбинациями двух из них, в качестве которых мы выберем y_l и y_m, предполагая, что $b_l\neq 0$:

$$y_k = c^k_{ml} y_l + c^k_{lm} y_m, \quad c^k_{ml} = \left(b_k - b_m c^k_{lm}\right) / b_l, \quad k = 1, \ldots, n+1. \tag{41}$$

(35) является частным случаем этого соотношения, соответствующим выбору $c^k_{lm}=0$, $k\neq m$. Для масштабных факторов получим

$$R_k = \mathrm{const} \cdot R_l^{\,n_l c^k_{ml} / n_k} \cdot R_m^{\,n_m c^k_{lm} / n_k} \tag{42}$$

при фиксированных l и m.

Таким образом, при исследовании многомерных космологических моделей с Риччи-плоскими подпространствами достаточно рассмотреть два уравнения системы (24), в качестве которых мы выберем уравнения с номерами l и m. Подстановка (41) в эти уравнения приводит к системе

$$\dot{y}_k + y_k\left(c_{ml} y_l + c_{lm} y_m\right) = b_k f\left(y_l, y_m\right), \quad k = l, m, \tag{43}$$

где функция f имеет вид

$$f\left(y_l, y_m\right) = A^m_l y_l^2 + 2 A_{lm} y_l y_m + A^l_m y_m^2 \tag{44}$$

и введены следующие обозначения

$$A^i_m = \sum_{k,p} c^k_{im}\, c^p_{im} a_{kp}, \quad A_{lm} = \sum_{k,p} c^k_{lm}\, c^p_{ml} a_{kp}, \quad c_{lm} = \sum_k c^k_{lm}. \tag{45}$$

В параметрическом виде общее решение системы (43) было найдено в работе [24]. Здесь мы исследуем эту систему методами качественной теории динамических систем. Это позволит наглядно представить поведение решений в различных предельных случаях в зависимости от параметров модели, а также выявить свойства устойчивости решений и условия, при которых реализуются модели динамической компактификации.

Система (43) представляет собой автономную динамическую систему второго порядка. Для выявления качественной структуры ее фазовой картины основным является нахождение особых точек, являющееся решениями алгебраических уравнений

$$y_k\left(c_{ml}y_l+c_{lm}y_m\right)=b_k f, \quad k=l,m. \tag{46}$$

Одно очевидное решение - это начало координат в фазовой плоскости (y_l, y_m). В конечной части фазовой плоскости другие особые точки существуют в следующих вырожденных случаях:

(а) При

$$c_{lm}=c_{ml}=0\left(\Rightarrow \sum_k b_k=0\right) \tag{47}$$

особыми являются все точки прямых

$$w_{ml}\equiv y_m/y_l=w^l_{ml}, \quad l=1,2, \tag{48}$$

где w^l_{ml} -возможные решения уравнения

$$f(1,w_{ml})=0, \tag{49}$$

которые можно представить в виде

$$w^{1,2}_{ml}=b_m/b_l+\left(-f_{lm}\pm\sqrt{f^2_{lm}-f_0A^l_m}\right)/b_lA^l_m. \tag{50}$$

Здесь введено следующее обозначение

$$f_{lm}=\sum_{k,p}a_{kp}c^k_{lm}b_p, \tag{51}$$

связанное с коэффициентами (45) соотношениями

$$A_{lm}=\left(f_{lm}-b_mA^l_m\right)/b_l, \quad A^m_l=\left(f_0-2b_mf_{lm}+b^2_mA^l_m\right)/b^2_l. \tag{52}$$

(б) При $s^{(0)}=0$ (см. (36)) особыми являются все точки прямой

$$w_{ml}=w^0_{ml}=b_m/b_l. \tag{53}$$

(в) И, наконец, в случае

$$f(1,-c_{ml}/c_{lm})=0 \tag{54}$$

особой является прямая

$$y_m=-c_{ml}y_l/c_{lm}. \tag{55}$$

Рассмотрим систему (43) для значений параметров, отличных от (а), (б), (в) (в связи с ограничением на объем статьи, эти особые случаи будут рассмотрены в другой работе). Единственной особой точкой в конечной части фазовой плоскости (y_l,y_m) является начало координат. Эта особая точка является вырожденной. Согласно стандартной схеме исследования таких особых точек (см., например, [36]) преобразуем систему (43) в полярные координаты (r,θ):

$$y_l=r\cos\theta, \qquad y_m=r\sin\theta \tag{56}$$

и произведем замену времени $d\tau=rdt$. Система примет вид

$$dr/d\tau=rZ(\theta), \qquad d\theta/dt=N(\theta), \tag{57}$$

где правые части определяются выражениями

$$\begin{aligned} Z(\theta)&=(b_l\cos\theta+b_m\sin\theta)\,f(\cos\theta,\sin\theta)-c_{ml}\cos\theta-c_{lm}\sin\theta,\\ N(\theta)&=(b_m\cos\theta-b_l\sin\theta)\,f(\cos\theta,\sin\theta). \end{aligned} \tag{58}$$

Отсюда непосредственно следует, что система (57) имеет частные решения

$$\begin{aligned} &\theta=\theta_i\,, \qquad i=0,1,2,\\ &b_m\cos\theta_0-b_l\sin\theta_0=0, \qquad f(\cos\theta_i,\sin\theta_i)=0, \qquad i=1,2. \end{aligned} \tag{59}$$

Функция $r=r(t)$ находится простым интегрированием первого уравнения (57). Соответствующие решения для y_l и y_m имеют вид (26) и (31) при $i=1,2$ и (38), (39) в случае $i=0$. Постоянные y_{k0} в формуле (31) можно выразить через коэффициенты c^k_{lm}. Действительно, для этих решений $y_m/y_l=w^i_{ml}$, $i=1,2$ и поэтому из (31) $y_{m0}=w^i_{ml}y_{l0}$, а из условия $\sum_k y_{k0}=1$ получим $y_{l0}=1/\sum_k w^i_{kl}$. Таким образом,

$$y_{m0}=w^i_{ml}/\sum_k w^i_{kl}. \tag{60}$$

Нетрудно показать, что при таком выборе условие (33) выполняется тождественно, вследствие того, что w^i_{ml} являются решениями уравнения (49).

Особые решения (31) и (39) можно записать общей формулой

$$R_m = R_{m0}|t-t_l|^{-w^l_{ml}b_l/n_m s^{(l)}}, \quad s^{(l)} = f_0\delta_{0l} - b_l\sum_p w^l_{pl},\ l = 0,1,2, \tag{61}$$

где при $m=i$ нужно положить $w^l_{ml}=1$.

В конечной части фазовой плоскости особыми для динамической системы (57) являются следующие точки окружности $S^1=\{r=0,\ 0\le\theta\le2\pi\}$:

$$A_p(r=0,\ \theta=\theta_p), \qquad p=0\text{-}5, \tag{62}$$

$$\theta_l=\mathrm{arctg}\, w^l_{ml}, \qquad \theta_{l+3}=\theta_l+\pi, \qquad l=0,1,2,$$

собственные числа которых определяются из соотношений

$$\lambda^{(p)}_1=Z(\theta_p), \qquad \lambda^{(p)}_2=N'(\theta_p),$$

и, согласно (58), равны

$$\lambda^{(l)}_1 = s^{(l)}/b_l\sqrt{1+\left(w^l_{ml}\right)^2},\ \lambda^{(l)}_2 = -b_lA^l_m/\sigma^l_{ml}\sqrt{1+\left(w^l_{ml}\right)^2},\ l = 0,1,2,$$
$$\lambda^{(l+3)}_\alpha = \lambda^{(l)}_\alpha, \quad \alpha = 1,2; \quad l = 0,1,2. \tag{63}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\sigma^l_{ml}=1/(w^l_{ml}-w^p_{ml})(w^l_{ml}-w^q_{ml}), \tag{64}$$

где верхние индексы (l,p,q) являются различными перестановками набора (0, 1, 2). Заметим, что при $l=0$ второе соотношение (63) можно представить в виде

$$\lambda^{(0)}_2 = -f_0/b_l\sqrt{1+b^2_m/b^2_l}, \tag{65}$$

причем, как это следует из (37), знак f_0 совпадает со знаком плотности энергии для частного решения $\theta=\theta_0$ (решение (39)). Поскольку все собственные числа действительны, то особые точки являются или узлами или седловыми точками в зависимости от знаков этих чисел. Для системы (57) собственные векторы $\vec{n}_\alpha$, соответствующие собственным числам λ_α, в полярных координатах имеют компоненты

$$\vec{n}_1 = (1,0), \quad \vec{n}_2 = (0,1), \tag{66}$$

т.е. совпадают с ортами координатной системы (r,θ). В окрестности узлов все траектории, кроме исключительных, касаются собственного вектора $\vec{n}_1$, при $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ и $\vec{n}_2$ при $|\lambda_2|<|\lambda_1|$.

Для исследования поведения траекторий на бесконечности восползуемся координатами (ρ,θ), $\rho=1/r$. При таком отображении бесконечно удаленные точки переходят в точки окружности $\overline{S}^1 = \{\rho = 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Система (57) примет вид

$$d\rho/d\tau=-\rho Z(\theta), \qquad d\theta/d\tau=N(\theta) \tag{67}$$

с особыми точками

$$B_l(\rho=0,\ \theta=\theta_l), \quad l=0\text{-}5 \tag{68}$$

и собственными числами

$$\overline{\lambda}_1^{(l)} = -Z(\theta_l), \quad \lambda_2^{(l)} = N'(\theta_l), \tag{69}$$

отличающимися от собственных чисел точек A_l знаком перед $\lambda^{(l)}{}_1$. Как и выше, собственные векторы точек B_l совпадают с осями полярной системы координат. Таким образом, динамическая система (43) имеет двенадцать особых точек A_l, B_l, $l=0$-5 с действительными собственными числами $\lambda^{(l)}{}_\alpha$, $\overline{\lambda}_\alpha^{(l)}$, соответственно, определяемые (63) и соотношениями

$$\overline{\lambda}_1^{(l)} = -\lambda_1^{(l)}, \quad \overline{\lambda}_2^{(l)} = \lambda_2^{(l)}. \tag{70}$$

Характерная картина фазовых траекторий изображена на рис. 1, где предварительно проведено отображение фазовой плоскости (y_l, y_m) на кольцеобразную область между окружностями S^1 и $\overline{S}^1$. Прямые A_lB_l соответствуют особым решениям $y_m= w^l_{ml}\, y_l$ (решения (61)), причем точкам B_l соответствует конечное значение космической времени t, в то время как для точек A_l: $t=\pm\infty$. Индексы $(p,\ q,\ r)$ у особых точек являются различными перестановками набора (0, 1, 2) в зависимости от относительного расположения величин w^l_{ml}. На рисунке $w^p_{ml} > w^q_{ml} > w^r_{ml}$ и изображен случай $\lambda^{(l)}{}_1<0$, $l=0,1,2$, $\lambda^{(l)}{}_2<0$. Предположено, что $\left|\lambda_1^{(l)}\right| < \left|\lambda_2^{(l)}\right|$, когда в окрестности узлов все траектории, кроме исключительных, касаются собственного вектора $\vec{n}_1$. Плотность энергии определяется выражением

$$16\pi G_D\, \varepsilon / \Phi = A^l_m\left(w_{ml} - w^1_{ml}\right)\left(w_{ml} - w^2_{ml}\right), \tag{71}$$

и, поэтому, при $A^l_m>0$ положительной энергией обладают траектории в областях $A_1B_1B_5A_5$ и $A_2B_2B_4A_4$ (в предположении, что $w^1_{ml} > w^2_{ml}$), а при $A^l_m<0$ - траектории в областях $A_1B_1B_2A_2$ и $A_4B_4B_5A_5$. Решения из области $A_pB_pB_qA_q$ являются моделями расширения для обоих подпространств M^l и M^m. Они начинают свою эволюции в некоторый конечный момент

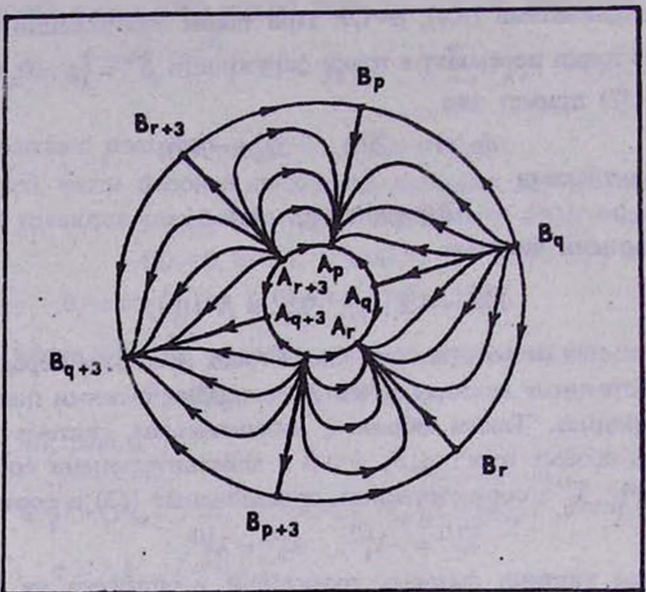

Рис. 1. Фазовые траектории динамической системы (43). Фазовая плоскость (y_l, y_m) (горизонтальная ось - y_l) отображена на кольцеобразную область между окружностями A_0 ... A_5 (образ S^1) и B_0 ...B_5 (образ S^1). Отрезки A_iB_i соответствуют особым решениям (61). Изображен случай $\lambda^{(i)}_1<0$, i=0,1,2, $\lambda^{(i)}_2<0$ и $|\lambda_1^{(i)}|<|\lambda_2^{(i)}|$.

времени в точке B_q (неустойчивый узел) и при $t\to+\infty$ входят в устойчивый узел A_p, касаясь особого решения B_pA_p, которое в данном случае является аттрактором для общего решения в поздние этапы расширения. Для решений из области $B_qA_qA_rB_r$ оба подпространства M^l и M^m вначале расширяются, начиная свою эволюцию в точке B_q. В дальнейшем M^l продолжает расширяться, в то время как для подпространства M^m в некоторый момент времени (точка пересечения траектории с осью y_l) расширение сменяется на сжатие. Модели заканчивают свою эволюцию в точке A_r в состоянии расширения для M^l (y_l>0) и сжатия для M^m (y_m<0), асимптотически приближаясь к особому решению B_rA_r. Решения из области $A_pB_pB_{r+3}A_{r+3}$ начинают свою эволюцию при $t=-\infty$ в точке A_{r+3}, когда подпространство M^l сжимается, а M^m расширяется. В дальнейшем, в точке пересечений траекторий с осью y_m сжатие M^l сменяется на расширение и модели заканчивают свою эволюцию в точке A_p при $t=+\infty$ в состоянии расширения для обоих подпространств. Модели этого класса являются несингулярными. Другие области фазовой плоскости можно рассматривать аналогично. Соответствующие траектории отличаются от рассмотренных выше изменением направления стрелок, что является следствием инвариантности системы (43) относительно преобразования

$$(y_p,y_m,t)\to(-y_p,-y_m,-t). \tag{72}$$

Другие возможные варианты знаков собственных чисел и их относительной величины можно исследовать аналогичным образом. Из (63) видно, что при значениях параметров космологической модели, для которых $s^{(i)}=0$, происходит смена качественной структуры фазовой картины динамической системы, т.е. эти значения являются точками бифуркации в пространстве параметров модели.

6. *Модели с динамической компактификацией дополнительных измерений.* В настоящее время наблюдаемое пространство-время является четырехмерным вплоть до расстояний 10^{-16}см. Отсюда следует, что если дополнительные измерения существуют, то их размеры должны быть малы по сравнению с этим масштабом. Более того, эти измерения в настоящую эпоху должны быть почти статическими, так как какие-либо изменения размеров дополнительных измерений приводят к вариациям физических констант (гравитационной постоянной, постоянной тонкой структуры и т.д.). Одним из главных проблем многомерных теорий является объяснение громадного различия размеров внутренних и внешних ($>10^{28}$см) измерений, называемое проблемой компактификации. На этом пути наиболее привлекательными являются модели динамической компактификации дополнительных измерений [37-39], где это различие достигается в ходе космологической эволюции. Здесь после начальной стадии изотропного расширения многомерного пространства внутренние измерения сжимаются до размеров, ненаблюдаемых в настоящее время. Это сжатие останавливается или замедляется вследствие некоторых эффектов (возможно квантовых) в поздних стадиях эволюции, так как быстрые изменения противоречат данным о вариациях физических констант.

В этом разделе мы рассмотрим условия, при которых в низкоэнергетической эффективной теории струн реализуются космологические модели с динамической компактификацией дополнительных измерений. Наш анализ будет основан на результатах предыдущего раздела. Пусть сначала оба подпространства M^p и M^m являются внутренними. В начальной стадии все подпространства расширяются, поэтому соответствующие траектории должны начинаться в первом квадранте фазовой плоскости(y_l, y_m). В дальнейшем в некоторый момент времени (разный для подпространств M^l и M^m) расширение прекращается и сменяется на сжатие. В конечной стадии эволюции внутренние подпространства в состоянии сжатия, поэтому соответствующие траектории должны заканчиваться в третьем квадранте плоскости (y_l, y_m). Из сказанного следует, что если особые решения расположены в порядке $w^l_{ml} < w^q_{ml} < w^p_{ml}$, то полуоси $y_l>0$, $y_m<0$ $(y_l<0, y_m>0)$ должны находиться в области $A_l B_l B_{p+3} A_{p+3}$ $(A_p B_p B_{r+3} A_{r+3})$, причем в M^m компактификация начинается раньше (позднее), чем в M^l. Иначе можно сказать, что если M^l и M^m внутренние подпространства, то все три особые решения $A_l B_l$ должны находиться в первом и третьем квадрантах, т.е.

$$w^l_{ml} > 0, \quad l=0,1,2. \tag{73}$$

В частности, отсюда следует, что $b_m/b_l>0$. Следующим условием является требование неотрицательной плотности энергии для соответствующих моделей, что эквивалентно условию

$$A^l_m y^2_m + 2A_{lm} y_l y_m + A^m_l y^2_l \geq 0. \tag{74}$$

В частности, это условие должно выполняться при $y_l=0$ и $y_m=0$, откуда получаем

$$A^l_m>0, \quad A^m_l>0. \tag{75}$$

Отсюда, совместно с (73), следует, что $A_{lm}<0$. Далее, так как сжатие происходит после начального расширения, то траектории должны пересекать оси y_l и y_m в направлениях от положительных значений y_k, $k=l,m$ к отрицательным. В частности, отсюда следует, что

$$\lambda^{(p)}_2 > 0, \lambda^{(r)}_2 > 0. \tag{76}$$

Так как одно из этих условий является следствием другого, рассмотрим, например, первое. Учитывая (63), а также, что $\sigma^p_{ml}>0$ отсюда получаем $b_l<0$, и поэтому $b_m<0$. Таким образом, если в некотором подпространстве реализуется динамическая компактификация, то соответствующее значение коэффициента b_l отрицательно. Этот результат уже нами был получен на основе непосредственного анализа космологических уравнений.

Пусть теперь M^k внешнее подпространство, которое в ходе эволюции постоянно расширяется. Фазовые траектории, описывающие динамическую компактификацию подпространства M^l, должны начинаться в первом квадранте фазовой плоскости (y_l, y_k), пересекать положительную ось y_k и заканчиваться во втором квадранте. Таким образом, эти траектории лежат в области $A_p B_p B_{r+3} A_{r+3}$, причем

$$w^p_{ml} > 0, \quad w^r_{kl} < 0. \tag{77}$$

Из условия положительности плотности энергии при y_l=0 получаем A'_k>0. Таким образом, если M^l внутреннее подпространство, то A'_m>0 независимо от характера подпространства M^m. С учетом определения (50) отсюда получаем следующие варианты относительного расположения особых решений (предполагается, что $w^1_{kl} > w^2_{kl}$)

$w^2_{kl} < b_k/b_l < w^1_{kl}$, $(p,q,r)=(1,0,2)$, при $f_0<0$; (78а)

$w^l_{kl} > b_k/b_p$ $(p,q,r)=(1,2,0)$, l=1,2 при $f_0>0$, $f_k>0$; (78б)

$w^l_{kl} < b_k/b_p$ $(p,q,r)=(0,1,2)$, l=1,2 при $f_0>0$; $f_k<0$. (78в)

Возможные классы решений, описывающих динамическую компактификацию подпространства M^l и расширение подпространства M^k изображены на рис. 2. Из вида особых решений (61) следует, что при $b_l w^l_m/s^{(l)}>0$ точкам A_l соответствует $R_m = \infty$, а точкам B_l - $R_m = 0$. При $b_l w^l_m/s^{(l)}<0$, наоборот, точкам A_l соответствует $R_m = 0$, а точкам B_l значение $R_m = \infty$. Исходя из этого нетрудно показать, что рис. 2а соответствуют модели, в которых эволюция начинается в определенный конечный момент времени со значений $R_l = R_k = 0$ (точка B_p) и кончается в другой конечный момент времени в точке B_{r+3}, которой соответствуют значения $R_l = 0$, $R_k = \infty$ масштабных факторов. Таким образом, время жизни этих моделей конечно. Для моделей, описываемых траекториями рис. 2b, начало эволюции по-прежнему соответствует конечному моменту времени с $R_l = R_k = 0$. Однако теперь для конечного состояния (точка A_{r+3}) $t = +\infty$ и $R_l = 0$, $R_k = 0$, т.е. время жизни этих моделей ограничено снизу и неограничено сверху. Для решений рис. 2c подпространства M^l и M^k начинает свою эволюцию в бесконечном прошлом ($t = -\infty$) со значений $R_l = R_k = 0$ (точка A_p) и заканчивают ее в определенный конечный момент времени со значениями $R_l = 0$, $R_k = \infty$ (точка B_{r+3}, $s^{(l)}>0$). И, наконец, для моделей основанных на рис. 2г эволюция начинается в бесконечном прошлом со значений $R_l = R_k = 0$ (точка A_p) и заканчивается в бесконечном будущем с $R_l = 0$, $R_k = \infty$. Модели этого класса являются несингулярными. Дополнительно отметим, что начальное расширение в моделях рис. 2а и 2б является инфляционным если

$$b_l w^l_m / s^{(l)} n_m < -1, \; m=k,l. \tag{79}$$

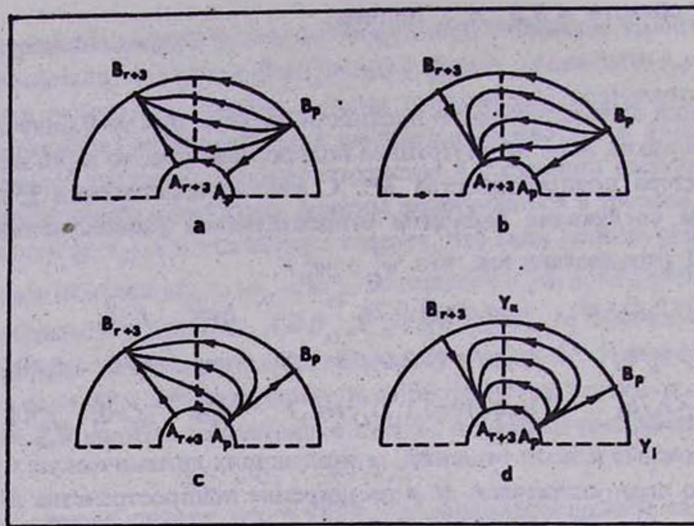

Рис. 2. Различные классы фазовых траекторий системы (43), описывающие динамическую компактификацию подпространства M^l. M^k - внешнее подпространство.

С учетом (78) имеем следующие возможные значения индексов на рис. 2

$$(p,r)=(1,2), \quad \text{при} \quad f_0<0; \tag{80а}$$

$$(p,r)=(1,0), \quad \text{при} \quad f_0>0, \quad f_k>0; \tag{80б}$$

$$(p,r)=(0,2), \quad \text{при} \quad f_0>0, \quad f_k<0; \tag{80в}$$

В частности, в первом случае как в начале, так и в конце эволюции общее решение стремится к вакуумным решениям. Мы рассмотрели фазовые траектории динамической компактификации в плоскости (y_p, y_k) с внешним подпространством M^k. Такую же структуру имеют фазовые картины в плоскости (y_p, y_m), описывающие динамическую компактификацию подпространств M^l и M^m. Отличие лишь в том, что траектория A_{r+3} B_{r+3} теперь находится в третьем квадранте, причем, как это следует из соотношения

$$w^l_{kl}=c^k_{m}w^l_{ml}+c^k_{mp} \tag{81}$$

при c^k_{m} относительное расположение обоих решений в фазовых плоскостях (y_p, y_m) и (y_p, y_k) одно и то же.

В качестве иллюстрации установленных закономерностей рассмотрим простой пример десятимерного пространства - времени $R\otimes M^1\otimes M^2$ с двумя подпространствами ($n_1 = 3$, $n_2 = 6$) и полем H_{MNP} в качестве единственного источника (в (5) $L_m = 0$). Из условия максимальной форминвариантности H_{MNP} в подпространствах M^i, $i = 1,2$ следует, что это поле имеет отличные от нуля компоненты только в M^1 и для него $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ [25]. Картину космологической эволюции будем рассматривать в йордановском представлении, когда согласно формулам (13), (3), (7) (с учетом $\beta = -3$), $c=1$, $b=2$, $\omega=-1$. Соответствующие значения коэффициентов (20в), (20г) равны

$$b_1=3/2,\ b_2=-3,\ b_3=2. \tag{82}$$

На рис. 2 теперь $i=2$, $k=1$. Среди постоянных c^s_{21} произвольным является только c^3_{21}. Из определений (20б) и (36) получим $f_0=-2$ и поэтому, согласно (80а) на рис.2 $p=1$, $r=2$, т.е. в начальной и конечной стадиях эволюции асимптотами общего решения являются вакуумные решения $y_1=w^l_{12}y_2$, $l=1,2$. Из условия существования вакуумных решений имеем

$$f_{lm}^2 - f_0 A^l_m = 9\left(c^3_{21}+4/9\right)\left(c^3_{21}+4/3\right)/4>0. \tag{83}$$

Соответствующие решения обладают положительной плотностью энергии при

$$A^l_m = A^2_1 = \left(c^3_{21}+1\right)^2 - 1/3 > 0. \tag{84}$$

Условия (77) можно записать в виде $w^1_{12}\cdot w^2_{12}=A^2_2/A^2_1<0$ или с учетом (84)

$$A^1_2 = \left[9\left(c^3_{21}\right)^2 + 12c^3_{21} - 2\right]/36 < 0. \tag{85}$$

Решение системы неравенств (83) - (85) имеет вид

$$-1+1/\sqrt{3} < c^3_{21} < -2/3+\sqrt{2/3}. \tag{86}$$

(случай $c^3_{21}=0$ ранее был рассмотрен в работе [25]). Нетрудно показать, что для этих значений c^3_{21} имеем $s^{(1)}>0$, $s^{(2)}<0$ и, поэтому согласно (63)

$$\lambda^{(1)}_1<0, \quad \lambda^{(2)}_1<0. \tag{87}$$

Соответствующая фазовая картина имеет вид рис. 2b с $p=1$, $r=2$.

Для исследования поведения поля дилатона, соответствующего моделям динамической компактификации рис. 2b, рассмотрим фазовые траектории в плоскости (y_2, y_3). Соответствующие особые решения имеют вид

$$y_3 = w^l_{32}y_2,\ \ w^0_{32} = b_3/b_2 = -2/3,\ \ w^l_{32} = c^3_{21}w^l_{12}+c^3_{12}, \tag{88}$$

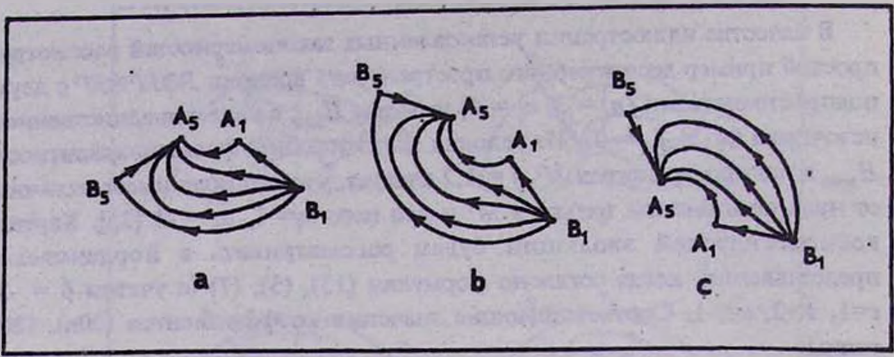

Рис. 3. Фазовые траектории в плоскости (y_2, y_3) (горизонтальная ось - y_2), соответствующие моделям динамической компактификации рис. 2b с полем Калба-Рамона в качестве источника. Изображены качественно различные случаи значений параметра c^3_{21}, принадлежащие областям (a) - $\left(-1+1/\sqrt{3},-1/3\right)$. (b) - (-1/3,0), (c) - $\left(0,-2/3+\sqrt{2/3}\right)$.

причем $w^1_{32}>(<)w^2_{32}$ при $c^3_{21}>(<)0$. Из выражений (50), (83), (84) следует, что

$$
\begin{aligned}
&w^2_{32}\geq 0, \quad w^1_{32}<0, \quad \text{при} \quad c^3_{21}\leq -1/3,\\
&w^i_{32}<0, \quad i=1,2, \quad \text{при} \quad c^3_{21}>0.
\end{aligned}
\tag{89}
$$

Соответствующие фазовые картины изображены на рис. 3 для качественно различных значений параметра c^3_{21}:

$$-1+1/\sqrt{3}<c^3_{21}<-1/3 \tag{90а}$$

$$-1/3<c^3_{21}<0, \tag{90б}$$

$$0<c^3_{21}<-2/3+\sqrt{2/3}, \tag{90в}$$

соответственно.

Как уже отмечалось выше действие (1) соответствует древесному приближению струнных диаграмм. В теории струн параметром петлевого разложения является $e^{2\varphi}$ (см., например, [40]). При $\varphi\geq -1$ становятся важными петлевые поправки и описание, основанное на (1), требует обобщения. В частности, в этой области значений дилатона (область сильной связи) могут быть важными эффекты дилатонного потенциала, обусловленные нарушением суперсимметрии теории [41-45]. Исследуем поведение функции $e^{2\varphi}=\Phi^{2/b}$ в рассмотренных выше моделях динамической компактификации. В ранние и поздние стадии эволюции эта функция стремится к особым решениям (61) с $l=1, 2$, для которых

$$e^{2\varphi} = \mathrm{const} \cdot |t - t_l|^{3w^l_{32}/s^{(l)}}. \tag{91}$$

В начальном этапе расширения ($t \to t_1+0$) общее решение стремится к особому решению (91) с $l=1$. С учетом неравенств (89) и $s^{(1)}>0$, $s^{(2)}<0$ отсюда получаем, что $e^{2\varphi} \to \infty$ при $t \to t_1+0$. В конечной стадии эволюции ($t \to +\infty$)общее решение стремится к особому решению с $l = 2$ и $e^{2\varphi} \to 0$ для значений (90а) постоянной c^3_{21} и $e^{2\varphi} \to \infty$ при (90б) и (90в). Таким образом, в начальной стадии расширения (окрестность сингулярной точки B_1) параметр петлевого разложения принимает большие значения, петлевые поправки становятся важным и описание основанное на эффективном действии (1) перестает быть верным. Для значений (90а) (рис. 3а) в ходе дальнейшей эволюции поле дилатона монотонно убывает уходя в глубь области слабой связи $e^{2\varphi} \ll 1$, где (1) хорошо описывает ситуацию. В случаях (90б) и (90в) поле φ после начального убывания в некоторый момент времени (точка пересечения траектории с осью y_2 на рис. 3b и с) начинает возрастать, стремясь к бесконечности в точке A_5. Таким образом, для этих значений параметра c^3_{21} рассмотренное выше описание требует обобщения как в начальной, так и в конечной стадиях эволюции. Для особого значения $c^3_{21}=-1/3$ имеем $w^2_{32}=0$ и $e^{2\varphi}$, при $t \to +\infty$ стремится к конечному значению, определяемому начальными условиями (см. (91)), а $\dot{\varphi} \to 0$.

Рассмотрим теперь поведение поля H_{MNP} соответствующее моделям динамической компактификации рис. 3. Как уже отмечалось выше это поле имеет отличные от нуля компоненты только в подпространстве M^1. Можно показать, что эти компоненты являются постоянными и пропорциональны полностью антисимметричному трехмерному тензору Леви-Чивита. Соответствующая плотность энергии $\varepsilon \sim R^{-6}_1$ стремится к бесконечности в начальной точке расширения B_1. Это не противоречит тому, что в этом пределе общее решение стремится к вакуумному решению (61) с $l=1$. Для этого как видно из (24), необходимо лишь, чтобы $\varepsilon/\Phi \to 0$, которое в данном случае выполняется, так как $\Phi R_1^6 \sim |t - t_1|^\delta$, $\delta<0$, при $t \to t_1$.

7. ***Заключение***. Мы рассмотрели многомерные однородные анизотропные космологические модели в рамках низкоэнергетической теории струн. Описание проводилось в общем конформном представлении,

определяемом формулой (2) с параметром c. Соответствующая система космологических уравнений имеет вид (24). Решения с метрикой и полем дилатона рассматривались в разделе 4. В зависимости от значений параметров модели они имеют вид степенных или экспоненциальных функций от времени. Показано, что в случае Риччи-плоских подпространств систему космологических уравнений можно свести к двумерной автономной динамической системе с квадратными правыми частями. Свойства решений этой системы исследованы методами качественной теории динамических систем. Найдены особые точки и установлен их характер в зависимости от параметров модели.

Характерная фазовая картина на плоскости (y_p, y_m) изображена на рис. 1, где видно, что вакуумные решения и особое решение (39) (которые можно записать общей формулуй (61)') являются асимптотами общего решения в ранние/поздние этапы эволюции вселенной. Условия, при которых происходит динамическая компактификация дополнительных измерений, выявлены в разделе 6. Соответствующие варианты фазовых картин изображены на рис.2, где M^p - внутреннее подпространство, M^k - внешнее подпространство. Возможные значения набора индексов (p, q, r) в зависимости от значений параметров даются соотношениями (80). Рассмотрен простой пример десятимерного пространства-времени с двумя максимально симметричными подпространствами и полем Калба-Рамона в качестве источника. Картина космологической эволюции обсуждается в представлении Йордана (физические аргументы в пользу того, что именно в этом представлении следует наложить условия расширения/сжатия см. [8, 20, 23, 46, 47]). Модели динамической компактификации реализуются для значений (86) постоянной c^3_{21}. Соответствующая фазовая картина в плоскости (y_2, y_1) имеет вид рис. 2с. Исследовано поведение поля дилатона в этих моделях. Функция $e^{2\varphi}$, определяющая вклад струнных петлевых диаграмм, становится большой в ранние стадии эволюции и, поэтому, соответствующее рассмотрение требует обобщения эффективного действия (1). В частности, могут быть важными эффекты наличия у дилатона потенциала, играющие важную роль в схемах нарушения суперсимметрии. Для значений (90б) и (90в) это относится также к поздним стадиям эволюции.

Ереванский государственный
университет, Армения

STRING COSMOLOGY AND DYNAMICAL COMPACTIFICATION

A.A.SAHARIAN

Multidimensional anisotropic Ricci-flat cosmological models arising from the lowest order string effective action and containing the graviton, the dilaton and Kalb-Ramond field are investigated. The generic features of such models are discovered by qualitative methods. For the early and late evolution stages it is found that the general solutions tends toward the power-law solutions. The dynamical compactification conditions for extra dimensions are discovered. The simple model having Kalb-Ramond field as a source is considered in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С.Хокинг, Дж.Эллис*, Крупномасштабная структура пространства - времени. Мир, М., 1977.
2. *М.Грин, Дж.Шварц, Э.Виттен*, Теория суперструн.т.1, 2, Мир, М., 1990.
3. *С.В.Кетов*, Введение в квантовую теорию струн и суперструн. Наука, Новосибирск, 1990.
4. *R.Myers*, Phys. Lett., **B199**, 371, 1987.
5. *I.Antoniadis, C.Bachas, J.Ellis, D.V.Nanopoulos*, Phys.Lett., **B211**, 393, 1988.
6. *I.Antoniadis, C.Bachas, J.Ellis, D.V.Nanopoulos*, Nucl.Phys., **B328**, 117, 1989.
7. *S.Kalara, K.A.Olive*, Phys.Lett., **B218**, 148, 1989.
8. *I.Antoniadis, C.Bachas, J.Ellis, D.V.Nanopoulos*, Phys.Lett., **B257**, 278, 1991.
9. *M.Mueller*, Nucl.Phys., **B337**, 37, 1990.
10. *G.Veneziano*, Phys.Lett., **B265**, 287, 1991.
11. *A.A.Tseytlin*, Class.Quantum Grav., **9**, 979, 1992.
12. *A.A.Tseytlin*, Int.J.Mod.Phys., **D1**, 223, 1992.
13. D.S.Goldwirth, M.J.Perry, Phys.Rev., **D49**, 5019, 1994.
14. *E.J.Copeland*, A.Lahiri, D.Wands, Phys.Rev., **D50**, 4868,1994.
15. *E.J.Copeland*, A.Lahiri, D.Wands, Phys.Rev., **D51**, 1569, 1995.
16. *M.Gasperini, R.Ricci*, Class.Quantum Grav., **12**, 677, 1995.

17. *N.A.Batakis*, Bianchi-type string cosmology, preprint CERN-TH/95-87.
18. *N.A.Batakis*, A new class of spatially homogeneous 4D string backgrounds, preprint CERN-TH/95-70.
19. *R.Brandenberger*, *C.Vafa*, Nucl.Phys., **B316**, 391, 1988.
20. *N.Sanchez*, G.Veneziano, Nucl.Phys., **B333**, 253, 1990.
21. *M.Gasperini*, *N.Sanchez*, *G.Veneziano*, Nucl.Phys., **B364**, 365, 1991; Int.J.Mod.Phys., **A6**, 3853, 1991.
22. *A.A.Tseytlin*, *C.Vafa*, Nucl.Phys., **B372**, 443, 1992.
23. *M.Gasperini*, *G.Veneziano*, Mod.Phys.Lett., **A8**, 3701, 1993.
24. *А.А.Саарян*, Астрофизика, **38**, 291, 1995.
25. *А.А.Саарян*, Астрофизика, **38**, 447, 1995.
26. *P.G.D.Freund*, Nucl.Phys., **B209**, 146, 1982.
27. *M.C.Bento*, *O.Bertolami*, Phys.Lett., **B368**, 198, 1996.
28. *D.Lust*, Cosmological string backgrounds, preprint CERN-TH. 6850/93.
29. *J.Ellis*, *N.E.Mavromatos*, *D.V.Nanopoulos*, A string scenario for inflationary cosmology, preprint ACT-03/95, CERN-TH.7480/94.
30. *C.G. Callan*, *D.Friedan*, *E.J.Martinec*, *M.J.Perry*, Nucl.Phys., **B262**, 593, 1985.
31. *C.G.Callan*, *I.R.Klebanov*, *M.J.Perry*, Nucl.Phys., **B278**, 78, 1986.
32. *E.S.Fradkin*, *A.A.Tseytlin*, Nucl.Phys., **B261**, 1, 1985.
33. *E.S.Fradkin*, *A.A.Tseytlin*, Phys.Lett., **B158**, 316, 1985.
34. *D.J.Gross*, *J.H.Sloan*, Nucl.Phys., **B291**, 41, 1987.
35. *А.А.Саарян*, Астрофизика, **38**, 101, 1995.
36. *О.И.Богоявленский*, Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. Наука, М., 1980.
37. *A.Chodos*, *S.Detweiler*, Phys.,Rev., **D21**, 2167, 1980.
38. *E.I.Guendelman*, *A.B.Kaganovich*, Int.J.Mod.Phys., **D3**, 221, 1993.
39. *A.Beloborodow*, *M.Demianski*, *P.Ivanov*, *A.G.Polnarev*, Phys.Rev., **D48**, 503, 1993.
40. *E.Witten*, Phys.Lett., **B149**, 351, 1984.
41. *M.Dine*, *R.Rohm*, *N.Seiberg*, *E.Witten*, Phys.Lett., **B156**, 55, 1985.
42. *S.Ferrara*, *N.Magnoli*, *T.R.Taylor*, *G.Veneziano*, Phys.Lett., **B245**, 409, 1990.
43. *R.Brustein*, Cosmology and models of supersymmetry breaking, preprint CERN-TH.7298/94.
44. *T.Banks*, *M.Berkooz*, *S.H.Shenker*, *G.Moore*, *P.J.Steinhardt*, Modular cosmology, preprint RU-94-93.
45. *S.Thomas*, Moduli inflation from dynamical supersymmetry breaking, preprint SLAC-PUB-95-6762.
46. *B.A.Campbell*, *A.Linde*, *K.A.Olive*, Nucl.Phys., **B355**, 146, 1991.
47. *L.J.Garay*, *J.Garcia-Bellido*. Nucl.Phys., **B400**, 416, 1993.