УДК:524.354.6

АНАЛИЗ НЕРАДИАЛЬНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ОДНОРОДНОЙ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

С.И.БАСТРУКОВ, И.В.МОЛОДЦОВА, А.А.БУКАТИНА

Поступила 16 марта 1995

Принята к печати 5 апреля 1995

Изучаются нерадиальные пульсации изолированной нейтронной звезды в двух континуальных моделях - самогравитирующей сферической массы невязкой несжимаемой жидкости и упругого ферми-континуума. Приведен детальный аналитический вывод частот собственных сфероидальных и крутильных колебаний однородной нейтронной звезды массой $1.4M_{\odot}$, основанный на представлениях о нейтронной материи как упругом ферми-континууме. Сравнение численных оценок частот собственных колебаний показывает, что обе модели предсказывают одинаковый порядок частот пульсаций $\sim 10^4$ Гц, однако частоты сфероидальных мод, рассчитанные в модели упругого ферми-континуума приблизительно в 2-2.5 раза выше частот, вычисленных в рамках гидродинамической теории Кельвина.

1. *Введение.* Изучение сейсмологии большинства звезд основывается на представлении о звездной материи как самогравитирующем веществе, находящемся в жидком агрегатном состоянии. В соответствии с этим звездная динамика конвекционных движений и пульсаций описывается уравнениями нерелятивистской гидродинамики и ньютоновской гравитации [1, 2]. В частности, для расчета частот нерадиальных пульсаций и звездотрясений часто применяется теория колебаний тяжелой сферической массы несжимаемой невязкой жидкости, развитая Кельвином (см., например, [2-4]). В работе [5] теория Кельвина, краткое изложение которой мы приводим в разделе 3, применена для анализа динамики вещества нейтронной звезды. Такой подход подразумевает, что движения ядерной сплошной среды подчиняются уравнениям классической гидродинамики. Между тем, исследования, проведенные в ядерной физике за два прошедших десятилетия, выявили тот факт, что ядерная материя обладает динамическими свойствами, присущими скорее упругой среде, а не жидкости. Концепция упругого ядерного ферми-континуума, введенная Бэрчем в работе [6], в последние годы получила существенное конструк-

тивное развитие и в настоящее время составляет основу практически всех макроскопических методов изучения коллективной ядерной динамики (см., например, [7-9] и литературу, приведенную в этих работах). Поскольку нейтронная звезда является объектом с крупномасштабным распределением ядерной материи, то представляется целесообразным исследовать ее сейсмологию с точки зрения уравнений макроскопической ядерной теории, в которой ядерная среда трактуется как упругий ферми-континуум. Первая попытка в этом направлении предпринята в короткой заметке [10]. В настоящей работе мы приводим детальный и существенно откорректированный анализ нерадиальных пульсаций нейтронной звезды в модели однородной сферической массы самогравитирующего упругого ферми-континуума нейтронов. В теории звездных пульсаций под нерадиальными колебаниями понимаются такие, при которых зависимость поля скорости флуктуирующего потока от радиуса не содержит узлов в объеме звезды. Одним из главных предместов нашего изучения является выяснение отличия между предсказаниями гидродинамической модели, в которой движения нейтронной материи описываются уравнениями самогравитирующей идеальной несжимаемой жидкости (эта модель исследована в [5]), и моделью упругого ферми-континуума, управляемого макроскопическими уравнениями ядерной среды. Так же как и в работе [5], эффекты собственной гравитации мы описываем в ньютоновском приближении. В литературе неоднократно отмечалось [11-13], что поскольку радиусы нейтронных звезд порядка гравитационного радиуса $R_G = 2GM/c^2$, то точные результаты могут быть получены с учетом эффектов общей теории относительности. Тем не менее, тот факт, что модель, основанная на ньютоновской теории тяготения, правильно передает значения статических равновесных параметров нейтронной звезды (прежде всего ее массы и радиуса) дает основания полагать, что использование нерелятивистской теории гравитации не приведет к серьезным ошибкам при получении оценок для динамических характеристик нейтронной звезды, таких как собственные частоты пульсаций.

2. *Нейтронная звезда в модели упругого самогравитирующего ферми-континуума.* Приводимые ниже построения основаны на выводах макроскопической ядерной теории, главный из которых состоит в том, что при плотностях порядка нормальной ядерной плотности, когда адронное вещество находится в нуклонной фазе, движения сплошной

ядерной материи подчиняются уравнениям флюид-динамического вида [7, 8, 14]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial V_l}{\partial x_l} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{dV_l}{dt} + \frac{\partial P_{lk}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial U}{\partial x_l} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{dP_{ij}}{dt} + P_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial x_k} + P_{jk} \frac{\partial V_l}{\partial x_k} + P_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0. \quad (2.3)$$

Принципиальным отличием рассматриваемого континуального подхода от гидродинамического является то, что наряду с уравнением непрерывности (2.1) и уравнением для скорости потока вещества (2.2) (основными уравнениями гидродинамики) используется уравнение (2.3), описывающее эволюцию упругих напряжений*. В равновесии эти напряжения обусловлены жесткостью орбит ферми-движения нуклонов в самосогласованном среднем поле U . Как отмечено выше мы изучаем движения однородной ядерной материи на таких масштабах, где доминирующую роль играют объемные силы ньютоновской самогравитации. Последнее означает, что потенциальная энергия собственной гравитации U подчиняется уравнению Пуассона:

$$\Delta U = 4\pi G\rho, \quad (2.4)$$

где G - гравитационная постоянная. В результате мы пришли к замкнутой самосогласованной системе уравнений, которая составляет основу изучаемой нами модели самогравитирующего упругого ферми-континуума нейтронов.

Равновесное распределение ньютоновского поля собственной гравитации выражается хорошо известным решением уравнения (2.4):

* В современной теории сплошных сред уравнения (2.1)-(2.3) известны как уравнения тринадцатимоментного приближения [15]. Такая терминология связана с определением массовой плотности ρ , трех компонент скорости потока V_l и девяти компонентного тензора упругих напряжений P_{ij} как соответственно нулевого, первого и второго импульсных моментов одночастичной функции распределения в фазовом пространстве. Эти уравнения получены на основе бесстолкновительного кинетического уравнения Больцмана, интегрированием последнего по объему импульсного пространства с импульсными весами нулевого, первого и второго порядка, соответственно (см., например, [7, 8]).

$$U_o^{in} = \frac{2\pi}{3} G \rho_0 (r^2 - 3R^2), \quad r \leq R, \quad (2.5)$$

$$U_o^{ex} = -\frac{4\pi R^3}{3r} G \rho_0, \quad r > R, \quad (2.6)$$

где R - радиус звезды. Индексом "0" отмечены ее равновесные характеристики. Следствием сферической симметрии ньютоновского взаимодействия является изотропное равновесное распределение напряжений в объеме звезды:

$$P_{ij}^0(r) = P_0(r) \delta_{ij}. \quad (2.7)$$

Явная радиальная зависимость этого поля может быть установлена из уравнения равновесия с таким граничным условием, что в центре звезды давление однородно, а главный вклад в него определяется давлением нерелятивистского вырожденного ферми-газа нейтронов (см., например, параграф 35 и, в частности, уравнение (35.5) в [11], где приведено обоснование данных граничных условий):

$$\nabla P_0(r) = -\rho_0 \nabla U_o^{in}(r), \quad P_0(0) = P_F. \quad (2.8)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$P_0(r) = -\frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 r^2 + P_F. \quad (2.9)$$

При заданной плотности из (2.9) может быть получена оценка на радиус нейтронной звезды, который определяется как радиус свободной от напряжений сферической поверхности $P_0(R)=0$, то есть поверхности, где давление, обусловленное собственной гравитацией

$$P_G = -\frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 r^2, \quad (2.10)$$

уравновешивается внутренним давлением нерелятивистского вырожденного ферми-газа нейтронов [11, 12]:

$$P_F = K \rho_0^{5/3} = \text{const}, \quad K = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{5m_n^{8/3}}. \quad (2.11)$$

Здесь m_n^* - эффективная масса нейтрона в ядерной среде с плотностью ρ_0 . Из условия

$$P_0(R) = 0, \text{ или } P_F = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 R^2, \quad (2.12)$$

следует, что равновесный радиус определяется выражением

$$R = \sqrt{\frac{3P_F}{2\pi G} \rho_0^{-1}}. \quad (2.13)$$

В рассматриваемой однородной модели плотность ρ_0 и давление

$$P_0(r) = P_F + P_G, \quad r < R \text{ и } P_0(R) = 0, \quad (2.14)$$

являются основными равновесными параметрами невращающейся изолированной нейтронной звезды. Как мы уже отмечали, несмотря на предположение об однородном распределении массы нейтронной сплошной материи, самогравитирующей в соответствии с теорией ньютоновского тяготения, рассматриваемая модель приводит к оценкам интегральных статических параметров нейтронной звезды, хорошо согласующихся с результатами "эволюционных" расчетов, полученных с учетом ее реальной стратифицированной структуры. При равновесной плотности ρ_0 , равной удвоенной нормальной ядерной плотности $\rho_0 = 2\rho_N$, где $\rho_N = 2.810^{14} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$, и эффективной массе нейтрона, равной $m_n^* = 0.72m_n$, модель даст следующие значения равновесного радиуса $R = 10.6 \text{ км}$ и массы $M = 1.4M_\odot$. При плотности $\rho_0 = 1.5\rho_N$ и эффективной массе $m_n^* = 0.7m_n$ из вышеприведенных формул получаем для массы - $M = 1.35M_\odot$ и радиуса $R = 11.7 \text{ км}$ (см. для сравнения [13, 16]).

2.1. Гамильтониан нерадиальных пульсаций. Расчет фундаментальных частот собственных колебаний звезды может быть выполнен стандартным вариационным методом. Предполагая, что нейтронная материя является несжимаемой, а поток массы в равновесном состоянии отсутствует, и используя процедуру линеаризации, уравнения (2.1)-(2.4) преобразуются к виду

$$\frac{\partial \delta V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.15)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta V_i}{\partial t} + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 \frac{\partial \delta U}{\partial x_i} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \delta P_{ij}}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial \delta V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta V_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\delta V_k \frac{\partial P_l}{\partial x_k} \right) = 0, \quad (2.17)$$

$$\Delta \delta U = 0. \quad (2.18)$$

Далее, умножая скалярно уравнение (2.16) на δV_i и интегрируя по объему звезды, получаем уравнение энергетического баланса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \rho_0 \delta V^2 d\tau - \int_V \delta P_{ij} \frac{\partial \delta V_i}{\partial x_j} d\tau + \oint_S \left[\rho_0 \delta U \delta V_i + \delta P_{ij} \delta V_j \right] \delta \sigma_i = 0 \quad (2.19)$$

которое контролирует сохранение энергии в процессе колебаний. Флуктуации в скорости возмущенного потока δV_i и в потенциале самогравитации δU представим в виде

$$\delta V_i(r, t) = \xi_i^L(r) \dot{\alpha}_L(t), \quad \delta U(r, t) = \phi^L(r) \alpha_L(t), \quad (2.20)$$

где L - мультипольный порядок колебания. Нормальная координата $\alpha_L(t)$ определяет зависимость от времени флуктуирующих переменных. Через $\xi^L(r)$ обозначено поле мгновенных смещений вещества в звезде. Подставляя (2.20) в (2.17), находим, что флуктуации в напряжениях определяются тензором

$$\delta P_{ij}(r, t) = - \left[\rho_0(r) \left(\frac{\partial \xi_i^L(r)}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j^L(r)}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\xi_k^L(r) \frac{\partial P_0(r)}{\partial x_k} \right) \right] \alpha_L(t) \quad (2.21)$$

Благодаря разделению пространственной и временной зависимости флуктуирующих переменных, подстановка (2.20) и (2.21) в уравнение энергетического баланса (2.19) позволяет свести последнее к гамильто-

ниану (собственной энергии) нормальных колебаний

$$H = \frac{M_L \dot{\alpha}_L^2}{2} + \frac{K_L \alpha_L^2}{2}, \quad (2.22)$$

который является интегралом движений. Параметры инерции M_L и жесткости K_L определяются выражениями

$$M_L = \int_V \rho_0 \xi_i^L \xi_i^L d\tau, \quad (2.23)$$

$$K_L = \frac{1}{2} \int_V \rho_0 \left(\frac{\partial \xi_i^L}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j^L}{\partial x_i} \right)^2 d\tau + \oint_S \left(\rho_0 \phi^L - \xi_j^L \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \right) \xi_i^L d\sigma_i. \quad (2.24)$$

Первый член в (2.24) явно отражает вклад объемных анизотропных упругих деформаций в восстанавливающую силу колебаний.

Отметим, что приведенное выражение для жесткости колебаний K_L получено с учетом условия свободной поверхности.

С физической точки зрения имеет смысл представить коэффициент жесткости в виде суперпозиции

$$K_L = K_L^F + K_L^G \quad (2.25)$$

что отвечает представлению внутреннего давления в виде суммы (2.14).

Коэффициент K_L^F описывает отклик нейтронной ферми-системы на упругие деформации ферми-сферы:

$$K_L^F = \frac{1}{2} \int_V \rho_F \left(\frac{\partial \xi_i^L}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j^L}{\partial x_i} \right)^2 d\tau. \quad (2.26)$$

Коэффициент жесткости K_L^G , обусловленный гравитационной упругостью среды

$$K_L^G = \frac{1}{2} \int_V \rho_G \left(\frac{\partial \xi_i^L}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j^L}{\partial x_i} \right)^2 d\tau + \oint_S \left(\rho_0 \phi^L - \xi_j^L \frac{\partial \rho_G}{\partial x_j} \right) \xi_i^L d\sigma_i \quad (2.27)$$

Таким образом, для расчета фундаментальных частот $\omega_L^2 = K_L / M_L$ гармонических во времени пульсаций звезды необходимо вычислить:

- 1) пространственную зависимость поля флуктуирующей скорости δV_i (более точно, поля смещений ξ_i^L);
- 2) пространственную зависимость флуктуаций в потенциале тяготения δU , определяемую функцией ϕ^L .

2.2. Частоты сфероидальных пульсаций. При сфероидальных мультипольных колебаниях произвольная сферическая поверхность в объеме звезды приобретает формы гармонических сфероидов, уравнение поверхности которых имеет вид:

$$R(t) = R (1 + \alpha_L(t) P_L(\cos\theta)). \quad (2.28)$$

Здесь R - радиус невозмущенной сферической поверхности, $P_L(\cos\theta)$ - полином Лежандра порядка L ; мы используем систему с фиксированной полярной осью. Сфероидальные колебания сопровождаются мгновенными смещениями вещества в среде, которые могут быть описаны потенциальным векторным полем вида $\xi_i^L = \text{grad}_i \psi^L$. Подставляя это поле в уравнение несжимаемости (2.15), получаем

$$\Delta \psi^L = 0, \quad \psi^L = A_L r^L P_L(\cos\theta). \quad (2.29)$$

Произвольная константа A_L фиксируется условием совместности флуктуаций радиальной компоненты поля смещений со скоростью искажений поверхности, задаваемой уравнением (2.28). Это условие имеет вид:

$$\delta V_r = R(t) \quad (2.30)$$

Окончательное выражение для поля смещений при сфероидальных колебаниях однородной звезды представляется следующим образом:

$$\xi_i^L = \frac{1}{LR^{L-2}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}. \quad (2.31)$$

Параметр инерции M_L , рассчитанный с полем (2.31), равен:

$$M_L = \frac{4\pi\rho_0 R^5}{L(2L+1)} \quad (2.32)$$

Вариация пространственного распределения поля собственной гравитации δU находится как решение уравнения Лапласа (2.18), которое должно быть дополнено следующими граничными условиями

$$U^{in} + \delta U^{in} = U^{ex} + \delta U^{ex}, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial U^{in}}{\partial r} + \frac{\partial \delta U^{in}}{\partial r} = \frac{\partial U^{ex}}{\partial r} + \frac{\partial \delta U^{ex}}{\partial r}, \quad \text{при } r = R(t). \quad (2.34)$$

Регулярное в центре решение уравнения (2.18) с граничными условиями (2.33) и (2.34) имеет вид:

$$\delta U^{in} = -\frac{4\pi}{R^{L-2}} \frac{G\rho_0}{(2L+1)} r^L P_L(\cos\theta) \alpha_L. \quad (2.35)$$

Откуда находим, что функция ϕ^L в выражении для жесткости колебаний равна:

$$\phi^L = -\frac{4\pi G\rho_0 R^2}{(2L+1)} P_L(\cos\theta). \quad (2.36)$$

Коэффициент жесткости, связанный с упругими деформациями ферми-сферы имеет вид:

$$K_L^F = 8\pi K \rho_0^{5/3} R^3 \frac{L-1}{L}. \quad (2.37)$$

Для жесткости гравитационно-упругих колебаний получаем

$$K_L^G = \frac{32}{3} \pi^2 G \rho_0^2 R^5 \frac{(L-1)}{(2L+1)^2} \left[1 - \frac{4L^2-1}{2L} \right]. \quad (2.38)$$

Детали расчета объемных интегралов представлены в Приложении. Из приведенных выражений для жесткостей сфероидальных колебаний

видно, что дипольная мода исключена. Возбуждение дипольного поля смещений дает вклад только в кинетическую энергию, что соответствует движению звезды как целого без изменения ее внутреннего состояния. Данный вывод является следствием предположения о несжимаемости нейтронной материи.

Собственные частоты сфероидальных пульсаций звезды в рассматриваемой однородной модели даются выражением

$$\omega_L^2 = \omega_F^2 2(2L+1)(L-1) + \omega_G^2 \frac{2L(L-1)}{(2L+1)} \left[1 - \frac{4L^2-1}{2L} \right], \quad (2.39)$$

где $\omega_F^2 = P_F / (\rho_0 R^2)$ и $\omega_G^2 = 4\pi G \rho_0 / 3$. Характерное отличие основной частоты квантово-упругих колебаний ω_F от частоты гравитационно-упругих колебаний ω_G состоит в том, что первая зависит от радиуса звезды, в то время как вторая - только от ее плотности. Численные значения частот квадрупольной, октупольной и гексадекапольной сфероидальных мод, рассчитанных по формуле (2.39) при средней плотности нейтронной материи $\rho_0 = 2\rho_N$ для звезды радиуса 10.6 км и массой, равной $1.4M_\odot$, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Мультипольный порядок моды L	Частота ω_L	
	упругий континуум	невязкая жидкость $\times 10^4$ Гц
2	2.1	1.1
3	3.0	1.6
4	3.7	2.0

Частоты сфероидальных пульсаций мультипольного порядка L для однородной нейтронной звезды радиуса 10.6 км и массы $1.4M_\odot$, в моделях упругого ферми-континуума и невязкой несжимаемой жидкости. Средняя плотность нейтронного вещества в звезде $\rho_0 = 2\rho_N$, где $\rho_N = 2.8 \cdot 10^{14}$ г см⁻³.

2.3. *Крутильные осцилляции нейтронной звезды.* Свойство динамической упругости нейтронного ферми-вещества позволяет обсудить возможность возбуждения в объеме звезды сдвиговых крутильных колебаний. Такие колебания не могут быть описаны в гидродинамической модели звездной материи. Поперечно-сдвиговые колебания связаны с возбуждением локальных ротационных осцилляций, описываемых тороидальным полем скорости

$$\delta \mathbf{V} = A_L \operatorname{rot} r^L P_L(\cos\theta) \dot{\alpha}_L(t) = [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)], \quad (2.40)$$

где

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = -A_L \operatorname{grad} r^L P_L(\cos\theta) \dot{\alpha}_L(t),$$

частота локальных (нетвердотельных) вращательных осцилляций. Нормальная координата $\alpha_L(t)$ в этом случае имеет смысл азимутального угла закручивания потока вокруг полярной оси. Скорости крутильных колебаний соответствует поле мгновенных смещений следующего вида

$$\boldsymbol{\xi} = A_L \operatorname{rot} r^L P_L(\cos\theta). \quad (2.41)$$

Подставляя последнее выражение в формулу для массового коэффициента упругих пульсаций (2.23), получаем

$$\mathcal{M}_L = 4\pi\rho_0 R^{2L+3} A_L^2 \frac{L(L+1)}{(2L+1)(2L+3)}. \quad (2.42)$$

Этот коэффициент имеет смысл момента инерции ротационных колебаний. Действительно, при $L=1$ поле завихренности $\boldsymbol{\omega}$ оказывается однородным, что соответствует твердотельному вращению. Легко проверить, что массовый коэффициент $\mathcal{M}_1$ точно совпадает с моментом инерции твердого шара $\mathcal{J} = \mathcal{M}_1 = (2/5)MR^2$, если принять, что произвольная константа $A_L = 1/(R^{L-1})$. Для нейтронной звезды массой $1.4M_\odot$ и радиуса 10.6 км момент инерции равен $\mathcal{J} = 1.310^{45} \text{ г}^2 \cdot \text{см}^2$. В соответствии с данным значением константы A_L выражение (2.42) приобретает вид:

$$\mathcal{M}_L = \frac{4\pi\rho_0 R^5 L(L+1)}{(2L+1)(2L+3)}. \quad (2.43)$$

Коэффициент жесткости крутильных колебаний, связанный с реакцией изотропного равновесного ферми-распределения нейтронов на его анизотропные искажения, имеет вид:

$$\kappa_L^F = 8\pi K \rho_0^2 / 3 R^2 \frac{L(L-1)(L+1)}{(2L+1)}. \quad (2.44)$$

Для коэффициента гравитационно-упругой жесткости получаем

$$\kappa_L^G = \frac{8\pi^2}{3} G \rho_0^2 R^5 \frac{L(L-1)(L+1)}{(2L+1)(2L+3)}. \quad (2.45)$$

Заметим, что поверхностный интеграл в выражении (2.24) равен нулю и, следовательно, поверхностные флуктуации в потенциале тяготения не дают вклада в восстанавливающую силу поперечно-сдвиговых пульсаций. Другими словами, крутильные осцилляции нейтронной звезды имеют объемное происхождение. Как следует из полученных выражений для жесткостей упругих колебаний, дипольная крутильная мода - отсутствует. При возмущении тороидального поля смещений дипольной симметрии восстанавливающая сила не возникает. Поэтому вся энергия расходуется на кинетическую энергию твердотельного вращения.

Частота крутильных колебаний однородной сферической массы несжимаемого самогравитирующего нейтронного ферми-газа представляется выражением:

$$\omega_L^2 = \omega_F^2(2L+3)(L-1) - \omega_G^2(L-1). \quad (2.46)$$

Численные значения частот нижайших крутильных мод с $L=2, 3$ и 4 равны:

$$\omega_2 = 1.2 \cdot 10^4 \text{ Гц}, \quad \omega_3 = 1.8 \cdot 10^4 \text{ Гц}, \quad \omega_4 = 2.2 \cdot 10^4 \text{ Гц}.$$

Сравнение этих оценок с частотами сфероидальных колебаний, приведенных в табл. 1, показывает, что частоты крутильных колебаний всегда ниже частот сфероидальных пульсаций.

3. Нерадиальные пульсации нейтронной звезды в модели однородной сферической массы невязкой несжимаемой жидкости. Для того, чтобы выяснить различие между моделью однородной звезды, движения материи в которой контролируются уравнениями

упругой среды (2.1)-(2.3), и моделью, в которой звездная среда описывается уравнениями гидродинамики (2.1)-(2.2), мы приводим вывод кельвиновских мод собственных колебаний сферической однородной массы несжимаемой невязкой жидкости, используя изложенный выше вариационный метод.

Гидродинамика невязкой самогравитирующей жидкости описывается уравнениями:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad (3.2)$$

$$\Delta U = 4\pi G \rho. \quad (3.3)$$

Пространственное распределение равновесных напряжений определяется из уравнения равновесия с граничным условием, отвечающим свободной поверхности:

$$\nabla p_0(r) = -\rho_0 \nabla U_0^m(r), \quad p_0(R) = 0. \quad (3.4)$$

Решение имеет вид

$$p_0 = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 (R^2 - r^2). \quad (3.5)$$

В линейном приближении эволюция возмущений в несжимаемой жидкости подчиняется уравнениям:

$$\frac{\delta \rho V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.6)$$

$$\rho_0 \frac{\delta \rho V_i}{\partial t} + \frac{\delta P}{\partial x_i} + \rho_0 \frac{\delta U}{\partial x_i} = 0, \quad (3.7)$$

$$\Delta \delta U = 0. \quad (3.8)$$

Умножая скалярно линеаризованное уравнение Эйлера (2.29) на δV , и интегрируя по объему звезды, снова получаем уравнение энергетического баланса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_0 \frac{\delta V^2}{2} d\tau + \oint_S (\delta P + \rho_0 \delta U) \delta V_i \delta \sigma_i = 0. \quad (3.9)$$

Расчет флуктуаций скорости δV , возбуждаемого потока и потенциала собственного тяготения δU проводится по схеме предыдущего раздела. Единственной неизвестной переменной является вариация давления δP . Действуя оператором дивергенции на уравнение (3.7), и учитывая (3.6) и (3.8), находим, что δP подчиняется уравнению Лапласа, которое дополняется условием отсутствия каких-либо напряжений на пульсирующей поверхности:

$$\Delta \delta P = 0, \quad P_0(r') + \delta P(r') = 0 \Big|_{r'=R', (r=R)}. \quad (3.10)$$

Решение уравнения (3.10) имеет вид:

$$\delta P = p^L(r) \alpha_L(t), \quad p^L(r) = \frac{4\pi}{3 R^{L-2}} G \rho_0^2 r^L P_L(\cos \theta). \quad (3.11)$$

Подставляя (2.20), (2.36) и (3.11) в (3.9), получаем стандартное уравнение нормальных колебаний

$$M_L \ddot{\alpha}_L^2 + K_L \alpha_L^2 = 0, \quad (3.12)$$

в котором массовый параметр M_L определяется выражением (2.32), а параметр жесткости

$$K_L = \oint_S (p^L + \rho_0 \phi^L) \xi_i^L d\sigma_i = \frac{32}{3} \pi^2 G \rho_0^2 R^5 \frac{(L-1)}{(2L+1)^2}. \quad (3.13)$$

В результате приходим к хорошо известному результату Кельвина:

$$(\omega_L^K)^2 = \omega_G^2 \frac{2L(L-1)}{2L+1}. \quad (3.14)$$

Кельвиновские моды соответствуют собственным нерадиальным пульсациям самогравитирующей сферической массы невязкой несжимаемой жидкости. В табл. 1 приведены частоты нижайших мод для однородной звезды радиуса $R=10.6$ км и массы $M=1.4M_\odot$.

Видно, что частоты, рассчитанные в гидродинамической модели, оказываются систематически ниже, чем частоты предсказываемые моделью упругого ферми-континуума нейтронов, движения которого подчиняются уравнениям самогравитирующего упругого ферми-континуума.

4. *Заключение.* В настоящей работе представлен анализ нерадиальных пульсаций однородной нейтронной звезды в двух континуальных динамических моделях. В гидродинамической модели движения звездного вещества описываются уравнениями гидродинамики невязкой несжимаемой жидкости. Сфероидальные пульсации в этой модели характеризуются кельвиновскими модами, которые зависят лишь от плотности вещества.

Параллельно рассмотрен вариационный метод анализа нерадиальных пульсаций нейтронной звезды в рамках модели упругого нейтронного ферми-континуума. Устойчивость равновесной конфигурации рассчитана как результат уравнивания давления, обусловленного собственной гравитацией, давлением нерелятивистского вырожденного ферми-газа нейтронов. Спектр нерадиальных гравитационно-упругих колебаний получен в аналитическом виде, аналогичном кельвиновским модам собственных пульсаций однородной сферической массы самогравитирующей несжимаемой невязкой жидкости. Показано, что частоты сфероидальных колебаний заданной мультипольности для звезды, моделируемой самогравитирующей однородной массой упругого ферми-континуума нейтронов в 2-2.5 раза выше частот, предсказываемых гидродинамической моделью. Изучены объемные поперечно-сдвиговые колебания пульсации нейтронной звезды, которые обусловлены исключительно динамической упругостью ядерного ферми-континуума. В звездной среде, управляемой уравнениями гидродинамики, такие моды не возникают.

В заключение отметим, что в настоящее время имеются лишь косвенные свидетельства о пульсациях нейтронных звезд. Так, по мнению Кокса [1], тонкие детали, наблюдаемые в переменном радиоизлучении пульсаров и имеющие характерное время порядка нескольких миллисекунд [17], вполне могут быть следствием пульсаций. Добавим также, что нерадиальные пульсации могут быть одной из причин наблюдаемых сбоев в спектре пульсаров. Регистрируемая длительность сбоев $T=2\pi/\omega \approx 10^{-4}$ с, что находится в согласии с полученными в данной работе оценками для периодов нерадиальных пульсаций нейтронной звезды.

Авторы признательны проф. В.В.Папоюну за обсуждение ряда вопросов, затронутых в настоящей статье.

Приложение.

В системе с фиксированной полярной осью компоненты поля мгновенных смещений при сфероидальных пульсациях звезды имеют вид:

$$\xi_r = A_L L r^{L-1} P_L(\mu), \quad \xi_\theta = -A_L (1-\mu^2)^{1/2} r^{L-1} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu},$$

$$\xi_\phi = 0, \quad A_L = \frac{1}{LR^{L-2}},$$

где $\mu = \cos\theta$.

Компоненты тензора напряжений представляются соотношениями

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} = A_L L(L-1) r^{L-2} P_L(\mu),$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = -\frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{r} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \mu} + \frac{\xi_r}{r} = A_L r^{L-2} \left(\mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} - L^2 P_L(\mu) \right)$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = \frac{1}{r(1-\mu^2)^{1/2}} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} + \frac{\xi_r}{r} + \frac{\xi_\theta}{r} \frac{\mu}{(1-\mu^2)^{1/2}} = A_L r^{L-2} \left(LP_L(\mu) - \mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} \right)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = -\frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{r} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \mu} - \frac{\xi_\theta}{r} = -A_L(L-1) r^{L-2} (1-\mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu},$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_0}{\partial r} = -A_L(L-1)r^{L-2}(1-\mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = \frac{1}{r(1-\mu^2)^{1/2}} \frac{\partial \xi_r}{\partial \phi} - \frac{\xi_\phi}{r} = 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_\phi}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi_0}{\partial \mu} - \frac{\xi_\phi}{r} \frac{\mu}{(1-\mu^2)^{1/2}} = 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = -\frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{r} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \mu} = 0.$$

Вычисления значительно упрощают следующие интегралы

$$\int_{-1}^{+1} P_L^2(\mu) d\mu = \frac{2}{(2L+1)}; \quad \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) \left(\frac{dP_L(\mu)}{d\mu} \right)^2 d\mu = \frac{2L(L+1)}{(2L+1)};$$

$$\int_{-1}^{+1} \mu P_L(\mu) \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} d\mu = \frac{2L}{(2L+1)}; \quad \int_{-1}^{+1} \left(\mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} \right)^2 d\mu = \frac{L(L+1)(2L-1)}{(2L+1)}.$$

Два последних получены с использованием рекуррентных соотношений между полиномами Лежандра. Объемный интеграл в формулах для жесткости сфероидальных колебаний приводится к выражению

$$\frac{1}{2} \int_V P_0(r) \left(\frac{\partial \xi_i^L}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j^L}{\partial x_i} \right)^2 d\tau = 8\pi A_L^2 L(L-1)(2L-1) \int_0^R P_0(r) r^{2L-2} dr,$$

где $P_0(r)$ произвольная функция радиуса r . Аналогичные выражения для расчета частот крутильных колебаний приведены в [8].

ANALYSIS OF NONRADIAL PULSATIONS
OF HOMOGENEOUS NEUTRON STAR

S.I.BASTRUKOV, I.V.MOLODTSOVA, A.A.BUKATINA

We study nonradial pulsations of isolated neutron star within two continuum models - self-gravitating spherical mass of incompressible inviscid liquid and an elastic Fermi-continuum. Analytic derivation of frequency of spheroidal and torsional pulsations is presented for a homogeneous neutron star with mass $1.4M_{\odot}$ which is modelled by spherical mass of an elastic neutron matter. Both models predict the same order of magnitude for the frequencies of eigenpulsation $\sim 10^4$ Hz, however, the frequencies of spheroidal modes computed in the model of an elastic Fermi-continuum has been found to be 2-2.5 times higher than those calculated from hydrodynamic Kelvin theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J.P.Cox*, Theory of stellar pulsations, Princeton, 1980.
2. *W.Unno, Y.Osaki, H.Ando, H.Shibahashi*, Nonradial oscillations of stars, Tokyo University Press, 1979.
3. *S.Chandrasekhar*, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon, 1961.
4. *M.L.Aizerman and P.Smeyers*, Astrophys. and Space Sci. **48**, 123, 1976.
5. *N.K.Glendenning, F.Weber and S.A.Moszkowski*, Phys. Rev., **C45**, 844, 1992.
6. *G.F.Bertsch*, Ann. Phys. **86**, 138, 1974.
7. *J.R.Nix and A.J.Sierk*, Phys. Rev. **C21**, 396, 1980.
8. *S.I.Bastrukov and V.V.Gudkov*, Z. Phys. **A341**, 395, 1992; *С.И.Баструков, И.В.Молодцова*, ЭЧАЯ **26**, 415, 1995.
9. *S.I.Bastrukov, I.V.Molodtsova and V.M.Shilov*, Int. J. Mod. Phys. **E2**, 731, 1993; Phys. Scripta **51**, 54, 1995.
10. *S.I.Bastrukov*, Mod. Phys. Lett. **A8**, 711, 1993.
11. *Г.С.Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
12. *S.L.Shapiro and S.A.Teukolsky*, Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, Wiley, New York, 1983.

13. *А.Б.Мигдал, Д.Н.Воскресенский, Е.Е.Саперштейн, М.А.Троицкий*, Пионные степени свободы в ядерной материи, Наука, М., 1991.
14. *S.I.Bastrukov*, Phys.Rev E49, No.3, 1994.
15. *Ю.Л.Климонтович*, Статистическая физика, Наука, М., 1982.
16. Conference Proceedings, Kyoto, Japan, Nov.6-10, 1990; The structure and evolution of NEUTRON STARS, 1992. Edited by Pines, D., Tamagaki, R., and Tsuruta S. Addison-Wesley, New York.
17. *J.H.Taylor and G.R.Huguenin*, Astrophys. J. 167, 273, 1971.