АСТРОФИЗИКА

ТОМ 38 АВГУСТ, 1995 ВЫПУСК 3

УДК: 52:531.51

О СИММЕТРИЧНОМ ТЕНЗОРНОМ ПОЛЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Л.Ш.ГРИГОРЯН*, С.ГОТТЛЕБЕР**

Поступила 5 сентября 1995

Принята к печати 25 октября 1995

В инфляционных космологических моделях часто используется система самогравитирующего скалярного поля. В данной работе исследована более сложная система, содержащая дополнительно линейное тензорное поле $\psi_{ik}=\psi_{ki}$ с минимальной связью. Определены пять из шести свободных параметров, входящих в наиболее общее выражение для действия S_ψ этого поля. При этом использовано предположение о том, что в плоском пространстве-времени ψ_{ik} должно быть инвариантным относительно калибровочных преобразований. Найденное S_ψ в частном случае переходит в известное выражение для действия безмассового тензорного поля ψ_{ik}. Вычислен метрический тензор энергии-импульса, определяющий вклад ψ_{ik} в уравнения Эйнштейна. Выведены также уравнения движения ψ_{ik} в искривленном пространстве-времени.

1. *Введение*. Сценарий раздувающейся Вселенной представляется одним из наиболее впечатляющих достижений космологии за последние пятнадцать лет. В его рамках предлагается решение проблемы плоскостности (евклидовости) пространства, проблемы однородности и изотропности Вселенной и ряда других космологических проблем.

В своем первоначальном самосогласованном варианте [1] предполагалось, что раздувание Вселенной (инфляция) связано с учетом вакуумных поляризационных эффектов в уравнениях Эйнштейна. В последующих различных моделях предполагалось, что инфляция обусловлена когерентным скалярным полем с заданным потенциалом взаимодействия. Она может быть обусловлена также наличием в лагранжиане гравитационного поля членов с производными высших порядков. Исследовались также сценарии раздувания в рамках неэйнштейновских вариантов теории

* E-mail: gayane@arminco.com

** E-mail: sgottloeber@aip.de

гравитации. Инфляционная космология бурно развивается. Обзор ее современного состояния можно найти в [2-4].

Согласно инфляционной космологии на ранней стадии эволюции Вселенная находилась в быстро расширяющемся, вакуумоподобном состоянии. Период раздувания завершился распадом (фазовым переходом), в результате которого энергия, запасенная в вакуумоподобном состоянии, перешла в тепловую энергию. В дальнейшем развитие шло согласно стандартной теории горячей Вселенной. При этом начальные возмущения плотности, обусловленные фазовым переходом, оказались затравкой в процессе последующего формирования крупномасштабной структуры Вселенной, и поэтому, в принципе, верифицируемы астрономическими наблюдениями. Например, совместное действие вакуумных поляризационных эффектов и когерентного скалярного поля приводит к спектру начальных возмущений плотности с нарушенной масштабной инвариантностью. Последнее обстоятельство может быть связано с наблюдаемой иерархией масштабов во Вселенной. Соответствующая модель раздувающейся Вселенной описывается следующим простым действием [5]

$$S=-\frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\,d^4x+S_{\text{vac}-\varphi}\,, \tag{1.1}$$

где

$$S_{\text{vac}-\varphi}=\frac{\alpha}{32\pi G}\int R^2\sqrt{-g}\,d^4x+\frac{1}{2}\int(\varphi_{,n}\varphi^{,n}-m^2\varphi^2)\sqrt{-g}\,d^4x\,, \tag{1.2}$$

G - гравитационная постоянная, R - скалярная кривизна пространства-времени, α - положительная постоянная связи, $\varphi_{,n}=\partial\varphi/\partial x^n$ и, наконец, $c=\hbar=1$. Величину m следует интерпретировать как массу кванта скалярного поля φ во вторичном квантованном варианте теории.

Самогравитирующее скалярное поле с действием (1.1), часто используется в инфляционных космологических моделях. В настоящей работе исследована более сложная самогравитирующая система, состоящая из скалярного φ и тензорного ψ_{ik} полей. В этом случае действие системы

$$S=-\frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\,d^4x+S_{\text{vac}-\varphi}+S_{\psi}\,, \tag{1.3}$$

где S_ψ - вклад ψ_{ik}. В п.2 выведено действие тензорного поля. Далее, вычислен метрический тензор энергии-импульса поля ψ_{ik} и выведены его уравнения движения (п.3). Выводы подытожены в п.4. Ряд используемых формул приведен в *Приложении*.

2. *Действие тензорного поля*. Рассмотрим линейное поле ψ_{ik} с минимальной связью. Его действие

$$S_\psi = S_\psi' + S_\psi'' \tag{2.1}$$

определяется выражениями

$$S_\psi' = \int (a_1 u_l u^l + a_2 u_l v^l + a_3 v_l v^l + a_4 \psi_{ik;l}\psi^{ik;l} + a_5 \psi_{ik;l}\psi^{il;k})\sqrt{-g}\, d^4x \tag{2.2}$$

и

$$S_\psi'' = \int (a_6 \psi^2 + a_7 \psi_{ik}\psi^{ik})\sqrt{-g}\, d^4x\ , \tag{2.3}$$

где

$$u_l = \psi^n_{n;l},\ \ v_l = g^{nm}\psi_{ln;m},\ \ \psi = \psi^n_n, \tag{2.4}$$

а ; означает операцию ковариантного дифференцирования по отношению к метрическому тензору g_{ik}. (2.1) является наиболее общим выражением квадратичным по ψ_{ik} и $\psi_{ik;l}$. Например, в [6] приведен частный случай (2.1) с

$$a_1 = -a_4 = -\frac{1}{4},\quad a_2 = -a_5 = \frac{1}{2},$$
$$a_3 = 0,\quad a_6 = -a_7 = -\frac{m_0^2}{4}, \tag{2.5}$$

где m_0 - масса квантов тензорного поля ψ_{ik}. Постоянные $a_1 \div a_7$ априори неизвестны. Для их определения мы воспользуемся следующим предположением:

В плоском пространстве-времени вариация S_ψ должна быть инвариантной относительно преобразования

$$\psi_{ik} \to \psi_{ik} + b_{i;k} + b_{k;i} = \psi^*_{ik}, \tag{2.6}$$

где $b_i(x)$- произвольное векторное поле.
Оно позволяет определить большую часть постоянных. В самом деле,

инвариантность δS_ψ означает, что уравнения движения

$$\frac{\delta S_\psi}{\delta \psi_{ik}} = 0 \tag{2.7}$$

должны быть инвариантными относительно калибровочного преобразования (2.6), и поэтому при

$$\psi_{ik} = b_{i;k} + b_{k;i} \tag{2.8}$$

должны удовлетворяться тождественно. Последнее имеет место только в случае

$$2a_1 + a_2 = a_1 + a_4 = a_2 + a_3 + a_5 = a_6 = a_7 = 0. \tag{2.9}$$

В этом можно убедиться прямой подстановкой (2.8) в (2.7). Следовательно,

$$a_1 = -a_4,\ a_2 = 2a_4,\ a_3 = \beta a_4,\ a_5 = -(2+\beta)a_4,\ a_6 = a_7 = 0, \tag{2.10}$$

где β - произвольная постоянная. Дополнительно должно удовлетворяться условие $a_4 \geq 0$. В обратном случае S_ψ можно сделать отрицательной величиной со сколь угодно большим абсолютным значением достаточно быстрым изменением ψ_{ik} со временем x^0, что противоречило бы принципу наименьшего действия. В этом можно убедиться, рассматривая плоское пространство-время и калибровку

$$\sum_{\sigma=1}^{3} \psi^{\sigma}_{\sigma,0} = 0,\ \psi_{0\sigma} = 0 \tag{2.11}$$

в квазидекартовой системе координат.

После перенормировки $2\sqrt{\alpha_4}\,\psi_{ik} \to \psi_{ik}$ действие (2.1) принимает вид

$$S_\psi = S_\psi^{(0)} + \beta\Delta S_\psi, \tag{2.12}$$

где

$$S_\psi^{(0)} = \int g^{ik}(p^l_{ik}p^n_{ln} - p^l_{in}p^n_{kl})\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{2.13}$$

$$\Delta S_\psi = \frac{1}{4}\int (v_l v^l - \psi_{ik;l}\psi^{il;k})\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{2.14}$$

а

$$p^l_{ik} = \frac{1}{2} g^{ln}(\psi_{nl;k} + \psi_{nk;l} - \psi_{ik;n}). \tag{2.15}$$

Остается доказать обратное, а именно, что из (2.12) следует инвариантность (2.7) относительно преобразования (2.6). С этой целью (2.13) и (2.14) преобразуем к виду

$$S^{(0)}_\psi = \frac{1}{4}\int \psi^{ik}(E_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} E)\sqrt{-g}\, d^4x + \sigma_0 \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_\psi &= \frac{1}{4}\int \psi^l_n(\psi^{nk}_{;lk} - \psi^{nk}_{;kl})\sqrt{-g}\, d^4x + \sigma_1 \\ &= \frac{1}{4}\int (\psi^l_n \psi^{nk} R_{lk} + \psi^{lk}\psi^{nm} R_{lnmk})\sqrt{-g}\, d^4x. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Здесь и далее σ_0 , σ_1- слагаемые, которые можно опустить, поскольку они являются интегралами по бесконечно удаленной гиперповерхности, охватывающей пространство-время, и при варьировании исчезают. Наконец,

$$E_{ik}(\psi_{rs}) = 2(p^l_{ik;l} - p^l_{il;k}) = \psi^n_{i;kn} + \psi^n_{k;in} - \psi_{;ik} - \Box\psi_{ik}, \; E = E^n_n, \tag{2.18}$$

$\Box$ - оператор Д'Аламбера. Из (2.18) следует, что в плоском пространстве-времени имеют место равенства

$$E_{ik}(\psi^*_{rs}) = E_{ik}(\psi_{rs}), \qquad E^n_{k;n} = \frac{1}{2} E_{,k} \tag{2.19}$$

и по этой причине

$$S_{\psi^*} = S_\psi + \frac{1}{2}\int [b_l(E^{lk} - \frac{1}{2} g^{lk} E)]_{;k}\sqrt{-g}\, d^4x = S + \sigma_2 \tag{2.20}$$

откуда следует

$$\delta S_{\psi^*} = \delta S_\psi . \tag{2.21}$$

Таким образом, в плоском пространстве-времени S_ψ инвариантно относительно преобразования (2.6). В случае искривленного пространства-времени равенства (2.19) не имеют место, и поэтому калибровочная симметрия нарушена.

В частном случае β=0 и $\alpha_4 = 1/4$ (2.10) переходит в (2.5) с m_0=0 и поэтому (2.12) совпадает с действием для безмассового тензорного поля ψ_{ik} приведенным в [6].

3. Уравнения поля. Наряду с (2.13) и (2.16) можно вывести еще одну полезную формулу для $S_{\psi}^{(0)}$. С этой целью введем тензор

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \varepsilon\psi_{ik}, \tag{3.1}$$

где ε мало настолько, что

$$\gamma = det\,\gamma_{ik} \neq 0 \tag{3.2}$$

и поэтому обратный тензор γ^{ik} существует:

$$\gamma^{in}\gamma_{nk} = \delta^{i}_{k}\,. \tag{3.3}$$

Аналогично тому как это сделано в (П.2)-(П.4) (см. Приложение) определим символы Кристоффеля

$$\check{\Gamma}^{i}_{kl} = \frac{1}{2}\gamma^{in}(\gamma_{nk,l} + \gamma_{nl,k} - \gamma_{kl,n}) \tag{3.4}$$

и тензоры

$$\check{R}^{i}_{kln} = \check{\Gamma}^{i}_{kn,l} - \check{\Gamma}^{i}_{kl,n} + \check{\Gamma}^{i}_{ml}\check{\Gamma}^{m}_{kn} - \check{\Gamma}^{i}_{mn}\check{\Gamma}^{m}_{kl}\,, \qquad \check{R}_{kn} = \check{R}^{i}_{kin}. \tag{3.5}$$

Заметим, что γ_{ik} не является метрическим тензором, и поэтому индексы всех тензоров опускаются и подымаются только с помощью g_{ik} и g^{ik}. Исключение составляет тезор γ^{ik}, определяемый равенством (3.3).

Используя γ_{ik}, (2.15) можно представить в виде

$$P^{i}_{kl} = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\Gamma}^{i}_{kl}, \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.6}$$

где

$$\tilde{\Gamma}^{i}_{kl} = \frac{1}{2}\gamma^{in}(\gamma_{nk;l} + \gamma_{nl;k} - \gamma_{kl;n}) = \frac{\varepsilon}{2}\gamma^{in}(\psi_{nk;l} + \psi_{nl;k} - \psi_{kl;n}). \tag{3.7}$$

Подставив

$$g_{ik}(2) = \gamma_{ik}\,, g_{ik}(1) = g_{ik} \tag{3.8}$$

в (П.8) (см. *Приложение*), для (3.7) находим

$$\tilde{\Gamma}^l_{kl} = \check{\Gamma}^l_{kl} - \Gamma^l_{kl}, \tag{3.9}$$

где Γ^l_{kl} - символы Кристоффеля, соответствующие метрическому тензору g_{ik}. Из (3.6) в свою очередь следует равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Q^{(\varepsilon)}_\psi = S^{(0)}_\psi, \tag{3.10}$$

в котором

$$Q^{(\varepsilon)}_\psi = \frac{1}{\varepsilon^2}\int \gamma^{ik}(\tilde{\Gamma}^l_{ik}\tilde{\Gamma}^n_{ln} - \tilde{\Gamma}^l_{in}\tilde{\Gamma}^n_{kl})\sqrt{-\gamma}\, d^4x. \tag{3.11}$$

Снова подставив (3.8), на этот раз в (П.9) и (П.10), придем к формулам

$$\check{R}_{ik} - R_{ik} = \tilde{\Gamma}^l_{ik;l} - \tilde{\Gamma}^l_{il;k} + \tilde{\Gamma}^l_{ik}\tilde{\Gamma}^n_{ln} - \tilde{\Gamma}^l_{in}\tilde{\Gamma}^n_{kl} \tag{3.12}$$

$$\gamma^{ik}(\check{R}_{ik} - R_{ik}) = \gamma^{ik}(\tilde{\Gamma}^l_{in}\tilde{\Gamma}^n_{kl} - \tilde{\Gamma}^l_{ik}\tilde{\Gamma}^n_{ln}) + [\gamma^{ik}\tilde{\Gamma}^l_{ik} - \gamma^{il}\tilde{\Gamma}^k_{ik}\sqrt{-\gamma}]_{,l} / \sqrt{-\gamma}, \tag{3.13}$$

и поэтому

$$Q^{(\varepsilon)}_\psi = \frac{1}{\varepsilon^2}\int \gamma^{ik}(R_{ik} - \check{R}_{ik})\sqrt{-\gamma}\, d^4x \tag{3.14}$$

с точностью до не существенного интеграла от 4-дивергенции. Таким образом, в (2.12) вместо $S_\psi^{(0)}$ можно пользоваться выражением (3.14):

$$S_\psi = Q^{(\varepsilon)}_\psi + \beta\Delta S_\psi, \tag{3.15}$$

полагая $\varepsilon\to 0$ в конце расчетов. Это обстоятельство упрощает вывод уравнений поля.

Полное действие самогравитирующей системы, состоящей из скалярного φ и тензорного ψ_{ik} полей с учетом R^2 - члена определяется выражением (1.3). Из условия его экстремальности по отношению к вариациям g_{ik} (при фиксированных φ и ψ_{ik}) приходим к уравнениям гравитационного поля

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \alpha H_{ik} = 8\pi G(T_{ik} + \Pi_{ik}), \tag{3.16}$$

где

$$H_{ik} = R_{;ik} - g_{ik}\Box R - RR_{ik} + \frac{1}{4}g_{ik}R^2, \tag{3.17}$$

а

$$T_{ik} = \varphi_{,i}\varphi_{,k} + \frac{1}{2}g_{ik}(m^2\varphi^2 - \varphi_{,n}\varphi^{,n}) \tag{3.18}$$

- тензор энергии-импульса скалярного поля. Метрический тензор энергии-импульса Π_{ik} определяется равенством

$$\delta_g S_\psi = \frac{1}{2}\int \Pi_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{3.19}$$

в котором δ_g - операция варьирования по g_{ik} при фиксированном ψ_{ik}. Согласно (3.1) и (3.3)

$$\delta_g\gamma_{ik} = \delta g_{ik}, \quad \delta_g\gamma^{ik} = -\gamma^{in}\gamma^{km}\delta g_{nm}. \tag{3.20}$$

Подставив (3.14) и (2.17) в (3.15), находим

$$\Pi_{ik} = \Pi_{ik}^{(\varepsilon)} + \beta\Delta\Pi_{ik}, \tag{3.21}$$

где

$$\Pi_{ik}^{(\varepsilon)} = \frac{2}{\varepsilon^2}\left(A_{ik} + e_i^n e_k^m\beta_{nm}\sqrt{\frac{\gamma}{g}}\right), \tag{3.22}$$

а

$$2\int\Delta\Pi_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x = \delta_g\int(\psi_n^i\psi^{nk}R_{ik} + \psi^{ik}\psi^{nm}R_{inmk})\sqrt{-g}\,d^4x. \tag{3.23}$$

В (3.22) тензор A_{ik} определяется соотношением

$$\int A_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x = \delta_g^*\int\gamma^{ik}(R_{ik} - \check{R}_{ik})\sqrt{-\gamma}\,d^4x, \tag{3.24}$$

где δ_g^* - операция варьирования по g_{ik} при фиксированном γ_{ik}, $e_i^n = g_{im}\gamma^{nm}$, а

$$B_{ik} = R_{ik} - \check{R}_{ik} - \frac{1}{2}\gamma_{ik}\gamma^{nm}(R_{nm} - \check{R}_{nm}). \tag{3.25}$$

Вариация в правой части (3.24) вычислена в [7]. Подставив результат соответствующих расчетов, получим $A_{nm} = g_{nl}g_{mk}A^{lk}$, где

$$A^{lk} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\gamma}{g}}\left(g^{lk}\gamma^{nm} + g^{nm}\gamma^{lk} - g^{ln}\gamma^{km} - g^{kn}\gamma^{lm}\right)\right]_{;nm}. \tag{3.26}$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}A_{ik} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}e_i^n e_k^m B_{nm}\sqrt{\frac{\gamma}{g}} = \frac{1}{2}E_{ik} - \frac{1}{4}g_{ik}E \tag{3.27}$$

(использованы (2.18), (3.6) и (3.12)), и поэтому предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Pi_{ik}^{(\varepsilon)} = \Pi_{ik}^{0} \tag{3.28}$$

существует. Он громоздкий, и поэтому мы его не приводим. Перейдем к $\Delta\Pi_{ik}$. Из (П.6)-(П.8), имеем

$$\begin{aligned} \delta R^{l}_{kln} &= (\delta\Gamma^{l}_{kn})_{;l} - (\delta\Gamma^{l}_{kl})_{;n} \\ \delta\Gamma^{l}_{kl} &= \frac{1}{2}g^{ln}\left[(\delta g_{nk})_{;l} + (\delta g_{nl})_{;k} - (\delta g_{kl})_{;n}\right]. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Воспользовавшись этими формулами, находим

$$2\Delta\Pi_{ik} = Y_{ik} + Z_{ik} - \frac{1}{6}g_{ik}Z, \tag{3.30}$$

где

$$\begin{aligned} Y_{ik} &= \left[\psi^{n}_{(i}\psi^{m}_{k)} - \psi_{ik}\psi^{nm} - \delta^{n}_{(i}\psi_{k)s}\psi^{sm} + \frac{1}{2}g_{ik}\,\psi^{n}_{s}\psi^{sm} + \frac{1}{2}\psi_{is}\psi^{s}_{k}\,g^{nm}\right]_{;nm} \\ Z_{ik} &= \psi^{n}_{i}\psi^{m}_{k}\,R_{nm} + 2\psi^{m}_{n}\psi^{n}_{(i}\,R_{k)m} + 3\psi^{sn}\psi^{m}_{(i}\,R_{k)snm}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

а

$$f_{(ik)} = \frac{1}{2}(f_{ik} + f_{ki}), \quad Z = Z^n_n. \tag{3.32}$$

Таким образом, метрический тензор энергии-импульса (3.21) определяется выражениями (3.22) и (3.30).

Теперь обратимся к выводу уравнений движения для ψ_{ik}. Фиксируя g_{ik}, φ и варьируя по ψ_{ik}, находим

$$\delta_\psi \gamma^{ik} = -\varepsilon \gamma^{in} \gamma^{km} \delta\psi_{nm} = -\varepsilon\, e^i_n\, e^k_m\, \delta\psi^{nm}. \tag{3.33}$$

С учетом этого обстоятельства из условия экстремальности (3.15) находим

$$\frac{2}{\varepsilon} e^n_i e^m_k B_{nm} \sqrt{\frac{\gamma}{g}} = \beta\, M_{ik}, \tag{3.34}$$

где

$$M_{ik} = \psi^{nm} R_{inmk} + \psi^n_{(i} R_{k)n}, \quad M^n_n = 0. \tag{3.35}$$

Перейдя к пределу $\varepsilon \to 0$ и подставив (3.27), придем к уравнениям движения

$$E_{ik} + \beta\, M_{ik} = 0. \tag{3.36}$$

Они определяют процесс распространения линейного безмассового поля ψ_{ik} в искривленном пространстве-времени. В случае плоского пространства-времени (3.36) сводится к волновому уравнению

$$\Box \psi_{ik} = 0 \tag{3.37}$$

калибровочным преобразованием (2.6), удовлетворяющим условиям

$$\psi^n_{i;n} = \psi = 0. \tag{3.38}$$

Им всегда можно удовлетворить подходящим выбором $b_i(x)$ [9].

Решая (3.16), (3.36) совместно с уравнением движения

$$(\Box + m^2)\varphi = 0 \tag{3.39}$$

скалярного поля, можно определить функции $g_{ik}(x)$, $\psi_{ik}(x)$ и $\varphi(x)$.

4. ***Выводы***. В работе исследована самогравитирующая система, состоящая из скалярного поля φ и линейного тензорного поля ψ_{ik} с

минимальной связью. Учтены вакуумные поляризационные эффекты в виде R^2 - члена в лагранжиане гравитационного поля. Действие тензорного поля определяется выражением (2.12), где β - произвольная постоянная. Это наиболее общее выражение, удовлетворяющее двум условиям: (а) S_ψ квадратично по ψ_{ik} и $\psi_{ik;l}$ и (б) в плоском пространстве-времени вариация S_ψ инвариантна относительно калибровочного преобразования $\psi_{ik} \to \psi_{ik} + b_{i;k} + b_{k;i}$, где $b_i(x)$ - произвольное векторное поле (в искривленном пространстве-времени эта симметрия нарушена). В частном случае $\beta = 0$ (2.12) переходит в действие безмассового тензорного поля ψ_{ik}, приведенного в [6].

Введением

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \varepsilon\psi_{ik}, \quad \varepsilon \to 0$$

$S_\psi^{(0)}$ преобразовано к виду (3.10), что упрощает вывод уравнений поля. Вычислен метрический тензор энергии-импульса (3.21), определяющий вклад ψ_{ik} в уравнения Эйнштейна. Он, в свою очередь, определяется выражениями (3.22) и (3.30). Выведены уравнения движения (3.36) поля ψ_{ik} в искривленном пространстве-времени. В плоском пространстве-времени калибровочным преобразованием они сводятся к волновому уравнению (3.37).

Решая уравнения поля (3.16), (3.36) и (3.39), можно определить эволюцию самогравитирующей системы, состоящей из скалярного φ и тензорного ψ_{ik} полей. Ее можно использовать в сценариях раздувающейся Вселенной вместо часто используемой более простой системы, состоящей из самогравитирующего скалярного поля φ [2-4].

Приложение

Допустим, g_{ik} (1) и g_{ik} (2) - произвольные симметричные тензорные поля с детерминантами, отличными от нуля:

$$g_{ik}(\mu) = g_{ki}(\mu), \quad \det g_{ik}(\mu) \neq 0, \quad \mu = 1,2. \qquad (\text{П}.1)$$

Поставим им в соответствие символы Кристоффеля

$$\Gamma^l_{kl}(\mu)=\frac{1}{2}g^{ln}(\mu)\left[g_{nk,l}(\mu)+g_{nl,k}(\mu)-g_{kl,n}(\mu)\right], \tag{П.2}$$

где $g^{ln}(\mu)$ - тензор, обратный тензору $g_{ln}(\mu)$:

$$g^{ln}(\mu)\,g_{nk}(\mu)=\delta^l_k, \tag{П.3}$$

δ^l_k - символы Кронекера. Используя $\Gamma^l_{kl}(\mu)$, введем в рассмотрение тензор Римана

$$R^l_{kln}(\mu)=\Gamma^l_{kn,l}(\mu)-\Gamma^l_{kl,n}(\mu)+\Gamma^l_{ml}(\mu)\Gamma^m_{kn}(\mu)-\Gamma^l_{mn}(\mu)\Gamma^m_{kl}(\mu) \tag{П.4}$$

и операции ковариантного дифференцирования по g_{ik} (1) и g_{ik} (2), которые будем обозначать символами I и II, соответственно. Например, для произвольного смешанного тензора q^l_k второго ранга

$$q^l_{k|l}=q^l_{k,l}+\Gamma^l_{nl}(1)\,q^n_k-\Gamma^n_{kl}(1)\,q^l_n. \tag{П.5}$$

Имеет место равенство [8]

$$R^l_{kln}(2)-R^l_{kln}(1)=\overline{R}^l_{kln}, \tag{П.6}$$

где тензор

$$\overline{R}^l_{kln}=\overline{\Gamma}^l_{kn|l}-\overline{\Gamma}^l_{kl|n}+\overline{\Gamma}^l_{ml}\overline{\Gamma}^m_{kn}-\overline{\Gamma}^l_{mn}\overline{\Gamma}^m_{kl}. \tag{П.7}$$

получается из $R^l_{kln}(\mu)$ заменой $\Gamma^l_{kl}(\mu)$ и операции "," на тензор $\overline{\Gamma}^l_{kl}$ и операцию ковариантного дифференцирования I, соответственно. При этом

$$\overline{\Gamma}^l_{kl}=\frac{1}{2}g^{ln}(2)\left[g_{nk|l}(2)+g_{nl|k}(2)-g_{kl|n}(2)\right]=\Gamma^l_{kl}(2)-\Gamma^l_{kl}(1). \tag{П.8}$$

Из (П.6) следует равенство

$$R_{kn}(2)-R_{kn}(1)=\overline{R}_{kn}, \tag{П.9}$$

где $f_{kn}=f^l_{kln}$. Используя (П.7), (П.9), можно доказать полезную формулу

$$\begin{aligned} &g^{kn}(2)[R_{kn}(2)-R_{kn}(1)]=\\ &=g^{kn}(2)(\overline{\Gamma}^l_{km}\overline{\Gamma}^m_{nl}-\overline{\Gamma}^l_{kn}\overline{\Gamma}^m_{lm})+[g^{ik}(2)\overline{\Gamma}^n_{ik}-g^{in}(2)\overline{\Gamma}^k_{ik}]_{|\mathrm{II}\,n}. \end{aligned} \tag{П.10}$$

В случае $g_{ik}(1) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ доказательство (П.10) приведено в [9]. Частный случай (П.10) с $g_{ik}(2) = g_{ik}$ и плоской фоновой метрикой $g_{ik}(1)$ используется в биметрической формулировке ОТО [10-13] (см. также [14,15]).

Благодарность. Один из авторов (Л.Ш.Г) признателен Deutshe Forschungsgemeinschaft (DFG) за финансирование поездки и работы в Потсдаме. Работа Л.Ш.Г. частично финансировалась Международным Научным Фондом (грант RY 6000).

Институт прикладных проблем физики, Ереван, Армения
Ереванский государственный университет, Армения
Институт астрофизики, Потсдам, Германия

SYMMETRIC TENSOR FIELD IN THE RELATIVISTIC GRAVITY

L.SH.GRIGORIAN, S.GOTTLÖBER

The system of self-gravitating scalar field is widely used in the inflationary cosmological models. We discuss a more complicated system with an additional linear and minimally coupled tensor field $\Psi_{ik}=\Psi_{ki}$. Five from six free parameters in the most general expression for the action S_Ψ of Ψ_{ik} are determined using the following ansatz: tensor field Ψ_{ik} is invariant under the gauge transformations in flat space-time. In particular case the expression found for S_Ψ transforms to the known action of the massless tensor field Ψ_{ik}.

The energy-momentum tensor determining the contribution of Ψ_{ik} in Einstein equations is calculated. The equations describing the propagation of Ψ_{ik} in the curved space-time are also derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.A.Starobinsky,* Phys.Lett., B91, 99, 1980.
2. *А.Д.Линде,* Физика элементарных частиц и инфляционная космология, Наука, М., 1990.
3. *S.Gottlöber, V.Müller, H.-J. Schmidt, A. A. Starobinsky,* Int. Journ. Mod. Phys., D1, 257, 1992.
4. *K.Sato* (Ed.), Evolution of the Universe and its Observational Quest, Universal Academy Press, Inc. and Yamada Science Foundation, 1994.
5. *S.Gottlöber, V.Müller, A.A.Starobinsky, Phys. Rev.*, D43, 2510, 1991.
6. *Б.С.Девитт,* Динамическая теория групп и полей, Наука, М., 1987.
7. *Н.А.Черников,* Вариационный метод Гильберта и тензор Папапетру. Препр. ОИЯИ, П2-87-683, Дубна, 1987.
8. *Л.П.Эйзенхарт,* Риманова геометрия, ИЛ, М., 1948.
9. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц,* Теория поля, Наука, М., 1973.
10. *N.Rosen,* The III International School of Cosmology and Gravitation, Erice, 8-20 May, 1974, pp. 2-40.
11. *L.P.Grischuk, A.N.Petrov, A.D.Popova,* Commun. Math. Phys., 94, 379, 1984.
12. *Я.Б.Зельдович, Л.П.Грищук,* Успехи физ. наук, 149, 695, 1986.
13. *А.А.Логунов,* Лекции по теории относительности и гравитации, Наука, М., 1987.
14. *Л.Ш.Григорян,* Астрофизика, 30, 380, 1989.
15. *R.M.Avakian, L.Sh.Grigorian,* Astrophys. Space Sci., 146, 183, 1988.