АСТРОФИЗИКА

ТОМ 39 ФЕВРАЛЬ, 1996 ВЫПУСК 1

УДК 52:531.51

О НЕЛИНЕЙНОМ ТЕНЗОРНОМ ПОЛЕ И ВТОРОМ МЕТРИЧЕСКОМ ТЕНЗОРЕ

Л.Ш.ГРИГОРЯН, С.ГОТТЛЕБЕР

Поступила 5 сентября 1995
Принята к печати 25 октября 1995

В предыдущей работе (см. [5]) была исследована самогравитирующая система, состоящая из скалярного и линейного тензорного поля $\psi_{ik}=\psi_{ki}$ с минимальной связью с учетом воздействия вакуумных поляризационных эффектов. В данной работе исследован случай нелинейного тензорного поля ψ_{ik}. Действие $S_{\psi}^{(\varepsilon)}$ поля ψ_{ik} определяется разностью $R_{ik}-\breve{R}_{ik}$, где R_{ik} - тензор Риччи пространства-времени, а $\breve{R}_{ik}$ - аналогичная величина, построенная с помощью метрики $\gamma_{ik}=g_{ik}+\varepsilon\psi_{ik}$, индуцируемой ψ_{ik} (ε-свободный параметр). При этом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} S_{\psi}^{(\varepsilon)}$ совпадает с ранее известным выражением для действия линейного поля ψ_{ik}. Выведены уравнения движения ψ_{ik} в искривленном пространстве-времени. Вычислен метрический тензор энергии-импульса, определяющий вклад ψ_{ik} в уравнения гравитационного поля.

1. *Введение*. Известен ряд сценариев раздувающейся Вселенной: старый и новый сценарии, растянутая инфляция (extended inflation) и др. (см. [1-3] и приведенные там ссылки). Они продолжают развиваться и уточняться. При этом важную роль сыграла модель инфляции, обусловленной вакуумными поляризационными эффектами [4]. Наряду с этим в инфляционных космологических моделях широко используется система самогравитирующего скалярного поля [1]. В связи с этим в [5] была исследована более сложная самогравитирующая система, состоящая из скалярного поля φ и линейного тензорного поля $\psi_{ik}=\psi_{ki}$ с минимальной связью.

Совместное действие вакуумных поляризационных эффектов, а также полей φ и ψ_{ik} можно описать следующим простым действием

$$S=-\frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\,d^4x+S_{vac-\varphi}+S_{\psi},\qquad (1)$$

где [2]

$$S_{vac-\varphi} = \frac{\alpha}{32\pi G}\int R^2\sqrt{-g}\,d^4x + \frac{1}{2}\int\left(\varphi_{,n}\varphi^{,n} - m^2\varphi^2\right)\sqrt{-g}\,d^4x, \qquad (2)$$

а S_ψ описывает вклад тензорного поля ψ_{ik}. В (1) и (2) R - скалярная кривизна пространства-времени, G - гравитационная постоянная, α - положительная постоянная связи, а $\varphi_{,n}=\delta\varphi/\delta x^n$, m - масса кванта скалярного поля $(\hbar = c = 1)$. В [5] исследован случай поля ψ_{ik}, которое в плоском пространстве-времени инвариантно относительно калибровочного преобразования

$$\psi_{ik}\to\psi_{ik}+b_{i;k}+b_{k;i}\ , \qquad (3)$$

$b_i(x)$- произвольное векторное поле. Показано, что в наиболее общем случае

$$S_\psi = S_\psi^{(0)} + \beta\Delta\, S_\psi, \qquad (4)$$

где β - свободный параметр,

$$S_\psi^{(0)} = \int g^{ik}\left(P^l_{ik}P^m_{lm} - P^l_{im}P^m_{kl}\right)\sqrt{-g}\,d^4x, \qquad (5)$$

$$\Delta\, S_\psi = \frac{1}{4}\int\left(\psi^l_l\psi^{ik}R_{ik} + \psi^{ik}\psi^{lm}R_{ilmk}\right)\sqrt{-g}\,d^4x, \qquad (6)$$

а

$$P^l_{ik} = \frac{1}{2}g^{lm}\int\left(\psi_{mi;k} + \psi_{mk;i} - \psi_{ik;m}\right). \qquad (7)$$

Здесь R_{ilmk}- тензор кривизны пространства-времени, а ; означает операцию ковариантного дифференцирования по отношению к метрическому тензору g_{ik}. В частном случае β=0 (4) переходит в известное выражение (5) для действия линейного безмассового тензорного поля ψ_{ik} [6]. В настоящей работе исследован случай нелинейного поля ψ_{ik}.

В п. 2 приведены сведения из биметрической формулировки Общей Теории Относительности (ОТО) [7-10]. В п. 3 с их помощью вводится в рассмотрение новое выражение $S_\psi = S_\psi^{(\varepsilon)}$, содержащее свободный параметр ε. Оно обобщает $S_\psi^{(0)}$ на случай $\varepsilon\neq0$ (нелинейное поле ψ_{ik}). Далее в п. 4 выведены уравнения движения поля ψ_{ik} и вычислен его метрический тензор энергии-импульса. Выводы подытожены в п. 5.

2. *О биметрической формулировке ОТО.* В общей теории относительности используются различные выражения для действия гравитационного поля

$$S_\alpha = -\frac{1}{16\pi G}\begin{cases}\int R\sqrt{-g}\, d^4x & \alpha=1\\ \int g^{ik}\left(\Gamma^l_{lm}\Gamma^m_{kl}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)\sqrt{-g}\, d^4x & \alpha=2\\ \int g^{ik}\left(\Delta^l_{lm}\Delta^m_{kl}-\Delta^l_{ik}\Delta^m_{lm}\right)\sqrt{-g}\, d^4x & \alpha=3.\end{cases} \tag{8}$$

В S_3 наряду с метрическим тензором g_{ik} рассматривается также фоновый метрический тензор γ_{ik}, соответствующий пространству-времени с тензором Римана $\breve{R}^l_{klm}$,

$$\Delta^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \breve{\Gamma}^l_{ik} \tag{9}$$

- так называемый тензор аффинной деформации, равный разности между символами Кристоффеля Γ_{ik} искривленного пространства-времени с метрикой g_{ik} и символами Кристоффеля

$$\breve{\Gamma}^l_{ik} = \frac{1}{2}\gamma^{lm}\left(\gamma_{ml,k}+\gamma_{mk,l}-\gamma_{ik,m}\right), \tag{10}$$

определяемыми фоновой метрикой γ_{ik}. Действия S_1, S_2, S_3 отличаются друг от друга интегралами от 4-дивергенций, и поэтому вариация $S_\alpha+S_m$ по g_{ik} приводит к уравнениям Эйнштейна независимо от вариантов $\alpha=1,2,3$ (S_m - действие вещества и негравитационных полей). В [11-14] теория тяготения излагается с помощью S_1 и S_2, а в [7-10] с помощью S_3. Наиболее простым, с математической точки зрения, следует признать скаляр S_1, но он содержит вторые производные g_{ik} . Требованию, чтобы действие не содержало производных от g_{ik} выше первого порядка [12], удовлетворяет S_2, но оно не является скаляром. S_3 - скаляр и содержит производные не выше первого порядка. При этом для перехода $S_2 \to S_3$ достаточно в Γ_{ik} операцию частного дифференцирования заменить операцией ковариантного дифференцирования по γ_{ik} (обозначается символом :), поскольку

$$\Gamma^l_{ik} \to \frac{1}{2}g^{lm}\left(g_{ml:k}+g_{mk:l}-g_{ik:m}\right) = \Delta^l_{ik}. \tag{11}$$

Идея биметрической формулировки ОТО была высказана пол века тому назад [15-17]. Она позволяет выписать ковариантные выражения для тензора энергии-импульса гравитационного поля, а также для силы тяготения действующей на пробную частицу в гравитационном поле (о преимуществах S_3 см. также [18]). Вместе с тем имеется произвол в выборе плоской метрики, поскольку

$$\gamma_{ik} = \gamma^{(0)}_{nm} \frac{\delta f^{(n)}}{\delta x^i} \frac{\delta f^{(m)}}{\delta x^k}, \quad \gamma^{(0)}_{nm} = diag(1,-1,-1,-1), \tag{12}$$

где $f^{(n)}(x)$ - произвольные калибровочные функции [9]. Например, при выборе $f^{(n)}(x)=x^n$ действие S_3 переходит в S_2.

3. *Действие тензорного поля.* В биметрической формулиривке ОТО рассматривается плоская фоновая метрика (12), что позволяет использовать S_3 в качестве действия гравитационного поля. В случае произвольного γ_{ik} (не плоская метрика) из (19) следует, что S_1-S_3 не является интегралом от 4-дивергенции, и поэтому S_3 нельзя отождествлять с действием гравитационного поля. Воспользуемся этим обстоятельством и перейдем к более общему выражению $S^{(\varepsilon)}_\psi$, которое получается из S_3 заменой $16\pi G \to \varepsilon^2$ и подстановкой не плоского метрического тензора

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \varepsilon\psi_{ik} \quad . \tag{13}$$

После не сложных преобразований приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \Delta^l_{ik} &= -\frac{1}{2}\gamma^{lm}\left(\gamma_{ml;k} + \gamma_{mk;l} - \gamma_{ik;m}\right) = -\varepsilon F^l_{ik}, \\ F^l_{ik} &= \frac{1}{2}\gamma^{lm}\left(\psi_{ml;k} + \psi_{mk;l} - \psi_{ik;m}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

и поэтому

$$S^{(\varepsilon)}_\psi = \int g^{ik}\left(F^l_{ik}F^m_{lm} - F^l_{im}F^m_{kl}\right)\sqrt{-g}\, d^4x. \tag{15}$$

Напомним, что индексы всех тензоров опускаются и подымаются только с помощью g_{ik} и g^{ik}. Исключение составляет тензор γ^{ik} (тензор обратный тензору γ_{ik}), определяемый равенством

$$\lambda^{lm}(g_{mk} + \varepsilon\psi_{mk}) = \delta^l_k \, , \tag{16}$$

$S^{(\varepsilon)}_\psi$ зависит от ψ_{ik} и содержит свободный параметр ε. Сравнивая (15) и (5), убеждаемся, что

$$F^l_{ik} \to P^l_{ik}, \quad S^{(\varepsilon)}_\psi \to S^{(0)}_\psi \quad \text{при } \varepsilon\psi_{ik} \to 0. \tag{17}$$

Как видим, $S_\psi^{(\varepsilon)}$ является обобщением $S_\psi^{(0)}: \lim\limits_{\varepsilon\to 0} S_\psi^{(\varepsilon)} = S_\psi^{(0)}$, и поэтому $S_\psi^{(\varepsilon)}$ можно выбрать в качестве действия S_ψ нелинейного безмассового поля ψ_{ik}:

$$S_\psi = S_\psi^{(\varepsilon)}. \tag{18}$$

Нелинейность ψ_{ik} обусловлена наличием параметра ε.

Докажем, что (15) выражается через тензор Риччи $\breve{R}_{ik}$, построенный с помощью γ_{ik}. С этой целью воспользуемся формулой (П.10) из приложения к работе [5]. Подставив в эту формулу $g_{ik}(2)=g_{ik}$ и $g_{ik}(1)=\gamma_{ik}$, придем к равенству

$$g^{ik}\left(R_{ik} - \breve{R}_{ik}\right) = g^{ik}\left(\Delta^l_{im}\Delta^m_{kl} - \Delta^l_{ik}\Delta^m_{lm}\right) + \left(g^{ik}\,\Delta^m_{ik} - g^{im}\,\Delta^k_{ik}\right)_{;m}. \tag{19}$$

С его помощью действие (15) можно преобразовать к виду

$$S_\psi^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int g^{ik}\left(\breve{R}_{ik} - R_{ik}\right)\sqrt{-g}\, d^4x \tag{20}$$

(с точностью до слагаемого

$$\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}\int \frac{\delta}{\delta x^n}\left[\sqrt{-g}\left(g^{ik}\,\Delta^n_{ik} - g^{in}\,\Delta^k_{ik}\right)\right] d^4x, \tag{21}$$

вариация которого $\delta\sigma=0$). Как видим, $S_\psi^{(\varepsilon)}$ определяется разностью между тензором Риччи $\breve{R}_{ik}$, построенным с помощью γ_{ik}, и тензором Риччи пространства-времени с метрикой g_{ik}. В этом смысле (13) условно можно рассматривать в качестве "второго метрического тензора", индуцируемого ψ_{ik}. Однако его не следует отождествлять с фоновой метрикой (12), которая задается плоской, и поэтому не является динамической переменной. В нашем случае, соотношение (13) позволяет перейти, например, от g_{ik} и ψ_{ik} к набору независимых переменных g_{ik} и γ_{ik}, определяемых из условия экстремальности полного действия S. По этой причине "второй метрический тензор" γ_{ik} является динамической переменной, а (20) является действием $S_{\gamma/g}$ поля γ_{ik} на фоне g_{ik}: $S_{\gamma/g}=S_\psi^{(\varepsilon)}$. Возможна также иная интерпретация, обусловленная тем, что полное действие системы можно представить в виде

$$S=S_\gamma+S_{mat-\varphi}+S_{g/\gamma}, \tag{22}$$

где

$$S_\gamma = -\frac{1}{16\pi G}\int g^{ik}\breve{R}_{ik}\sqrt{-g}\,d^4x \tag{23}$$

- действие свободного поля γ_{ik}, а

$$S_{g/\gamma} = \left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{16\pi G}\right)\int g^{ik}\left(\breve{R}_{ik}-R_{ik}\right)\sqrt{-g}\,d^4x \tag{24}$$

-действие гравитационного поля g_{ik}, на фоне "второй метрики" γ_{ik}. При этом $S_{g/\gamma}$ и $S_{\gamma/g}$ выражаются через (15) и в этом смысле не содержат ковариантные производные γ_{ik} или g_{ik} выше первого порядка.

Ранее в [19] был рассмотрен случай динамической фоновой метрики. Однако в этой работе γ_{ik} использовалось не для введения тензорного поля ψ_{ik} в теорию Эйнштейна, а для построения альтернативного варианта релятивистской теории гравитации.

Обратим внимание на то, что (20) инвариантно относительно масштабного преобразования

$$\gamma_{ik}\to\alpha\gamma_{ik} \tag{25}$$

второй метрики (α - произвольная постоянная).

Далее мы будем предполагать, что действие поля ψ_{ik} определяется выражением (20): $S_\psi=S_\psi^{(\varepsilon)}$.

4. *Уравнения поля*. Перейдем к рассмотрению самогравитирующей системы, состоящей из скалярного φ и тензорного ψ_{ik} полей с учетом R^2-члена (например, раздувающая Вселенная). Полное действие системы (1) определяется выражениями (2) и (18).

Варьируя S по ψ_{ik} при фиксированных g_{ik} и φ, с учетом (13)-(15) получим

$$\delta S = \frac{1}{\varepsilon}\int \left.\frac{\delta\sqrt{-g}L}{\delta\gamma_{ik}}\right|_{g_{ik}}\delta\psi_{ik}\,d^4x, \tag{26}$$

где

$$L = g^{ik}\left(\Delta^l_{ik}\Delta^m_{lm}-\Delta^l_{im}\Delta^m_{kl}\right), \tag{27}$$

и поэтому из условия экстремальности S следует

$$\left.\frac{\delta\sqrt{-g}L}{\delta\gamma_{ik}}\right|_{g_{ik}} = 0\;. \tag{28}$$

Вариационная производная в левой части этого выражения вычислена в [20] и приводит к уравнениям

$$\left[\sqrt{g/\gamma}\left(\gamma^{ik}\, g^{mn}+\gamma^{mn}\, g^{ik}-\gamma^{im}\, g^{kn}-\gamma^{km}\, g^{in}\right)\right]_{:mn}=0, \tag{29}$$

описывающим распространение ψ_{ik} в искривленном пространстве-времени. Напомним, что : означает операцию ковариантного дифференцирования по второй метрике (13), а γ - детерминант матрицы, составленной из γ_{ik}. Как и следовало ожидать (29) нелинейно по ψ_{ik}. Если ε устремить к нулю, то (29) примет вид [6]

$$P^l_{ik;l}-P^l_{il;k}=0\,. \tag{30}$$

Эти уравнения описывают распространение линейного безмассового поля ψ_{ik} в искривленном пространстве-времени.

Для полноты приведем также уравнение движения скалярного поля:

$$\left(\Box+m^2\right)\varphi=0, \tag{31}$$

где $\Box$ — оператор Д'Аламбера.

Остается выписать уравнения, вытекающие из условия экстремальности S по отношению к вариациям g_{ik} (уравнения гравитационного поля):

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R+\alpha\, H_{ik}=8\pi G\left(T_{ik}+\Pi_{ik}\right), \tag{32}$$

где [6]

$$H_{ik}=R_{;ik}-g_{ik}R^{;n}_{;n}-RR_{ik}+\frac{1}{4}g_{ik}R^2 \tag{33}$$

описывает вклад R^2- члена, а

$$T_{ik}=\varphi_{,i}\varphi_{,k}+\frac{1}{2}g_{ik}\left(m^2\varphi^2-\varphi_{,n}\varphi^{,n}\right) \tag{34}$$

- тензор энергии-импульса скалярного поля. Что касается Π_{ik} (метрический тензор энергии-импульса ψ_{ik}), то он определяется соотношением

$$\delta S_\psi=\frac{1}{2}\int \Pi_{ik}\delta\, g_{ik}\sqrt{-g}\, d^4x \tag{35}$$

при условии, что ψ_{ik} фиксированы. Из (13)-(15) и уравнений движения (28) следует, что в

$$\delta S_\psi=\frac{1}{\varepsilon^2}\delta\int L\sqrt{-g}\, d^4x \tag{36}$$

можно считать фиксированным не ψ_{ik}, а γ_{ik} и поэтому, учитывая (20), находим

$$\delta S_\psi = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\left(\widetilde{R}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} g^{mn}\widetilde{R}_{mn}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d^4x, \qquad \widetilde{R}_{ik} = \breve{R}_{ik} - R_{ik}. \quad (37)$$

После этого, сравнивая (35) и (37), приходим к выводу, что

$$\varepsilon^2 \Pi_{ik} = 2\widetilde{R}_{ik} - g_{ik} g^{mn}\widetilde{R}_{mn}. \quad (38)$$

Докажем существование предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Pi_{ik} = \overset{(0)}{\Pi}_{ik}. \quad (39)$$

С этой целью воспользуемся тем, что справедлива формула

$$\breve{R}_{ik} - R_{ik} = -\Delta^l_{ik;l} + \Delta^l_{il;k} + \Delta^l_{ik}\Delta^m_{lm} - \Delta^l_{im}\Delta^m_{kl} \quad (40)$$

(см.(3.12) в [5]). Подставив сюда (14), придем к выражению

$$\widetilde{R}_{ik} = \varepsilon\left(F^l_{ik;l} - F^l_{il;k}\right) + \varepsilon^2\left(F^l_{ik}F^m_{lm} - F^l_{im}F^m_{kl}\right). \quad (41)$$

С другой стороны согласно (7), (14) и (30)

$$\left(F^l_{ik;l} - F^l_{il;k}\right) \to \left(P^l_{ik;l} - P^l_{il;k}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad (42)$$

и поэтому $\widetilde{R}_{ik} \sim \varepsilon^2$. Таким образом, предел (39) существует. Он имеет громоздкий вид и соответствует линейной теории с действием (5).

5. ***Выводы***. В [5] была исследована самогравитирующая система, состоящая из скалярного поля φ и линейного безмассового поля ψ_{ik}. В данной работе исследована анологичная система с нелинейным тензорным полем ψ_{ik}. Действие симметричного тензорного поля ψ_{ik} получено из действия S_3 гравитационного поля в биметрической формулировке ОТО (см. (8)) путем преобразований. Сначала в S_3 введена новая постоянная ε заменой $16\pi G \to \varepsilon^2$, а затем вместо плоской фоновой метрики (12) подставлено (13). Полученное выражение $S^{(\varepsilon)}_\psi$ (см. (15)) зависит от ψ_{ik} и содержит свободный параметр ε. Оно выбрано в качестве действия S_ψ поля ψ_{ik} (см. (18)), поскольку является обобщением известного действия (5) линейного безмассового поля ψ_{ik} на случай нелинейного поля (линейной теории соответствует предел $\varepsilon \to 0$). Согласно (20) S_ψ определяется разностью $R_{ik} - \breve{R}_{ik}$, где R_{ik} - тензор Риччи пространства-

времени, а $\breve{R}_{ik}$ - тензор Риччи, построенный с помощью $\gamma_{ik}=g_{ik}+\varepsilon\psi_{ik}$. В этом смысле γ_{ik} можно рассматривать в качестве второй метрики, индуцируемой ψ_{ik}. S_{ψ} инвариантно относительно масштабного преобразования $\gamma_{ik}\to\alpha\gamma_{ik}$, где α - произвольная постоянная.

Выведены уравнения движения (29), описывающие процесс распространения ψ_{ik} в искривленном пространстве-времени. Вычислен метрический тензор энергии-импульса Π_{ik}, определяющий вклад ψ_{ik} в уравнения Энштейна. Он также выражается через $R_{ik}-\breve{R}_{ik}$ (см. (38)).

Решая уравнения поля (29), (31) и (32), можно определить эволюцию самогравитирующей системы, состоящей из скалярного поля φ и нелинейного тензорного поля ψ_{ik}. Последнюю можно использовать в сценариях раздувающейся Вселенной вместо часто используемой системы самогравитирующего скалярного поля φ [1].

Благодарность. Один из авторов (Л.Ш.Г.) признателен Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) за финансирование поездки и работы в Потсдаме. Работа Л.Ш.Г. частично финансировалась Международным Научным Фондом (грант RY 6000).

Институт прикладных проблем физики, Армения
Ереванский государственный университет,
Институт астрофизики, Подстам, Германия

NON-LINEAR TENSOR FIELD AND THE SECOND METRIC TENSOR

L.CH.GRIGORIAN, S.GOTTLÖBER

In the previous paper [5] a self-gravitating system of a scalar field with an additional linear and minimally coupled tensor field $\psi_{ik}=\psi_{ki}$ was investigated. Vacuum-polarization effects were also taken into account. In this paper the case of non-linear tensor field ψ_{ik} is investigated. The action $S_{\psi}^{(\varepsilon)}$ of the field ψ_{ik} is determined by the difference $R_{ik}-\breve{R}_{ik}$ between the Ricci tensor R_{ik} of the space-time and the similar one $\breve{R}_{ik}$ formed from "the second metric tensor"

$\gamma_{ik}=g_{ik}+\varepsilon\psi_{ik}$ induced by ψ_{ik} (ε is a free parameter). In the limit $\varepsilon\to 0$ the action $S_{\psi}^{(\varepsilon)}$ transforms to the known action of the linear tensor field ψ_{ik}. The equations describing the propagation of ψ_{ik} in the curved space-time are derived. The energy-momentum tensor determining the contribution of ψ_{ik} in the gravitational field equations is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А.Д.Линде*, Физика элементарных частиц и инфляционная космология, Наука, М., 1990.
2. *S.Gottlober, V.Muller, H.-J.Schmidt, A.A.Starobinsky*, Int. Journ. Mod. Phys., **D1**, 257, 1992.
3. *K.Sato* (Ed.), Evolution of the Universe and its Observational Quest, Universal Academy Press, Inc. and Yamada Science Foundation, 1994.
4. *A.A.Starobinsky*, Phys. Lett., **B91**, 99, 1980.
5. *Л.Ш.Григорян, С.Готтлебер*, Астрофизика, в печати.
6. *Б.С.Девитт*, Динамическая теория групп и полей, Наука, М., 1987.
7. *N.Rosen*, The III International School of Cosmology and Gravitation, Erice, 8-20 May, 1974, pp 2-40.
8. *L.P.Grischuk, A.N.Petrov, A.D.Popova*, Commun. Math. Phys., **94**, 379, 1984.
9. *Я.Б.Зельдович, Л.П.Грищук*, Успехи физ. наук, **149**, 695, 1986.
10. *А.А.Логунов*, Лекции по теории относительности и гравитации, Наука, М., 1987.
11. *В.А.Фок*, Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, М., 1961.
12. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, Теория поля, М., 1973.
13. *Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер*, Гравитация, Мир, М., 1977.
14. *Г.С.Саакян*, Пространство-время и гравитация, Издат. Ереванского ун-та, Ереван, 1985.
15. *N.Rosen*, Phys. Rev., **57**, 147, 1940.
16. *A.Papapetrou*, Proc. Roy. Irish Acad., **52A**, 11, 1948.
17. *N.Rosen*, Ann. Phys., **22**, 1, 1963.
18. *Л.Ш.Григорян*, Астрофизика, **30**, 380, 1989.
19. *Л.Ш.Григорян*, Астрофизика, **37**, 515, 1994.
20. *Н.А.Черников*, Вариационный метод Гильберта и тензор Папапетру, Препр. ОИЯИ, П2-87-683, Дубна, 1987.