

УДК:52:531.51

МНОГОМЕРНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭФФЕКТИВНОЙ СТРУННОЙ ГРАВИТАЦИИ. I

А.А.СААРЯН

Поступила 24 июля 1995

Принята к печати 27 августа 1995

Рассмотрены многомерные космологические модели в низкоэнергетической полевой теории струн с бозонным гравитационным сектором содержащим метрику, поле дилатона и антисимметричное поле Калба-Рамона. Исследованы конформные свойства действия и показано, что в общем конформном представлении теория эквивалентна обобщенной скалярно-тензорной теории с зависимостью лагранжиана негравитационной материи от дилатона. Найдены точные решения плоской однородной анизотропной модели со структурой $R \times M^1 \times \dots \times M^p$ и с уравнением состояния $p_i = a_i \epsilon$ в подпространстве M^1 . Обсуждается картина космологической эволюции в различных конформных представлениях.

1. *Введение.* Гипотеза о многомерности пространственно-временного многообразия является одной из наиболее старых и вместе с тем плодотворных на пути объединения различных физических взаимодействий. Еще в двадцатых годах Калуза и Клейн высказали предположение, что гравитация и электромагнетизм могут быть объединены в рамках единой 5-мерной гравитации. В настоящее время интерес к многомерным теориям обусловлен возможностью включения в эту схему неабелевых калибровочных полей [1-3]. Основная идея состоит в том, что бозонные поля переносчиков физических взаимодействий интерпретируются как компоненты метрики многомерного пространства-времени. Эти поля являются калибровочно-симметричными, если пространство, образованное дополнительными координатами, обладает соответствующей группой изометрии. Калибровочные преобразования в четырехмерии являются координатными преобразованиями дополнительных измерений. Тем самым гравитация и калибровочные теории объединяются в том смысле, что калибровочные симметрии реализуются как пространственно-временные симметрии. Наблюдаемая

четырёхмерность пространства-времени в этих теориях объясняется малыми размерами пространства дополнительных измерений. В моделях с динамической компактификацией эта малость достигается в процессе эволюции Вселенной [4–6]. Другая возможность заключается в предположении, что дополнительные размерности являются статическими, начиная с самых ранних стадий, когда они имели размер порядка планковской (см., например, [7–10] и приведенные там ссылки).

В последнее время интерес к многомерным моделям особенно возрос в связи с бурным развитием исследований по теории струн и суперструн [11–12], являющимися наиболее реальными кандидатами квантовой теории гравитации. Одним из наиболее замечательных результатов струнных моделей является предсказание размерности D пространства-времени. Оказывается, что соответствующие квантовые теории непротиворечивым образом могут быть построены лишь при определенных значениях D ($D=26$ в теории бозонных струн и $D=10$ в теории суперструн). В низкоэнергетическом пределе теория струн эквивалентна эффективной локальной полевой теории, действие которой в древесном приближении и в ведущем порядке по натяжению струны имеет вид [13–17]

$$S = \int d^D x \sqrt{-\tilde{G}} e^{-2\varphi} \left[-\frac{1}{16\pi k_D} \left(R + 4\tilde{\partial}^M \varphi \partial_M \varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{12} H_{MNP} \tilde{H}^{MNP} \right) + L_m(\psi) \right], \quad (1)$$

где $\tilde{G}_{MN}$, φ , — D -мерная метрика и поле дилатона, которые вместе с антисимметричным полем Калба–Рамона B_{MN} с напряженностью

$$H_{MNP} = \partial_P B_{MN} + \partial_N B_{PM} + \partial_M B_{NP} \quad (2)$$

составляют бозонный гравитационный сектор теории, L_m — лагранжиан других полей ψ , независящий в рассматриваемом приближении от поля дилатона, k_D — D -мерная гравитационная постоянная с размерностью (длина) ^{$D-2$} . Здесь и ниже индексы, обозначаемые большими латинскими буквами, пробегают значения $0, 1, \dots, D-1$ и принята сигнатура метрики $(+, -, \dots, -)$. Символ $\sim$ над буквой означает, что соответствующие величины рассматриваются в струнном конформном представлении.

Соответствующая четырехмерная теория может быть получена стандартным образом путем редукции действия (1). Такая теория обычно рассматривается как возможная основа для реализации сценария растянутой инфляции [18–20] в ранних стадиях расширения Вселенной, где в отличие от обычной экспоненци-

альной де-ситтеровской инфляции, расширение происходит по степенному закону t^s , $s > 1$. В работе [21] показано, что для редукции с постоянным в струнных единицах внутренним пространством и нулевым антисимметричным тензором решения, описывающие растянутую инфляцию, отсутствуют (для показателя s получается значение $s = 1$). В предыдущей работе автора [22] найдены такие решения для схемы редукции с переменным внутренним пространством, масштабный фактор которого меняется по закону e^{φ} с произвольной постоянной C и значением $s > 1$ при $C \neq 0$. В данной статье показывается, что внутренние пространства такого типа являются частными решениями основанных на (1) многомерных космологических уравнений. В разделе 2 рассмотрены конформные свойства действия (1). В наиболее общем конформном представлении оно представляется в виде многомерной обобщенной скалярно-тензорной теории гравитации, характерной чертой которой является зависимость негравитационной части лагранжиана от поля дилатона. Соответствующие уравнения поля выведены в разделе 3. Далее рассматривается многомерная однородная анизотропная космологическая модель со структурой $R \times M^1 \times \dots \times M^n$. Найдены точные решения модели в случае плоских подпространств M^i (о некоторых классах частных решений с подпространствами отрицательной кривизны см. [23, 24]). В частности показано, что имеется класс решений со степенной зависимостью от времени масштабных факторов этих подпространств. Исследовано поведение общего решения в различных предельных случаях. Отметим, что четырехмерные однородные анизотропные структурные космологические модели с антисимметричным тензором Калба-Рамона недавно рассматривались в [25-27].

2. Конформные представления. Любая физическая теория может быть задана в различных математических представлениях [28]. В зависимости от исследуемого вопроса может оказаться удобным то или иное из них. Например, скалярно-тензорные теории гравитации [29] обычно рассматриваются в двух стандартных представлениях: представление Йордана, в котором пробные частицы движутся геодезически, но полевые уравнения заметно отличаются от эйнштейновских, и конформно преобразованное представление, когда движение пробных частиц отлично от геодезических, но полевые уравнения имеют вид эйнштейновских. В частности, это позволяет по известным решениям одной теории генерировать решения другой (см., например, [30, 31]).

В этом разделе мы рассмотрим различные конформные представления действия (1) соответствующие конформным преобразованиям

$$\tilde{G}_{MN} = e^{\varphi} G_{MN} \quad (3)$$

метрики с произвольной постоянной c . С помощью известного закона преобразования D -мерного скаляра Риччи после некоторых преобразований оно представится в виде

$$S = \int d^D x \sqrt{-G} e^{-2\varphi} \left[\frac{1}{16\pi k_D} (-\Phi R + \omega \partial^M \Phi \partial_M \Phi / \Phi + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \Phi^{1-2c/b} H_{MNP} H^{MNP}) + \bar{L}_m(\Phi, G_{MN}, \psi) \right] \quad (4)$$

с новым скалярным полем

$$\Phi = e^{b\varphi}, \quad b = Dc/2 - c - 2 \neq 0, \quad (5)$$

параметром

$$\omega = -1 - \frac{1 - 4/b^2}{D - 2} \quad (6)$$

и эффективным негравитационным лагранжианом

$$\bar{L}_m = \Phi^{1+c/b} L_m(\Phi^{c/b} G_{MN}, \psi) \quad (7)$$

Действие (4) представляет обобщенную скалярно-тензорную теорию с зависимостью негравитационного лагранжиана от скалярного поля Φ . Струнное представление соответствует значению $c = 0$, когда $\omega = -1$. При $b = 0$ реализуется эйнштейновское представление (см., например, [22]):

$$S = \int d^D x \sqrt{-G} \left[-\frac{1}{16\pi k_D} \left[R - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4}{D-2} \partial^M \varphi \partial_M \varphi - \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{8\varphi}{D-2}\right) H_{MNP} H^{MNP} \right] + \right. \\ \left. + \exp\left(\frac{4\varphi}{D-2}\right) L_m\left(\exp\left(\frac{4\varphi}{D-2}\right) G_{MN}, \psi\right) \right], \quad (8)$$

где в отличие от струнного представления кинетический член поля дилатона входит с положительным знаком. Отметим, что выбором конформного представления (параметра c) зависимость лагранжиана L_m от скалярного поля Φ в общем случае невозможно устранить, т.е. для (4) представление Йордана, вообще говоря, не существует. Однако для конкретных лагранжианов такое представление может оказаться реализуемым. Примером является лагранжиан с конформным весом β , для которого

$$\bar{L}_m = \Phi^{1+(1+\beta)c/b} L_m(G_{MN}, \psi). \quad (9)$$

Выбор конформного представления согласно

$$1 + (1 + \beta)c/b = 0 \quad (10)$$

исключает поле дилатона из негравитационной части лагранжиана. Исключением является случай $\beta = -1$.

3. *Уравнения поля.* Уравнения поля многомерной эффективной струнной гравитации в общем конформном представлении (об уравнениях поля и космологических моделях в эйнштейновском представлении см. приложение) получаются вариацией действия (4) и имеют вид (об аналогичных уравнениях в четырехмерии см. [22, 29, 32])

$$R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R = \frac{8\pi k_D}{\Phi} T_{MN} + \frac{\omega}{\Phi^2} \left(\partial_M \Phi \partial_N \Phi - \frac{1}{2} G_{MN} \partial_P \Phi \partial^P \Phi \right) + \Phi^{-1} \left(D_M D_N \Phi - G_{MN} \square \Phi \right),$$

$$\square \Phi - \frac{1}{2} \partial_M \Phi \partial^M \Phi / \Phi + \frac{\Phi}{2\omega} \left[R - \frac{16\pi k_D}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(L\sqrt{-G})}{\delta \Phi} \right] = 0, \quad (11)$$

$$D_M \left(\Phi^{1-2\omega/b} H^{MNP} \right) = \partial_M \left(\sqrt{-G} \Phi^{1-2\omega/b} H^{MNP} \right) = 0,$$

где D_M — ковариантная производная по метрике G_{MN} , $\square = G^{MN} D_M D_N$ — многомерный ковариантный даламбертиан,

$$L = \bar{L}_m + L_H, \quad L_H = \frac{1}{16\pi k_D} \cdot \frac{1}{12} \Phi^{1-2\omega/b} H_{MNP} H^{MNP}. \quad (12)$$

Тензор энергии-импульса определяется стандартным образом

$$T_{MN} = \frac{2}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(\sqrt{-G}L)}{\delta G^{MN}} = T_{MN}^{(m)} + T_{MN}^{(H)}. \quad (13)$$

В частности, для антисимметричного поля

$$T_{MN}^{(H)} = \frac{1}{32\pi k_D} \Phi^{1-2\omega/b} \left(H_{MN}^2 - \frac{1}{6} G_{MN} H^2 \right), \quad H_{MN}^2 \equiv H_{MKL} H_N^{KL},$$

$$H^2 \equiv H_{MKL} H^{MKL}. \quad (14)$$

Исключая R с помощью свертки первого уравнения (11)

$$R = -\frac{16\pi k_D}{(D-2)\Phi} T + \frac{\omega}{\Phi^2} \partial_P \Phi \partial^P \Phi + 2 \frac{D-1}{D-2} \frac{\square \Phi}{\Phi} \quad (15)$$

первые два уравнения системы (11) можно записать в виде

$$R_{MN} = \frac{8\pi k_D}{\Phi} \left(T_{MN} - \frac{G_{MN}}{D-2} T \right) + \frac{\omega}{\Phi^2} \partial_M \Phi \partial_N \Phi + \Phi^{-1} \left(D_M D_N \Phi + \frac{G_{MN}}{D-2} \square \Phi \right) \\ \square \Phi + \frac{b}{12} \Phi^{1-2\omega/b} H^2 = 2\pi b^2 k_D \left[T^{(m)} + \frac{D-2}{\sqrt{-G}} \Phi \frac{\delta(\sqrt{-G} L_m)}{\delta \Phi} \right]. \quad (16)$$

Следствием уравнений гравитационного поля является ковариантное уравнение непрерывности для тензора энергии-импульса

$$D_M T_N^M = -\frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(L\sqrt{-G})}{\delta \Phi} \partial_N \Phi. \quad (17)$$

Аналогичное уравнение имеет место и для отдельных слагаемых в правой части равенства (13).

Уравнения поля несколько упрощаются в случае лагранжианов с конформным весом β (см. (9)), для которых согласно теореме Эйлера для однородных функций

$$T^{(m)} = -(\beta + D) \bar{L}_m \quad (18)$$

и поэтому

$$\frac{\Phi}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(\bar{L}_m \sqrt{-G})}{\delta \Phi} = -\frac{1 + (1 + \beta)c/b}{2\beta + D} T^{(m)}. \quad (19)$$

Аналогичные соотношения с $\beta = -3$ имеют место и для лагранжиана L_H .

4. *Космологические модели.* Одним из возможных областей, где струнные эффекты могут иметь важное значение, является ранняя Вселенная. В качестве модели мы рассмотрим многомерное пространство-время со структурой $R \times M^1 \times \dots \times M^n$, где R — соответствует временной координате, M^i , $i = 1, 2, \dots, n$ — максимально-симметричное пространство размер-

ности n_i и со скалярной кривизной k_i , $\sum n_i = D - 1$. D -мерная метрика может быть представлена в виде

$$G_{MN} = \text{diag} (1, \dots, -R_i^2(t) g_{l_i m_i}^{(i)}, \dots), \quad (20)$$

где R_i — масштабный фактор подпространства M^i с метрикой $g_{l_i m_i}^{(i)}$, индексы l_i, m_i , принимают значения, соответствующие этому подпространству. Тензор Риччи метрики $g^{(i)}$ нормирован таким образом, чтобы $R_{l_i m_i}^{(i)} = k_i(n_i - 1) g_{l_i m_i}^{(i)}$, где $k_i = 0, \pm 1$. Скалярная кривизна соответственно равна $R^{(i)} = k_i n_i(n_i - 1)$, а гравитационный скаляр зависит только от времени: $\Phi = \Phi(t)$.

Из первого уравнения (11) для метрики (20) следует диагональность тензора энергии-импульса и равенство его компонент в пространстве M^i . Введя соответствующие обозначения можно написать

$$T_o^o = \varepsilon, T_m^{l_i} = -p_i \delta_{m_i}^{l_i}, T_M^N = \text{diag} (\varepsilon, \dots, -\delta_{m_i}^{l_i} p_i, \dots). \quad (21)$$

Система уравнений поля запишется в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\dot{R}_i}{R_i} \right)' + \frac{\dot{R}_i}{R_i} \sum_{m=1}^n n_m \frac{\dot{R}_m}{R_m} + k_i \frac{n_i - 1}{R_i^2} + \frac{\dot{R}_i \dot{\Phi}}{R_i \Phi} = \\ & = \frac{8\pi k_D}{\Phi} \left[p_i + \frac{b^2}{4} (\omega + 1) T - \frac{b^2 \Phi}{4\sqrt{-G}} \frac{\delta(L\sqrt{-G})}{\delta\Phi} \right], \\ & \ddot{\Phi} + \dot{\Phi} \sum_{m=1}^n n_m \frac{\dot{R}_m}{R_m} = 2\pi b^2 \left[T + \frac{D-2}{\sqrt{-G}} \Phi \frac{\delta(L\sqrt{-G})}{\delta\Phi} \right], \\ & \left(\sum_{m=1}^n n_m \frac{\dot{R}_m}{R_m} \right)^2 - \sum_{m=1}^n n_m \left[\left(\frac{\dot{R}_m}{R_m} \right)^2 - 2 \frac{\dot{R}_m}{R_m} \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} - k_m \frac{n_m - 1}{R_m^2} \right] - \\ & - \omega \left(\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} \right)^2 = \frac{16\pi k_D}{\Phi} \varepsilon, \end{aligned} \quad (22)$$

где последнее уравнение представляет собой δ — компоненту первого уравнения

(11), $T = \varepsilon - \sum_{i=1}^n n_i p_i$, точка над буквой означает производную по времени. Из

(17) теперь имеем

$$\dot{\varepsilon} + \sum_{m=1}^n n_m (\varepsilon + p_m) \frac{\dot{R}_m}{R_m} = - \frac{\dot{\Phi}}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(\sqrt{-G} L)}{\delta \Phi} . \quad (23)$$

Далее мы предположим, что вариационную производную лагранжиана в левых частях уравнений (22) можно представить в виде линейной комбинации плотности энергии и давлений [33]

$$\frac{\Phi}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(L\sqrt{-G})}{\delta \Phi} = \alpha_0 \varepsilon + \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i , \quad (24)$$

где $\alpha_i, i=0,1,\dots,n$ — безразмерные постоянные. Для лагранжианов с конформным весом β , сравнивая (24) с (19), для коэффициентов α_i находим

$$\alpha_0 = - \frac{1+c(1+\beta)/b}{2\beta+D} , \quad \alpha_i = -\alpha_0 n_i , \quad i=1,\dots,n , \quad (25)$$

в частности, в струнном представлении и в представлении Йордана $\alpha_0 = -1/(2\beta+D)$ и $\alpha_0 = 0$, соответственно.

В дальнейшем удобно ввести следующие обозначения

$$y_i = n_i \dot{R}_i / R_i , \quad y_{n+1} = \dot{\Phi} / \Phi , \quad a_{ii} = 1 - \delta_{ii} / n_i , \quad a_{n+1,n+1} = -\omega , \quad i=1,2,\dots,n , \quad (26)$$

с помощью которых система (22) запишется в более компактном виде

$$\dot{y}_i + y_i \sum_m y_m + k_i n_i \frac{n_i - 1}{R_i^2} = \frac{16\pi k_D}{\Phi} b_i \varepsilon , \quad i=1,\dots,n+1 , \quad k_{n+1} = 0 , \quad (27a)$$

$$\frac{16\pi k_D}{\Phi} \varepsilon = \sum_{i,m} a_{im} y_i y_m + \sum_i k_i n_i \frac{n_i - 1}{R_i^2} . \quad (27b)$$

Здесь и ниже, если не написаны пределы суммирования, то подразумевается, что суммирование проводится от 1 до $n+1$. Введены также новые обозначения

$$b_i = \frac{1}{2} n_i \left[a_i + \frac{b^2}{4} (\omega+1) \left(1 - \sum_{m=1}^n n_m a_m \right) - \frac{b^2}{4} \left(\alpha_0 + \sum_{m=1}^n \alpha_m a_m \right) \right] , \quad i=1,2,\dots,n ,$$

$$b_{n+1} = \frac{b^2}{8} \left[1 - \sum_{m=1}^n n_m a_m + (D-2) \left(\alpha_0 + \sum_{m=1}^n \alpha_m a_m \right) \right] , \quad (28)$$

где

$$a_i = p_i / \varepsilon . \quad (29)$$

В частности, для лагранжианов с конформным весом β с учетом (25) получим

$$\begin{aligned} b_i &= n_i \left[a_i + b^2 \left(1 - \sum_{m=1}^n n_m a_m \right) (\omega + 1 - \alpha_o) / 4 \right] / 2 , \\ b_{n+1} &= b^2 \left(1 - \sum_{m=1}^n n_m a_m \right) [1 + \alpha_o (D - 2)] / 8 . \end{aligned} \quad (30)$$

Конкретные значения этих коэффициентов для некоторых чисто гравитационных моделей ($L_m = 0$) с антисимметричным полем Колба-Рамона приведены во второй части работы.

Уравнение непрерывности (23) теперь запишется в виде

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} + \sum_{m=1}^n (1 + a_m) y_m + \left(\alpha_o + \sum_{m=1}^n a_m \alpha_m \right) y_{n+1} = 0 . \quad (31)$$

В случае уравнений состояния с постоянными a_i оно непосредственно интегрируется

$$\varepsilon = \text{const } \Phi^{-\alpha_o - \sum_{m=1}^n a_m} \prod_{i=1}^n R_i^{-n_i(1+a_i)} . \quad (32)$$

В частности, для пылевидной материи $a_i = 0$ мы получим $\varepsilon \sim 1/V$, где V — объем многомерного пространства.

Пусть масштабный фактор R_i сначала возрастает, достигает максимального значения в некоторый момент времени t_{im} и далее монотонно убывает. максимума $\ddot{R}_i = 0$ и $\ddot{R}_i < 0$ и из уравнения (27а) имеем

$$\ddot{R}_i / R_i + k_i (n_i - 1) / R_i^2 = 8\pi k_D b_i \varepsilon / \Phi , \quad \text{при } t = t_{im} .$$

При $k_i \leq 0$ и для решений с положительной плотностью энергии отсюда следует, что $b_i < 0$, т.е. для динамически компактифицированных подпространств соответствующие значения коэффициентов (28) отрицательны.

5. Плоская космологическая модель. Особые решения. Система уравнений (27) в случае плоских подпространств M^i , $k_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, примет вид

$$y_i + y_i \sum_m y_m = b_i f, \quad i, m = 1, \dots, n+1 ,$$

$$16\pi k_D \varepsilon / \Phi = f(y_i) = \sum_{i,m} a_{im} y_i y_m, \quad (33)$$

где коэффициенты b_i , a_{im} определены в (26) и (28). Аналогичные системы (с $i=1,2$) возникают и в ряде других теорий гравитации (см., например, [6,22,34–36]). Предположим, что $y_1 \neq 0$, т.е. подпространство M^1 не является статическим. Введем новые переменные

$$u_i = y_i / y_1, \quad d\eta = y_1 dt, \quad (34)$$

с помощью которых (33) можно записать в виде

$$du_i / d\eta = (b_i - b_1 u_i) f(u_m). \quad (35)$$

При $y_1 = 0$ в качестве знаменателя отношения (34) можно взять любое другое отличное от нуля y_m . Прежде всего из (35) непосредственно следует, что при $b_1 \neq 0$ и постоянных a_i (см. (29)) имеется частное решение

$$u_i = b_i / b_1, \quad (36)$$

а также класс решений

$$u_i = \text{const}, \quad f(u_i) = 0, \quad (37)$$

являющихся вакуумными решениями, так как для них $\varepsilon = 0$. Пусть u_i отлично от значений (36) и (37). Из уравнений (35) следует следующая связь между различными функциями u_i

$$u_i = c_{im} u_m + (b_i - c_{im} b_m) / b_1 \quad (38)$$

(по m нет суммирования), где c_{im} постоянные интегрирования, удовлетворяющие условиям $c_{ii} = 1$, $c_{1m} = 0$, $m \neq 1$. Выбирая, например, $m=2$ мы получаем следующую связь между исходными функциями y_i :

$$y_i = \sum_{m=1}^2 c_{im} y_m, \quad c_{12} = c_{21} = 0, \quad c_{11} = c_{22} = 1, \quad c_{i1} = (b_i - c_{i2} b_2) / b_1. \quad (39)$$

Таким образом, все функции y_i , $i=3, \dots, n+1$ выражаются в виде линейной комбинации y_1 и y_2 . В работе [22] рассмотрена четырехмерная эффективная струнная гравитация с редукционным анзацем $y_i \sim \dot{\Phi} / \Phi = y_{n+1}$, $i=2, \dots, n$. Теперь мы видим, что такой вариант является частным случаем рассматриваемой здесь многомерной модели со значениями постоянных $c_{i2} = b_i / b_2$.

С учетом (39) плотность энергии выражается через функции y_1 , y_2 :

$$f = \sum_{m,p=1}^2 A_{mp} y_m y_p, \quad A_{mp} = \sum_{ll} a_{il} c_{lm} c_{lp}. \quad (40)$$

В силу соотношений (39) достаточно рассмотреть лишь первые два уравнения системы (33). Введя новые функции

$$x = c_1 y_1, \quad y = c_2 y_2, \quad c_l = \sum_l c_{ll}, \quad l=1,2 \quad (41)$$

и предполагая, что $A_{22} \neq 0$ запишем их в виде

$$\dot{x} + x(x+y) = h_1 F(x,y), \quad \dot{y} + y(x+y) = h_2 F(x,y), \quad (42)$$

где введены следующие обозначения

$$h_1 = c_1 b_1 A_{22} / c_2^2, \quad h_2 = b_2 A_{22} / c_2, \\ F(x,y) = y^2 + 2d_2 yx + d_3 x^2, \quad d_2 = c_2 A_{12} / c_1 A_{22}, \quad d_3 = c_2^2 A_{11} / c_1^2 A_{22}. \quad (43)$$

Система (42) допускает первый интеграл. Действительно, вычитая из первого уравнения умноженного на h_2 , второе уравнение умноженное на h_1 , и интегрируя полученное уравнение, находим

$$x(w - w_0) R_1^{c_1 n_1} R_2^{c_2 n_2} = \text{const}, \quad w_0 = h_2 / h_1, \quad w = y/x. \quad (44)$$

С учетом соотношения $R_1^{c_1 n_1} R_2^{c_2 n_2} = V\Phi$ ($V = \prod_{i=1}^n R_i^{n_i}$ — объем многомерного пространства), являющимся простым следствием соотношений (39), (41), предыдущую формулу можно записать также в виде

$$x(w - w_0) V\Phi = \text{const}. \quad (45)$$

Заметим, что значение постоянной в правой части, вообще говоря, различно в областях $w > w_0$ и $w < w_0$. Из (45), в частности, следует, что $xV\Phi \rightarrow \infty$ при $w \rightarrow w_0$.

Уравнения (42) представляют собой автономную динамическую систему второго порядка, для решения которой удобно ввести новое переменное w согласно

$$y = wx \quad (46)$$

и записать в виде

$$\frac{dw}{d\xi} = h_1 (w_0 - w)F(1, w), \quad \frac{d \ln |x|}{d\xi} = h_1 F(1, w) - w - 1, \quad (47)$$

где

$$d\xi = xdt, \quad \xi = \ln R_1^{n_1 c_1}. \quad (48)$$

Плотность энергии можно найти из формулы

$$\frac{8\pi k_D}{\Phi} \varepsilon = \frac{A_{22}}{c_2^2} x^2 F(1, w). \quad (49)$$

Из первого уравнения (47) следует, что имеются решения вида

$$w = w_l, \quad y = w_l x, \quad l = 0, 1, 2, \quad (50)$$

где $w_{1,2}$ корни уравнения $F(1, w) = 0$ (случай, когда это уравнение не имеет корней см. вторую часть работы):

$$w_{1,2} = -d_2 \pm \sqrt{d_2^2 - d_3} \quad (51)$$

Чтобы найти эти решения подставим $y = w_l x$ в первое уравнение (42):

$$\dot{x} = s_l x^2, \quad s_l \equiv h_1 F(1, w_l) - w_l - 1. \quad (52)$$

Здесь и ниже индекс l принимает значения 0, 1, 2.

При значениях параметров, для которых $s_l = 0$ имеем следующие решения

$$R_i = R_0 e^{\bar{H}_i}, \quad \bar{H}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{l=1}^2 c_{il} n_l \bar{H}_l, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad (53)$$

где $R_{n+1} = \Phi$, $n_{n+1} = 1$,

$$\bar{H}_1 = \dot{R}_1 / R_1 = \text{const}, \quad \bar{H}_2 = w_l \bar{H}_1 \frac{n_1 c_1}{n_2 c_2}.$$

При $s_l \neq 0$ интегрируя уравнение (52) с учетом (50) и соотношений (39), получим

$$\frac{\dot{R}_i}{R_i} = \frac{b_{il} s_l}{s_l t + c_0} = \frac{b_{il}}{t - t_l}, \quad t_l = -c_0 / s_l, \quad (54)$$

где c_0 постоянная интегрирования и введено обозначение

$$b_{il} = -(c_{il} / c_1 + w_l c_{i2} / c_2) / n_l s_l. \quad (55)$$

Еще одно интегрирование уравнения (54) приводит к следующему выражению для масштабного фактора подпространства M^i и скалярного поля $\Phi (= R_{n+1})$

$$R_i = R_{i0} |t - t_l|^{b_{il}}, \quad (56)$$

где R_{i0} — постоянные интегрирования. Заметим, что переходя к пределу $s_l \rightarrow 0$ отсюда снова получаем решения (53). Отметим, что решения (53) и (56) при $l = 1, 2$ описывают модели с нулевой плотностью энергии негравитационной материи. В случае, когда уравнение $\varepsilon = 0$ не имеет корней, остается только одно решение с $l = 0$. Для решений (56) полный объем многомерного пространства изменяется по закону

$$\Phi V \sim |t - t_l|^{-(1+w)/s_l}, \quad l = 0 - 2.$$

В частности, для вакуумных решений ($l = 1, 2$) из (52) имеем $\Phi V \sim |t - t_l|$. При заданных значениях i и l решения (54) и (56) описывают модели расширения при

$$b_{il} > 0, \quad t_l < t < +\infty, \quad (57a)$$

$$b_{il} < 0, \quad -\infty < t < t_l \quad (57b)$$

и модели сжатия при

$$b_{il} > 0, \quad -\infty < t < t_l, \quad (58a)$$

$$b_{il} < 0, \quad t_l < t < +\infty \quad (58b)$$

со следующими характерными чертами. В случае (57a) модель начинает свою эволюцию в момент $t = t_l$, когда $R_l = 0$, $R_i/R_l = \infty$ и расширяется до значений $R_l = \infty$, $R_i/R_l = 0$ при $t \rightarrow +\infty$. При этом в начальный момент времени возможны два варианта $R_i(t_l) = 0$ при $b_{il} > 1$ и $R_i(t_l) = \infty$ при $b_{il} < 1$. Первый из этих вариантов соответствует инфляционному расширению и известен в литературе под названием степенной инфляции (power-law inflation) [37–39], а в контексте скалярно-тензорных теорий как растянутая инфляция (extended inflation) [18–20, 40–45]. В случае (57b) расширение начинается в бесконечном прошлом $t = -\infty$ со значений $R_l = 0$, $R_i/R_l = 0$ и в конечный момент времени $t = t_l$ масштабный фактор обращается в бесконечность по закону (56) с $R_i/R_l = \infty$. Такие типы решений известны как модели сильной инфляции (violent inflation) [6, 46–48]. Поведение моделей сжатия (58) аналогично и отличается от рассмотренных изменением направления времени. Это непосред-

ственно следует также из инвариантности системы космологических уравнений (33) относительно замены

$$(t, y_i) \rightarrow (-t, -y_i), i = 1, \dots, n+1. \quad (59)$$

Могут существовать смешанные модели, когда часть подпространств расширяется, а остальные сжимаются.

6. Плоская космологическая модель. Общие решения. В предыдущем разделе мы рассмотрели особые космологические решения вида (50) с экспоненциальным или степенным законами изменения масштабных факторов, в зависимости от значений параметров модели. Пусть теперь $w \neq w_l$. Переход во втором уравнении (47) к новому независимому переменному w с помощью первого уравнения его интегрирование приводит к следующему результату

$$x = x_0 \prod_{l=0}^2 |w - w_l|^{\gamma_l}, \quad y = wx, \quad (60)$$

где введено обозначение

$$\gamma_l = \sigma_l (w_l + 1) / h_1 - \delta_{l0} = -\sigma_l s_l / h_1, \quad 1/\sigma_0 = F(1, w_0), \\ 1/\sigma_1 = (w_1 - w_0)(w_1 - w_2), \quad 1/\sigma_2 = (w_2 - w_0)(w_2 - w_1). \quad (61)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих тождеств

$$\sum_l \sigma_l = \sum_l \sigma_l w_l = 0, \quad \sum_l \gamma_l = -1, \quad l = 0-2. \quad (62)$$

В частности, отсюда следует, что

$$x \sim 1/w, \quad \text{при } w \rightarrow \infty. \quad (63)$$

Интегрирование первого уравнения (47) с учетом (48) дает следующее выражение для масштабного фактора

$$R_1 = R_{10} \prod_{l=0}^2 |w - w_l|^{-b_l \gamma_l} \quad (64)$$

с новой постоянной интегрирования R_{10} . В формулах (60) и (64) величины выражаются через переменную w . Для определения зависимостей этих величин от времени нужно знать еще функцию $w = w(t)$. Эта функция определяется из уравнения

$$\dot{w} = -h_1 x \prod_{l=0}^2 (w - w_l), \quad (65)$$

являющегося простым следствием системы (42).

Функция $R_2(w)$ определяется из соотношения

$$\frac{dw}{d \ln R_2} = \frac{n_2 c_2}{w x} \dot{w}$$

и с учетом (65) равна

$$R_2 = R_{20} \prod_{l=0}^2 |w - w_l|^{-b_2 \gamma_l}. \quad (66)$$

Остальные функции R_l выражаются через R_1 и R_2 с помощью формулы (39), интегрирование которой приводит к следующему результату

$$R_l = R_{l0} \prod_{l=0}^2 |w - w_l|^{-b_l \gamma_l}, \quad (67)$$

где R_{l0} — постоянные интегрирования. Заметим, что эти формулы, записанные в таком виде, справедливы и при $i = 1, 2$, т.е. в (67) $i = 1, 2, \dots, n+1$. С учетом тождеств (62), отсюда следует, что

$$R_i \rightarrow R_{i0} \quad \text{при } w \rightarrow \infty. \quad (68)$$

Исходя из (39) и (60) нетрудно показать, что формула (67) описывает расширение подпространства M^i при $(c_{i1}/c_1 + w c_{i2}/c_2) x_0 > 0$ и сжатие в обратном случае. Функция $w = w(t)$ определяется из (65) или в интегральном виде

$$t = -\frac{1}{h_1 x_0} \int dw \prod_{l=0}^2 |w - w_l|^{\gamma_l} (w - w_l)^{-1}. \quad (69)$$

Формулы (67) и (69) в параметрическом виде задают общее решение системы (33). Они зависят от $n+1$ произвольных положительных постоянных R_{i0} , $n-1$ постоянных c_{i2} , $i = 3, \dots, n+1$, постоянной x_0 в (60) и аддитивной постоянной интегрирования в (69), определяющей начало отсчета времени. Общее число постоянных равно $2(n+1)$, что и следовало ожидать для общего решения системы дифференциальных уравнений (33) из $n+1$ уравнений второго порядка (относительно R_i). Анализ полученных решений проведен во второй части данной работы, где рассматриваются также конкретные модели с полем Калба-Рамона в качестве источника.

Приложение.

Струнная эффективная гравитация в эйнштейновском представлении. Действие (8) низкоэнергетической струнной гравитации в эйнштейновском представлении удобно записать через новое скалярное поле

$$\Phi = \exp \left(\frac{4\varphi}{D-2} \right). \quad (\text{П.1})$$

Оно примет вид

$$S = \int d^D x \sqrt{-G} \left[\frac{1}{16 \pi k_D} \left(-R + \omega \delta^M \Phi \partial_M \Phi / \Phi^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\Phi^{-2}}{12} H_{MNP} H^{MNP} \right) + \bar{L}_m \right], \quad (\text{П.2})$$

где теперь

$$\omega = (D-2)/4, \quad \bar{L}_m = \Phi L_m(\Phi G_{MN}, \psi). \quad (\text{П.3})$$

Уравнения поля получаются вариацией действия по полевым переменным:

$$R_{MN} = 8 \pi k_D \left(T_{MN} - \frac{G_{MN}}{D-2} T \right) + \frac{\omega}{\Phi^2} \partial_M \Phi \partial_N \Phi, \\ \square \Phi - \delta^M \Phi \partial_M \Phi / \Phi = \frac{8 \pi k_D}{\omega \sqrt{-G}} \frac{\delta(L \sqrt{-G})}{\delta \Phi} \Phi^2, \quad (\text{П.4}) \\ \partial_M (\sqrt{-G} \Phi^{-2} H^{MNP}) = 0.$$

Здесь

$$L = \bar{L}_m + L_H, \quad 16 \pi k_D L_H = \frac{\Phi^{-2}}{12} H_{MNP} H^{MNP}, \quad (\text{П.5})$$

а T_{MN} определено как и в (13), где

$$32 \pi k_D T_{MN}^{(H)} = \Phi^{-2} \left(H_{MN}^2 - \frac{1}{6} G_{MN} H^2 \right). \quad (\text{П.6})$$

Для рассмотренной выше плоской космологической модели с метрикой (20) система полевых уравнений примет вид

$$y_i + y_i \sum_{m=1}^n y_m = b_i f, \quad i=1, \dots, n+1,$$

$$16\pi k_{DE} = f = \sum_{i,l} a_{il} y_i y_l, \quad (\text{П.7})$$

где введены обозначения (28) и

$$b_i = \left[a_i + \left(1 - \sum_{l=1}^n n_l a_l \right) / (D-2) \right] n_i / 2, \quad i=1, \dots, n,$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{D-2} \left(\alpha_0 + \sum_{l=1}^n \alpha_l a_l \right), \quad a_{il} = 1 - \frac{\delta_{il}}{n_i}, \quad a_{i,n+1} = 0,$$

$$a_{n+1,l+1} = -\omega, \quad l=1, \dots, n. \quad (\text{П.8})$$

Дальнейший анализ системы (П.7) аналогичен вышеприведенному для системы (33) с тем лишь отличием, что теперь в определении c_l (см. (41)) суммирование проводится до значения $i=n$: $c_l = \sum_{i=1}^n c_{il}$.

Заметим, что формально, полагая в (П.7) $y_{n+1} = b_{n+1} = \omega = 0$ мы получим систему уравнений, описывающую многомерные космологические модели ОТО с $n-1$ внутренними подпространствами (о таких моделях при $n=2$ см., например, [6] и приведенные там ссылки). Таким образом, проведенный нами анализ космологических моделей включает в себя как частный случай многомерное ОТО.

Ереванский государственный университет,
Армения

MULTIDIMENSIONAL COSMOLOGICAL MODELS IN THE EFFECTIVE STRING GRAVITATION. I

A.A.SAHARIAN

Multidimensional cosmological models with the metric, dilaton field and antisymmetric Kalb-Ramond field as a gravitational sector are considered within the framework of the low-energy string theory. It is shown that in general conformal representation the theory is equivalent to generalized scalar — tensor theory with the dilaton depended nongravitational lagrangian. The exact solutions are found for

the flat homogeneous anisotropic model with a structure $R \times M^1 \times \dots \times M^n$ and for an equation of state $p_i = a_i \rho$ in subspace M^1 . The evolution picture are discussed in the various conformal representations.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.Duff, B.Nilsson, C.Pope, Phys. Rep., 130, 1, 1986.
2. J.Strathdee, Int. J. Mod. Phys., A1, 1, 1986.
3. V.M.Emellanov, Yu.P.Nikitin, I.L.Rozental, A.V.Berkov, Phys. Rep., 143, 1, 1986.
4. A.Chodos, S.Detweiler, Phys. Rev. D., 21, 2167, 1980.
5. T.I.Guendelman, A.B.Kaganovich, Int. J. Mod. Phys., D2, 221, 1993.
6. A.Beloborodov, M.Demianski, P.Ivanov, A.G.Polnarev, Phys. Rev. D, 48, 503, 1993.
7. P.Candelas, S.Weinberg, Nucl. Phys., B237, 397, 1984.
8. T.Appelquist, A.Chodos, Phys. Rev. D, 28, 772, 1983.
9. S.R.Huggins, D.J.Toms, Nucl. Phys., B263, 433, 1986.
10. U.B.Bleyer, A.Zhuk, Class. Quantum Grav., 12, 89, 1995.
11. М.Грин, Дж.Шварц, Э.Виттен, Теория суперструн, т.1,2, Мир, М., 1990.
12. С.В.Кетов, Введение в квантовую теорию струн и суперструн. Наука, Новосибирск, 1990.
13. C.G.Callan, D.Friedan, E.J.Martinec, M.J.Perry, Nucl. Phys., B262, 593, 1985.
14. C.E.Callan, I.R.Klebanov, M.J.Perry, Nucl. Phys., B278, 78, 1986.
15. E.S.Fradkin, A.A.Tseytlin, Phys. Lett., B158, 316, 1985.
16. E.S.Fradkin, A.A.Tseytlin, Nucl. Phys., B261, 1, 1985.
17. D.J.Gross, J.H.Sloan, Nucl. Phys., B291, 41, 1987.
18. D.La, P.J.Steinhardt, Phys. Rev. Lett., 62, 376, 1989.
19. J.D.Barrow, K.Maeda, Nucl. Phys., B341, 294, 1990.
20. R.Holman, E.W.Kolb, S.L.Vadas, Y.Wang, Phys. Rev. D, 43, 995, 1991.
21. B.A.Campbell, A.Linde, K.A.Olive, Nucl. Phys. B355, 146, 1991.
22. А.А.Саарян, Астрофизика, 38, 101, 1995.
23. P.G.O.Freund, Nucl. Phys., B209, 146, 1982.
24. P.G.O.Freund, P.Oh, Nucl. Phys., B255, 688, 1985.
25. M.Casperini, R.Ricci, Class. Quantum Grav., 12, 677, 1995.
26. N.A.Batakis, A.A.Kehagias, Anisotropic space-times in homogeneous string cosmology, preprint CERN-TH/95-14, hep-th/9502007.
27. N.A.Batakis, On the classification of spatially homogeneous 4D string backgrounds, preprint CERN-TH/95-41, hep-th/9502136.
28. K.S.Torn, D.L.Lee, A.P.Lightman, Phys. Rev. D, 7, 3563, 1973.
29. К.Уилл, Теория и эксперимент в гравитационной физике, Энергоатомиздат, М., 1985.
30. Г.Г.Арутюнян, В.В.Палоян, Астрофизика, 30, 409, 1989.
31. S.Kalara, N.Kaloper, K.A.Olive, Nucl. Phys., B341, 252, 1990.
32. J.A.Casas, J.Garcia-Bellido, M.Quiros, Nucl. Phys., B361, 713, 1991.
33. I.Antoniadis, C.Bachas, J.Ellis, D.V.Nanopoulos, Phys. Lett., B211, 393, 1988.
34. C.Romero, H.P.Oliveira, Astrophys. Space Sci., 159, 1, 1989.
35. А.А.Саарян, Астрофизика, 37, 351, 1994.
36. А.А.Саарян, Астрофизика, 37, 481, 1994.
37. L.F.Abbott, M.B.Wise, Nucl. Phys., B244, 541, 1984.
38. F.Lucchin, S.Matarrese, Phys. Rev. D., 32, 1316, 1985.
39. A.L.Berkin, K.I.Maeda, J.Yokoyama, Phys. Rev. Lett., 65, 141, 1990.
40. R.Holman, E.W.Kolb, Y.Wang, Phys. Lett. 65, 17, 1990.
41. D.La, P.J.Steinhardt, Phys. Lett., B220, 375, 1989.
42. E.J.Weinberg, Phys. Rev. D, 40, 3950, 1989.
43. F.S.Accetta, J.J.Trester, Phys. Rev. D, 39, 3854, 1989.
44. Y.Wang, Phys. Rev. D, 44, 991, 1991.

45. *J. Garcia-Bellido, M. Quiros*, Nucl. Phys., B463, 1992.
46. *D. Sahdev*, Phys. Rev. D, 30, 2495, 1984.
47. *E. W. Kolb, D. Lindley, D. Seckel*, Phys. Rev. D, 30, 1205, 1984.
48. *K. Maeda*, Class. Quantum Grav., 3, 233, 1986.