УДК: 52.64

О МЕТОДЕ СДВИГА АЛЬБЕДО

Н.Б.ЕНГИБАРЯН, Б.Н.ЕНГИБАРЯН

Поступила 17 октября 1995

Принята к печати 15 ноября 1995

В работе предлагается новая трактовка к Методу сдвига альbedo (МСА) теории переноса излучения, основанная на построении трехфакторного разложения исходного оператора интегрального уравнения переноса в однородном полупространстве. Такой подход упрощает МСА, одновременно значительно расширяя его возможности и границы применимости.

1. *Введение.* В теории переноса излучения одним из основных параметров, описывающих взаимодействие излучения с веществом, является альbedo рассеяния λ : $0 < \lambda \leq 1$. Оно представляет собой вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния (см. [1,2]). Задачи переноса в полупространстве или в слое большой толщины наиболее сложны в консервативном случае (КС) $\lambda=1$ и почти консервативном случае (ПКС), когда $\lambda < 1$ и $1-\lambda \ll 1$. В этих случаях для удовлетворительного расчета поля излучения приходится учитывать большое число (в среднем) рассеяний, испытываемых квантом до выхода из среды или его гибели.

За последние годы в работах В.В.Иванова, Г.В.Райбики, Г.Домке и др. развивался новый метод решения задач переноса в однородном полупространстве - Метод сдвига альbedo (МСА) (см. [3-5]). Этот красивый метод позволяет с помощью простой процедуры преобразовать исходную задачу к новой "псевдозадаче" с меньшим значением альbedo. Такое упрощение может оказаться существенным в вопросах аналитического и численного решения уравнения переноса. Большим достоинством МСА является то, что он сводит КС к диссипативному случаю (ДС) $\lambda < 1$.

До сих пор МСА развивался применительно к некоторым задачам когерентного-изотропного и анизотропного рассеяния, которые описываются скалярным интегральным уравнением Винера-Хопфа, ядро которого экспоненциально убывает в ∞ .

В настоящей работе предлагается новая трактовка МСА, основанная на построении специального трехфакторного разложения исходного интегрального оператора. Такой подход значительно расширяет возможности и границы применимости МСА, упрощает его в логическом и техническом отношениях. Этот подход, наряду с [3-5], примыкает к работам авторов [6,7] и к ряду известных методов теории интегральных уравнений Винера-Хопфа (метод специальной факторизации, метод уравнения Амбардзюмяна, метод дискретных ординат Чандрасекара и др.)

2. *Объект исследования.* Ряд линейных и нелинейных задач переноса излучения в однородном полупространстве сводится к интегральному уравнению Винера-Хопфа

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^{\infty} K(\tau - t) S(t) dt. \quad (1)$$

Здесь g - известная функция первичных (внешних и внутренних) источников, S - искомая функция источников, ядро K - четная функция и является суперпозицией экспонент:

$$K(\tau) = \int_a^b e^{-|\tau|p} G(p) dp, \quad G \geq 0, \quad \lambda = 2 \int_a^b \frac{1}{p} G(p) dp \leq 1, \quad (2)$$

$$0 \leq a < b \leq +\infty.$$

Число λ и есть альbedo рассеяния.

К числу указанных задач, представляющих большую важность в теоретической астрофизике, относятся:

а) Основное интегральное уравнение переноса. Тогда

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} E_1(|\tau|) = \frac{\lambda}{2} \int_1^{\infty} e^{-|\tau|p} \frac{dp}{p}, \quad G(p) = \frac{\lambda}{2p}. \quad (3)$$

б) Некоторые задачи когерентного анизотропного рассеяния (см. [1,3]):

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_1^{\infty} e^{-|\tau|p} \Psi\left(\frac{1}{p}\right) \frac{dp}{p}, \quad (4)$$

где ψ - четный полином с неотрицательными коэффициентами. Ясно, что (3) является частным случаем (4).

в) Изотропное рассеяние в спектральной линии при полном перераспределении по частотам (ППЧ) (см. [2,8]):

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)|\tau|] dx, \quad (5)$$

где $\alpha(x) > 0$ - контур коэффициента поглощения, x - безразмерная частота

кванта, $A = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx \right]^{-1}$ - нормирующий множитель. Ядро (5) допускает

представление (2) (см. [2,8]).

г) Уравнениям (1), (2) описываются также некоторые другие задачи переноса (ЗП), в том числе ЗП с учетом рефракции [9], с учетом энергетических потерь между последовательными рассеяниями [10] и др., а также ряд важных задач кинетической теории газов, в том числе - задача Крамерса о диффузном скольжении (см. [11]). В последнем случае имеем

$$K(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1} \exp\left(-t^2 - \frac{\tau}{t}\right) dt. \quad (6)$$

Ядро Велландера (6) консервативное ($\lambda=1$).

3. *Основное разложение.* Вместо (2) мы используем несколько иную запись ядра K в виде интеграла Стильтьеса:

$$K(\tau) = \int_a^b e^{-|\tau|p} d\sigma(p), \quad 0 \leq a < b \leq +\infty, \quad (7)$$

где σ - неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$\lambda \equiv 2 \int_a^b \frac{1}{p} d\sigma(p) \leq 1. \quad (8)$$

Чтобы из (2) перейти к (7), достаточно взять

$$G(p) dp = d\sigma(p), \quad \sigma(p) = \int_a^p G(p') dp'. \quad (9)$$

Применение представления (7) обусловлено его гибкостью и большей общностью по сравнению с (2): функция σ , фигурирующая в (7), может иметь разрывы (скачки), которые весьма удобны при применении Метода дискретных ординат (МДО) Чандрасекара и других методов дискретизации интеграла (2). При этом мы используем следующее свойство интеграла

Стильгесса: пусть σ имеет вид $\sigma(p) = \sigma_0(p) + \sum_{m=1}^n C_m \theta(p - S_m)$, где σ_0 -

непрерывно дифференцируемая функция: $\sigma'_0(p) = G_0(p)$, θ - функция Хевисайда единичного скачка:

$$\theta(p) = 0 \text{ при } p \leq 0; = 1 \text{ при } p > 0.$$

Если функция f непрерывна, то при $s_1, \dots, s_n \in (a; b)$,

$$\int_a^b f(p) d\sigma(p) = \int_a^b G_0(p) dp + \sum_{m=1}^n C_m f(S_m). \quad (10)$$

Функцию σ мы будем считать непрерывной слева.

Если в представлении (7) (или (2)) $Q > 0$, то $K(\tau)$ экспоненциально убывает при $|\tau| \rightarrow +\infty$ (убывает быстрее $e^{-a'|\tau|}$, $\forall a' < a$). Так обстоит дело в случае ядер (3) и (4), в случае которых $a=1$. Если же $a=0$, то $K(\tau)$ убывает медленнее экспоненты.

Перепишем уравнение (1) в оперативной форме

$$(I - \hat{K})S = g, \quad (11)$$

где I - единичный оператор, а $\hat{K}$ - интегральный оператор Винера-Хопфа (ИОВХ):

$$(\hat{K}S)(\tau) = \int_0^{\infty} K(\tau-t)S(t) dt. \quad (12)$$

Функцию S мы будем считать либо интегрируемой ($S \in L_1^+ = L_1(0; \infty)$), либо ограниченной ($S \in M^*$), либо неограниченной в ∞ функцией специального вида (в случае рассмотрения проблемы Милна). Во всех случаях справедлива следующая оценка для нормы оператора $\hat{K}$:

$$\|\hat{K}\| \leq \lambda. \quad (13)$$

Эта оценка показывает, что в ДС $\lambda < 1$ оператор $\hat{K}$ сжимающий и $I - \hat{K}$ обратим. В КС $I - \hat{K}$ оказывается необратимым.

Введем следующие простейшие вольтерровы ИОВХ:

$$\hat{U}_+ f(\tau) = \alpha \int_0^\tau e^{-\beta(\tau-t)} f(t) dt, \quad \hat{U}_- f(\tau) = \alpha \int_\tau^\infty e^{-\beta(t-\tau)} f(t) dt, \quad (14)$$

где $\alpha, \beta > 0$.

В основе метода настоящей работы лежит следующее разложение:

$$I - \hat{K} = (I - \hat{U}_-)(I - \hat{T})(I - \hat{U}_+), \quad (15)$$

где $\hat{T}$ - оператор вида (12) с ядром

$$T(\tau) = \int_a^b e^{-\tau|p|} h(p) d\sigma(p). \quad (16)$$

Здесь $h(p)$ непрерывная ограниченная функция, возможно - знакопеременная. Разложение (15) проще всего построить, используя преобразование Фурье (ПФ).

Символом оператора $I - \hat{K}$, где $\hat{K}$ - ИОВХ, называется функция $1 - \bar{K}(s)$, где $\bar{K}$ - ПФ от ядра K :

$$\bar{K}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{i\tau s} d\tau, \quad -\infty < s < +\infty.$$

Нетрудно получить следующие выражения для ПФ от ядер K и T , заданных посредством (7) и (16) соответственно:

$$\bar{K}(s) = \int_a^b \frac{2p}{p^2+s^2} d\sigma(p), \quad \bar{T}(s) = \int_a^b \frac{2p}{p^2+s^2} h(p) d\sigma(p).$$

Символами же операторов $I - \hat{U}_\pm$ служат функции $1 - \frac{\alpha}{\beta \mp is}$.

В [12] показано, что если произведение нескольких ИОВХ является ИОВХ (что не всегда так), то символ произведения равен произведению символов сомножителей. Используя это правило и перейдя в (15) к символам, мы приходим к следующему равенству, эквивалентному (15):

$$1 - \int_a^b \frac{2p}{p^2+s^2} d\sigma(p) = \frac{(\beta - \alpha)^2 + s^2}{\beta^2 + s^2} \left[1 - \int_a^b \frac{2p}{p^2+s^2} h(p) d\sigma(p) \right]. \quad (17)$$

4. *Характеристическое уравнение.* Для построения разложения (17) нам нужно определить числа α , β и функцию h . Как и в работах [3-5] по МСА, мы воспользуемся следующим характеристическим уравнением, хорошо известным в теории переноса:

$$F(\gamma) = \int_a^b \frac{2p}{p^2 - \gamma^2} d\sigma(p) = 1. \quad (18)$$

Ниже мы вкратце остановимся на вопросе разрешимости (18). В КС из (8) следует, что $\gamma=0$ удовлетворяет уравнению (18). Рассмотрим теперь ДС. Предположим сначала, что $a>0$. В интервале $[0; a)$ функция F обладает следующими свойствами: она непрерывна и монотонно возрастает, причем $F(0)=\lambda<1$. Поэтому существует предел

$$\lambda_0 = \lim_{\gamma \rightarrow a-} F(\gamma) \leq +\infty. \quad (19)$$

Для существования решения уравнения (18) нужно, чтобы

$$1 \leq \lambda_0 (\leq +\infty). \quad (20)$$

Если $\lambda_0 > 1$, то $\gamma < a$. Если же $\lambda_0 = 1$, то $\gamma = a$.

Уравнение (18) может иметь также решения $\gamma > a$.

В ДС, при $\alpha=0$, характеристическое уравнение (18) может иметь или не иметь решение $\gamma \geq 0$ в зависимости от конкретных свойств ядра K .

В дальнейшем под γ будем подразумевать наименьшее неотрицательное решение (18).

5. *Построение разложения (17)*. Пусть (18) обладает решением γ . Левую часть (17) можно преобразовать следующим образом:

$$1 - \bar{K}(s) = \int_a^b \left[\frac{1}{p^2 - \gamma^2} - \frac{1}{p^2 - s^2} \right] 2p \, d\sigma(p) =$$

$$= \frac{s^2 + \gamma^2}{s^2 + \beta^2} \left[1 - \int_a^b \frac{2p}{p^2 + s^2} h(p) \, d\sigma(p) \right], \beta > 0. \quad (21)$$

Мы пришли к разложению (17), где

$$\alpha = \beta - \gamma \quad (22)$$

$$h(p) = \frac{p^2 - \beta^2}{p^2 - \gamma^2}. \quad (23)$$

Для абсолютной сходимости $\forall s$ интеграла внутри квадратных скобок в правой части (21) нужно, чтобы сходилась интеграл

$$\int_a^b \frac{2}{p|p^2 - \gamma^2|} \, d\sigma(p) < +\infty. \quad (24)$$

В КС, когда $\gamma=0$, это условие означает, что ядро K обладает конечным моментом второго порядка. Действительно, обозначим через ν_m момент m -го порядка функции K на $(0; \infty)$. Имеем

$$\nu_m = \int_0^{\infty} \tau^m K(\tau) \, d\tau = \int_a^b d\sigma(p) \int_0^{\infty} \tau^m e^{-\tau p} \, d\tau = m! \int_a^b \frac{1}{p^{m+1}} \, d\sigma(p),$$

поэтому конечность числа ν_2 означает выполнение (24) при $\gamma=0$.

В ДС, если $a>0$ и $\gamma \leq a$, то выполнение условия (24) не вызывает сомнения.

Проверим разрешимость характеристического уравнения (18) и выполнение условия (24) в случае физических задач, упомянутых в п.2.

Ясно, что при $a > 0$ экспоненциально убывающее в ∞ ядро K обладает конечными моментами всех порядков. В случаях основного интегрального уравнения переноса и задач когерентного рассеяния, когда ядро K имеет вид (4), справедливо легко проверяемое равенство $F(1-) = +\infty$. Тогда уравнение (18) имеет решение $\gamma < a$ и выполняется условие (24).

В случае ППЧ (5) K не обладает не только вторым, но и первым конечным моментом. Действительно, из (5) имеем

$$v_1 = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) dx \int_0^{\infty} \tau E_1[\alpha(x)\tau] d\tau = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} d\tau = +\infty.$$

Вследствие такого медленного убывания ядра K при ППЧ невозможно прямое применение МСА. Тем не менее, в п.9, мы укажем на одну возможность применения МСА в случае ППЧ.

Рассмотрим теперь ядро (6) задачи Крамерса. Тогда $a=0$ и K убывает медленнее экспоненты, тем не менее K обладает конечными моментами всех порядков и существует разложение (15).

6. *Выбор значения β .* Под нашим распоряжением имеется, как и в работе [3], выбор значения свободного параметра $\beta > 0$. Успех применения МСА во многом зависит от тех критериев, исходя из которых выбирается β . Мы будем исходить из следующего основного требования: по возможности, уменьшить значение нормы функции T . Имеем

$$\|T\| \leq \mu = 2 \int_a^b \frac{1}{p} |h(p)| d\sigma(p). \quad (25)$$

Желательно также обеспечение неотрицательности функции h на $(a; b)$. Малость μ , по сравнению с λ , является мерой того, насколько "легче" обращается оператор $I-T$, по сравнению с $I-K$ (см. оценки (8) и (25)). Что касается неотрицательности функции h , то она существенна с точки зрения применения метода уравнения Амбарцумяна и МДО Чандрасекара и других методов решения уравнения переноса (см. п.8). Так как в выражении (23) функции h аргумент $p \geq a$, то при $\gamma \leq a$ неотрицательность функции h равносильна выполнению условия $\beta \leq a$. Если же $\beta > a$, то знакопеременными будут как h , так и $K(\tau)$ (при достаточно больших значениях $|\tau|$).

При $a > 0$ представляется целесообразным взять $\beta = a$. Тогда

$$0 \leq h(p) < 1, \quad T(\tau) > 0, \quad \mu < \lambda, \quad (26)$$

то есть мы добились уменьшения "нового альбеда" μ по сравнению с λ , сохранив при этом неотрицательность ядра.

В связи с вопросом выбора β при $a > 0$ сделаем следующее замечание. В работе [3] параметр, соответствующий параметр β выбирается, исходя

из требования малости значения $\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} T(\tau) d\tau$, допуская при этом

знакопеременности функции T (которая в [3] строится другим способом). При этом идеальным считается случай, когда $\mu_1 = 0$. Так, например, в

случае консервативного ядра $K(\tau) = \frac{1}{2} E_1(|\tau|)$ получается

$$T(\tau) = \frac{1}{2} E_1(|\tau|) - \frac{3}{2} E_3(|\tau|). \text{ Такой критерий нуждается в обосновании,}$$

поскольку обращение оператора $I - \hat{T}$ может оказаться сложнее обращения $I - \hat{K}$.

Перейдем к рассмотрению основного вопроса настоящего пункта: минимизировать величину $\mu = \mu(\beta)$. Будем считать, что выполняется условие (24). Покажем сначала, что при достаточно малых значениях $\beta > 0$ имеет место неравенство

$$\mu(\beta) < 1, \quad (27)$$

стало бы оператор T сжимающий. Неравенство (27) можно записать в виде

$$\int_{\beta}^b (\beta^2 - p^2) d\sigma_1(p) + \int_{\beta}^b (p^2 - \beta^2) d\sigma_1(p) < 1, \quad (28)$$

$$\text{где } d\sigma_1(p) = \frac{2}{p(p^2 - \gamma^2)} d\sigma(p), \quad \sigma_1(p) = \int_a^p \frac{2}{q(q^2 - \gamma^2)} d\sigma(q).$$

С учетом $\mu(0) = 1$ получаем

$$2\beta^2 \int_a^\beta d\sigma_1(p) < \beta^2 \int_a^b d\sigma_1(p) + 2 \int_a^b p^2 d\sigma_1(p).$$

Для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы

$$\int_a^\beta d\sigma_1(p) < \frac{1}{2} \int_a^b d\sigma_1(p).$$

Очевидно, это неравенство выполняется при достаточно малых значениях $\beta > 0$, поскольку его левая часть стремится к 0 при $\beta \rightarrow 0$.

При решении вопроса о минимизации величины мы будем считать, что функция σ непрерывная. Нетрудно получить следующее выражение для производной μ' : $\mu'(\beta) = 2\beta\Psi(\beta)$, где $\Psi(\beta) = 2\sigma_1(\beta) - \sigma_1(b)$. Точка β_0 абсолютного минимума функции $\mu(\beta)$ определяется из равенства

$$\int_a^{\beta_0} \frac{2}{p(p^2 - \gamma^2)} d\sigma(p) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{2}{p(p^2 - \gamma^2)} d\sigma(p). \quad (29)$$

7. *Случай ППЧ.* Нами уже было отмечено, что в случае ППЧ оператор I-K не допускает разложения (15) вследствие $\nu_2 = +\infty$. Тем не менее, метод настоящей работы может оказаться полезным в вопросе приближенного решения уравнения (1) в случае ППЧ. Откладывая до пп. 8,9 вопрос о применении разложения (15) для точного и приближенного решения уравнения (1), мы ниже опишем способ приближенного построения разложения (15) в случае ППЧ.

Наряду с уравнением (1), (5) рассмотрим уравнение с ядром

$$K(\tau) = \tilde{K}(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-x_0}^{x_0} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)|\tau|] dx. \quad (30)$$

Контур коэффициента поглощения $\alpha(x)$ является положительной, четной, строго убывающей на $[0; \infty)$ функцией. Поэтому его наименьшим значением на $[-x_0; x_0]$ является $\alpha(x) > 0$. Нетрудно преобразовать (30) к виду (7) с $a = \alpha(x_0)$, то есть ядро (30) экспоненциально убывает в ∞ . Ядро (30) удовлетворяет также условию (20), причем $\lambda_0 = +\infty$. Поэтому для

оператора I-K с ядром (30) существует факторизация (15) с $\gamma < a$ и $\beta = a$. Близость ядер (5) и (30) задается выражением

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} |K(\tau) - \tilde{K}(\tau)| d\tau = \lambda A \int_{x_0}^{\infty} \alpha(x) dx.$$

Ясно, что при достаточно больших значениях x_0 величина δ становится сколь угодно малой. Отклонение решения уравнения (1), (5) от решения редуцированного уравнения (1), (30) оценивается с помощью указанной

величины δ :
$$\|S - \tilde{S}\| \leq \frac{\delta \|g\|}{(1-\lambda)(1-\lambda-\delta)}.$$

8. *Применение разложения (15) к неоднородному уравнению (1).* С учетом разложения (15) уравнение (1) можно переписать в виде

$$(I - \hat{U}_-)(I - \hat{T})(I - \hat{U}_+)S = g. \quad (31)$$

Введем обозначения

$$(I - \hat{U}_+)S = S_1, \quad (32)$$

$$(I - \hat{T})S_1 = S_2. \quad (33)$$

Из (31) имеем

$$(I - \hat{U}_-)S_2 = g. \quad (34)$$

Итак, решение (1) сводится к последовательному решению уравнений (34), (33) и (32).

Решение (34) имеет вид

$$S_2(\tau) = g(\tau) + \alpha \int_{\tau}^{\infty} e^{-\gamma(t-\tau)} g(t) dt. \quad (35)$$

Решение же уравнения (32) имеет вид

$$S(\tau) = S_1(\tau) + \alpha \int_0^{\tau} e^{-\gamma(\tau-t)} S_1(t) dt. \quad (36)$$

Нам остается решить уравнение (33), где S_2 определяется согласно (35), после чего S определяется из (36).

Ниже мы изложим метод уравнения Амбарцумяна (УА) решения уравнения (33) в духе работ [13,14]. УА для (33) имеет вид

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) + \int_a^b \frac{\varphi(p)}{s+p} h(p) d\sigma(p). \quad (37)$$

Пусть φ - так называемое каноническое решение (КР) УА (37), о построении которого речь пойдет чуть позже. Обозначим

$$V(\tau) = \int_a^b e^{-\tau s} \varphi(s) h(s) d\sigma(s), \quad (38)$$

тогда имеет место разложение

$$I - \hat{T} = (I - \hat{V}_-)(I - \hat{V}_+), \quad (39)$$

где $\hat{V}_\pm$ - суть вольтерровые операторы вида

$$(\hat{V}_+ f)(\tau) = \int_0^\tau V(\tau-t) f(t) dt, \quad (\hat{V}_- f)(\tau) = \int_\tau^\infty V(t-\tau) f(t) dt. \quad (40)$$

Обращение операторов $I - \hat{V}_\pm$ сводится к решению следующего хорошо известного уравнения восстановления:

$$\Phi(\tau) = V(\tau) + \int_0^\tau V(\tau-t) \Phi(t) dt. \quad (41)$$

Из (39) имеем

$$(I - \hat{T})^{-1} = (I + \hat{\Phi}_+)(I + \hat{\Phi}_-), \quad (42)$$

где $\hat{\Phi}_\pm$ - суть вольтерровые операторы вида

$$\hat{\Phi}_+ f(\tau) = \int_0^\tau \Phi(\tau-t) f(t) dt, \quad \hat{\Phi}_- f(\tau) = \int_\tau^\infty \Phi(t-\tau) f(t) dt. \quad (43)$$

Согласно (42), решение (33) имеет вид

$$S_1 = (I + \hat{\Phi}_+)(I + \hat{\Phi}_-)S_2. \quad (44)$$

Описанный выше способ решения уравнения (1), в случае экспоненциального ядра $g(\tau) = e^{-\alpha\tau}$, полностью согласуется с результатами работы [3], за исключением расхождения в вопросе выбора свободного параметра β . В [3] был рассмотрен также случай общего свободного члена, но дело не было доведено до конца.

9. *Каноническое решение УА.* КР φ уравнения (37) называется пределом последовательности φ_n , определяемой с помощью итераций

$$\varphi_{n+1}(s) = 1 + \varphi_n(s) \int_a^b \frac{\varphi_n(p)}{s+p} h(p) d\sigma(p), \quad \varphi_0 = 0, n = 0, 1, \dots \quad (45)$$

Согласно [13,14], при выполнении условия

$$\mu = 2 \int_a^b |h(s)| \frac{1}{s} d\sigma(s) \leq 1 \quad (46)$$

существует КР УА (37) (независимо от знака h). В нашем же случае $\mu < 1$ (см. (27)). Имеет место неравенство

$$\|\varphi\| = \int_a^b |\varphi(s)| |h(s)| \frac{1}{s} d\sigma(s) \leq 1 - \sqrt{1 - \mu}, \quad (47)$$

которое обращается в равенство при $h \geq 0$. Скорость сходимости итераций φ_n определяется согласно оценке

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq (1 - \sqrt{1 - \mu})^{n+1}. \quad (48)$$

Оценки (47) и (48) указывают на важность величины μ и ее малости, о чем шла речь в п.6.

Ниже мы укажем на одно важное свойство функции φ . Из (37) имеем

$$\varphi(s) = \left[1 - \int_a^b \frac{\varphi(p)}{s+p} h(p) d\sigma(p) \right]^{-1}. \quad (49)$$

Из (49) и (47) легко следует тот замечательный факт, что функция φ положительная, даже если h знакопеременная. Этот факт является весьма существенным в вопросе приближенного решения уравнения восстановления (41) методом дискретных ординат работы [15]. Однако этот вопрос мы в настоящей работе рассматривать не будем.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность О.В.Пикичяну за ценную информацию и обсуждение результатов настоящей работы.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория НАН РА.

ON ALBEDO SHIFTING METHOD

N.B.YENGIBARIAN, B.N.YENGIBARIAN

The new interpretation of Albedo Shifting Method (AShM) in Radiative Transfer Theory is suggested in this paper. It is based on construction of three-factor factorization of Transfer Integral Equation's operator for homogeneous half-space. This approach is essentially simplifying AShM, as well as increasing its possibilities and sphere of applications.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
2. В.В.Соболев, Перенос лучистой энергии, Гостехизд. М., 1956.
3. V.V.Ivanov, G.B.Rybicki, A.M.Kasaurov, Albedo Shifting, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, Preprint Series №3478, 1992.
4. В.В.Иванов, Астрофизика, 13, 284, 1977.
5. H.Domke, J.Quant, Spectrosc.Radiat.Transfer, 39, 283, 1988.
6. Н.Б.Енгибарян, Б.Н.Енгибарян, Мат.сб. (в печати).
7. Б.Н.Енгибарян, Ж.выч.мат. и мат.физики (в печати).
8. В.В.Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
9. И.Н.Минин, ДАН СССР, 133, 588, 1960.
10. N.B.Yengibarian, J. Integral Eq. Math. Physics, 1, 140, 1992.

11. *К.Черчиньяни*, Математические методы в кинетической теории газов, Мир, М., 1973.
12. *Н.Б.Енгибарян, Л.Г.Арабаджян*, Дифф.уравнения, 26, 8, 1990.
13. *Н.Б.Енгибарян, А.А.Арутюнян*, Мат.сб., 97, 35, 1975.
14. *Л.Г.Арабаджян, Н.Б.Енгибарян*, Мат. анализ, Итоги науки и техники, 22, 175, 1984.
15. *Н.Б.Енгибарян, Э.А.Мелконян*, ДАН СССР, 292, 322, 1987.