АСТРОФИЗИКА

ТОМ 38 АВГУСТ, 1995 ВЫПУСК 3

УДК: 52-423

СТАТИЧЕСКОЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ В ТЕОРИИ КАЛУЦЫ-КЛЕЙНА

Р.М.АВАКЯН, Э.В.ЧУБАРЯН

Поступила 10 октября 1995
Принята к печати 6 ноября 1995

В рамках теории Калуцы-Клейна получено внешнее решение для гравитационного поля, создаваемого статическим сферически-симметричным распределением нейтральной и заряженной материи. Получена формула, связывающая массу центрального тела с интегралом от распределения давления внутри него.

Рассмотрим гравитационное поле, создаваемое статическим сферически - симметричным распределением материи. В теории Эйнштейна внешним решением для такого распределения нейтральной или заряженной материи являются соответственно известные решения Шварцшильда и Райснера - Нордстрема. В настоящей работе эта задача решается в рамках теории Калуцы - Клейна [1]. Запишем для этого метрику в изотропных координатах $X^0=t$, $X^1=r$, $X^2=\theta$, $X^3=\varphi$ (система единиц c=k=1)

$$dS^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}\left[dr^2 + r^2\left(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2\right)\right]. \qquad (1)$$

Уравнения поля в теории Калуцы - Клейна имеют вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = 8\pi\left[T^m_{ik} + T^e_{ik} + T^s_{ik}\right], \qquad (2)$$

где $T^m_{ik} = (P+\rho)u_i u_k - Pg_{ik}$ - тензор энергии-импульса материи, P - давление, ρ - плотность энергии материи, T^e_{ik} - тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^e_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[-F_{ie}F^e_k + \frac{1}{4}F^{em}F_{em}g_{ik}\right], \qquad (3)$$

где F^{ik} - тензор электромагнитного поля, а

$$T^{s}_{ik} = g_{i\rho}\,\Phi^{,\rho}\Phi_{,k} - \frac{1}{2} g_{ik}\,\Phi_{,\rho}\Phi_{,\sigma}\,g^{\rho\sigma} \tag{4}$$

- тензор энергии-импульса скалярного поля Φ, где expΦ является метрическим коэффициентом при пятой координате.

К уравнениям (3) необходимо добавить уравнение состояния $P=P(\rho)$, уравнение для скалярного поля

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}F_{,\nu}\right) = S, \tag{5}$$

где S - функция зависящая от плотности (давления), вид которой задается из определенных физических соображений, а также уравнение для F_{ik}, которое мы приведем позднее.

Решим вначале задачу в случае нейтральной материи. Для метрики (1) удобные комбинации уравнений (2) и (3) имеют вид:

$$e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right] = 4\pi(\rho + 3P), \tag{6}$$

$$e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda''}{2} + \frac{\nu''}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4}\right] = -4\pi(\rho + P) - 8\pi\, e^{-\lambda}\,\Phi'^2, \tag{7}$$

$$e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{3\lambda'}{2r} + \frac{\nu'}{2r}\right] = -4\pi(\rho - P), \tag{8}$$

$$\Phi'' + \Phi'\left(\frac{\nu' + \lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) = -S(\rho)\,e^{\lambda}, \tag{9}$$

$$P = P(\rho), \tag{10}$$

где штрих означает производную по r.

Будем искать решение уравнений (6) - (10) в пустоте ($\rho=P=0$)

$$\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'}{r}=0, \tag{11}$$

$$\frac{\lambda''}{2}+\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{4}=-8\pi\Phi'^2, \tag{12}$$

$$\frac{\lambda''}{2}+\frac{\lambda'^2}{4}+\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{3\lambda'}{2r}+\frac{\nu'}{2r}=0, \tag{13}$$

$$\Phi''+\Phi'\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right)=0. \tag{14}$$

Из (11) и (14) имеем

$$\nu'=\frac{2c_1}{r^2}e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{15}$$

$$\Phi'=\frac{2c_3}{r^2}e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{16}$$

где постоянные интегрирования c_1 и c_3 определяются из сшивки с внутренним решением. Сложив (11) и (13), получим

$$\left[(\nu'+\lambda')r^3e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}\right]=0, \text{ откуда}$$

$$e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}=1-\frac{c_2}{r^2}. \tag{17}$$

Здесь c_2 - новая постоянная интегрирования и учтено, что на бесконечности $\nu=\lambda=0$. Вычислим значение c_2. Для этого рассмотрим комбинацию уравнений (6)+(8) внутри конфигурации

$$\left[\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}\right)r^3e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}\right]=16\pi Pr^3e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}}, \tag{18}$$

Проинтегрируем (18) от центра $r=0$ до границы конфигурации $r=r_s$, где $P(r_s)=0$:

$$r^3\left(e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}\right)'\Bigg|_{r=r_s} = 16\pi\int_0^{r_s} Pr^3 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}}\,dr. \tag{19}$$

С учетом сшивки с (17) получим

$$c_2 = 8\pi\int_0^{r_s} Pr^3 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}}\,dr > 0. \tag{20}$$

Подставив (17) в (15) и (16), найдем ν и Φ, а затем с учетом (17) и λ

$$e^{\nu} = \left(\frac{r-\sqrt{c_2}}{r+\sqrt{c_2}}\right)^{\frac{c_1}{\sqrt{c_2}}}, \tag{21}$$

$$e^{\Phi} = \left(\frac{r-\sqrt{c_2}}{r+\sqrt{c_2}}\right)^{\frac{c_3}{\sqrt{c_2}}}, \tag{22}$$

$$e^{\lambda} = \left(1-\frac{c_2}{r^2}\right)^2\left(\frac{r+\sqrt{c_2}}{r-\sqrt{c_2}}\right)^{\frac{c_1}{\sqrt{c_2}}}. \tag{23}$$

На больших расстояниях

$$e^{\lambda} \approx 1-\frac{2c_1}{r} = 1-\frac{r_g}{r}, \tag{24}$$

где $r_g=2m$, m - масса конфигурации. Отсюда получаем

$$c_1 = m = \frac{r_g}{2}. \tag{25}$$

Введем обозначения

$$c_1 = \frac{2}{\mu}\sqrt{c_2}, \tag{26}$$

$$c_3 = \frac{2\alpha}{\mu}\sqrt{c_2}, \tag{27}$$

где μ и α - новые постоянные, но они не независимы. Связь между ними можно найти, подставив решения (21) - (23) в неиспользованное уравнение (12), откуда

$$\mu = \sqrt{1+16\pi\alpha^2}. \tag{28}$$

В результате мы получим в рамках теории Калуцы - Клейна внешнее

решение для нейтрального сферического тела:

$$e^{\nu} = \left(\frac{r - \frac{\mu r_g}{4}}{r + \frac{\mu r_g}{4}} \right)^{\frac{2}{\mu}}, \tag{29}$$

$$e^{\lambda} = \left(1 - \frac{\mu^2 r_g^2}{16 r^2} \right)^2 \left(\frac{r + \frac{\mu r_g}{4}}{r - \frac{\mu r_g}{4}} \right)^{\frac{2}{\mu}}, \tag{30}$$

$$e^{\Phi} = \left(\frac{r - \frac{\mu r_g}{4}}{r + \frac{\mu r_g}{4}} \right)^{\frac{2\alpha}{\mu}}. \tag{31}$$

Постоянные m и α (или μ) определяются из сшивки с внутренним решением. Сравнивая (29) и (30) с (17) и учитывая (20), (25) и (26), найдем

$$m^2 = \frac{32\pi}{\mu} \int_0^{r_s} P r^3 e^{\frac{\nu + 3\lambda}{2}} dr. \tag{32}$$

Далее из (6) легко получить

$$\nu = \frac{2 m_1(r)}{r^2} e^{-\frac{\nu + \lambda}{2}}, \tag{33}$$

$$m_1' = 4\pi(\rho + 3P) r^2 e^{\frac{\nu + 3\lambda}{2}}, \tag{34}$$

Сравнение (33) с (15) и учет (25) показывает, что $m_1(r)$ имеет смысл накопленной массы внутри сферы радиуса r, причем $m_1(r_s)=m$. Аналогично из (9) получаем

$$\Phi' = \frac{2m_3(r)}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{35}$$

$$m_3' = -S(\rho) r^2 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}}, \tag{36}$$

откуда с учетом (16), (26) и (27) имеем $m_3(r_s)=c_3$, а также находим значение

$$\alpha = \frac{c_3}{c_1} = \frac{m_3(r_s)}{m_1(r_s)}. \tag{37}$$

В свою очередь величины $m_1(r_s)$ и $m_3(r_s)$ находятся из (34) и (36)

$$m_1(r_s) = m = 4\pi \int_0^{r_s} (r + 3P) r^2 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}} dr, \tag{38}$$

$$m_3(r_s) = -\int_0^{r_s} S(\rho) r^2 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}} dr.$$

Полученная формула для $m_1(r_s)$ есть ни что иное, как толменовское выражение для полной массы, справедливое в любых координатах. Отметим, что нами для массы m получено новое выражение (32), справедливое только в изотропных координатах.

Предположим теперь, что внутри конфигурации имеется сферически-симметрично распределенный заряд. В этом случае в правой части уравнений (2) необходимо учесть тензор T^e_{ik} и добавить уравнение электромагнитного поля

$$F^{ik}_{;k} = -4\pi j^i, \tag{39}$$

где j^i - четырехмерный вектор тока. Отличной от нуля компонентой F^{ik} будет F^{01}, для которой из (39) в пустоте получаем:

$$F^{01} = \frac{e}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{40}$$

где e - полный заряд конфигурации. В пустоте, с учетом (3) и (40) уравнения имеют вид:

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} = \frac{e^2}{r^4} e^{-\lambda}, \tag{41}$$

$$\lambda'' + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} = \frac{e^2}{r^4} e^{-\lambda} - 8\pi\Phi'^2, \tag{42}$$

$$\frac{\lambda''}{2}+\frac{\lambda'^2}{4}+\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{3\lambda'}{2r}+\frac{\nu'}{2r}=-\frac{e^2}{r^4}e^{-\lambda}, \tag{43}$$

$$\Phi''+\Phi'\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right)=0. \tag{44}$$

Из (41), (42) и (44) имеем

$$\nu'=\frac{2m_1(r)}{r^2}e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{45}$$

$$m_1'=\frac{e^2}{r^2}e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}, \tag{46}$$

$$\lambda'=-\frac{2m_2(r)}{r^2}e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{47}$$

$$m_2'-\frac{m_1-m_2}{r}=\frac{e^2}{r^2}e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}, \tag{48}$$

$$\Phi'=\frac{2c_3}{r^2}e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{49}$$

Из (46) и (48) следует

$$m_1-m_2=\frac{2c_2}{r}, \tag{50}$$

Взяв сумму (45) и (47), после интегрирования получим (учтено, что на бесконечности $\nu=\lambda=0$):

$$e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}=1-\frac{c_2}{r^2}. \tag{51}$$

Рассмотрим сумму уравнений (41) и (43)

$$(\lambda+\nu)''+\frac{(\lambda+\nu)'}{r}+\frac{\nu'^2}{2}=\frac{2e^2e^{\nu}-32\pi c_3^2}{\left(r^2-c_2\right)^2}.$$

Подставив сюда $\lambda+\nu$ из (51), получим уравнение, содержащее только ν

$$\nu'=\frac{2\sqrt{4c_2-16\pi c_3^2+e^2e^{\nu}}}{r^2-c_2}. \tag{52}$$

Удовлетворяющим граничному условию $r \to \infty, \nu \to 0$ решением является

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{2\left(1+\sqrt{1+\frac{e^2}{4c_2-16\pi c_3^2}}\right)\left(\frac{r+\sqrt{c_2}}{r-\sqrt{c_2}}\right)^{\sqrt{1-4\pi c_3^2/c_2}}}{\left(1+\sqrt{1+\frac{e^2}{4c_2-16\pi c_3^2}}\right)^2\left(\frac{r+\sqrt{c_2}}{r-\sqrt{c_2}}\right)^{2\sqrt{1-4\pi c_3^2/c_2}} - \frac{e^2}{4c_2-16\pi c_3^2}} \tag{53}$$

С учетом поведения $e^{\nu/2}$ при больших r получим

$$c_2 = \frac{m^2+16\pi c_3^2-e^2}{4} = \frac{\mu^2 m^2-e^2}{4}, \tag{54}$$

где опять введены обозначения

$$c_3 = \alpha m \quad \text{и} \quad \mu = \sqrt{1+16\pi\alpha^2}.$$

Как и в случае нейтральной материи, постоянная α определяется отношением соответствующих c_3 и m величин $m_3(r_*)$ и $m_1(r_*)$ на границе $r=r_*$, причем, как и прежде, $m_1(r_*)=m$ и $m_3(r_*)=c_3$.

Метрические коэффициенты e^λ и e^Φ получаются с учетом (53) из (49) и (51):

$$e^{\frac{\lambda}{2}} = \left(1-\frac{\mu^2 m^2-e^2}{4r^2}\right)e^{-\frac{\nu}{2}}, \tag{55}$$

$$e^{\Phi} = \left(\frac{r-\frac{\sqrt{\mu^2 m^2-e^2}}{2}}{r+\frac{\sqrt{\mu^2 m^2-e^2}}{2}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sqrt{\frac{\mu^2 m^2-e^2}{m^2}}}}, \tag{56}$$

Получим теперь аналог формулы (32) в случае заряженной материи. Запишем для этого сумму соответствующих (41) и (43) уравнений внутри конфигурации. Она легко приводится к виду (18). Опять интегрируем от $r=0$ до границы $r=r_*$ и из сшивки с внешним решением для $exp\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)$

получаем

$$c_2 = 8\pi\int_0^{r_3} Pr^3 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}} dr,$$

откуда

$$m^2 = \frac{1}{\mu^2}\left[e^2 + 32\pi\int_0^{r_3} Pr^3 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}} dr\right]. \tag{57}$$

Решение (53), (55) и (56) содержит все предельные случаи. Полагая e=0, получим решение (29) - (31). Приняв μ=1 (α=0), мы получим решение Райснера - Нордстрема, которое при e=0, естественно перейдет в решение Шварцшильда в изотропных координатах. При этом для квадрата массы получим выражение

$$m^2 = 32\pi\int_0^{r_3} Pr^3 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}} dr, \tag{58}$$

ранее полученное в [2].

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры теоретической физики ЕГУ за полезные обсуждения настоящей работы.

Ереванский государственный университет, Армения

STATIC SPHERICALLY - SYMMETRIC GRAVITATION FIELD IN THE THEORY OF KALUZA - KLEIN

R.AVAKIAN, E.CHUBARIAN

In the frame of Kaluza - Klein theory for static spherically-symmetric distribution of neutral and charged matter the external solution for gravitational field are obtained. It is shown, that the mass of body connected to an integral over the pressure of gravitating matter.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Th.Kaluza,* 1921, Sitzungsberg. Press Akad. Wiss. Phys. Math. **K1**, 966, Klein O., 1926, Z. Phys., **37**, 895.
2. *Р.М.Авакян,* Астрофизика, **33**, 429, 1990.