

УДК 52-323

ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА ПРИ ЧАСТИЧНОМ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ПО ЧАСТОТАМ.

А.Х.ХАЧАТРЯН

Поступила 16 сентября 1994

Принята к печати 15 февраля 1995

В статье приводится общий анализ систем уравнений нестационарного переноса резонансного излучения с учетом нелинейных эффектов и при частичном перераспределении квантов по частотам на модели двухуровневых атомов. Предлагается способ решения соответствующей задачи в трехмерной плоскопараллельной среде.

1. Введение. Как известно, поле излучения резонансного рассеяния зависит от плотности возбужденных атомов, а тем самым и от распределения атомов по скоростям, с одной стороны, а распределение возбужденных атомов по скоростям обусловлено полем излучения, с другой [1-6]. Поэтому строгое рассмотрение задачи резонансного рассеяния в линии в звездных атмосферах при NLTE требует совместного решения уравнения переноса и соответствующего кинетического уравнения.

Сперва вышеуказанные задачи рассматривались в предположении, что распределение атомов как в основном, так и в возбужденном состоянии является максвелловским [7]. Впервые в работе [1] на модели двухуровневых атомов показано, что если распределение атомов в основном состоянии близко к максвелловскому, то то же самое нельзя сказать для атомов, находящихся в возбужденном состоянии. Это связано с тем, что длина свободного пробега возбужденного атома намного меньше длины свободного пробега атомов, а также по сравнению с характеристическими длинами изменения макроскопических величин (температура, плотность и т.д.).

Нестационарные задачи переноса были рассмотрены другими авторами [8-11] для некоторых частных случаев. В работах [10, 11] были рассмотрены

нелинейные нестационарные задачи переноса, рассеяние считая либо когерентным, либо полностью некогерентным, что в скрытой форме предполагает максвелловское распределение атомов по скоростям.

В настоящей работе рассматривается задача при довольно общих условиях, а именно: выводится система уравнений нелинейного нестационарного переноса излучения при частичном перераспределении по частотам. Предлагается способ решения соответствующей задачи в плоском слое.

2. *Рассмотрим газ*, состоящий из двухуровневых атомов и свободных электронов. Макроскопические параметры - температура T , плотность атомов n_0 и электронов n_e будем считать заданными. Будем считать также, что внешние силы отсутствуют. В рамках выбранной нами модели поле излучения не меняет максвелловского распределения всех атомов по скоростям. Однако на разных уровнях, особенно на верхнем уровне, отклонение распределения по скоростям от максвелловского ощутимо. В линейном приближении вполне естественно предполагать, что распределение атомов по скоростям в основном состоянии является максвелловским, в отличие от распределения возбужденных атомов. Это предположение связано с тем, что в звездных атмосферах время жизни возбужденного атома $t_{ex} \sim 1/A_{21}$ намного меньше по сравнению со временем между двумя последовательными столкновениями ($t_{ст}$)

$$\delta = \frac{t_{ex}}{t_{ст}} = \frac{n_s \sigma v \sqrt{1 + \frac{m}{m_s}}}{A_{21}}$$

где σ - эффективное сечение рассеяния, n_s и m_s - концентрация и масса сталкивающихся частиц, v - скорость теплового движения атома, m - масса атома. Оценки показывают, что почти всегда $\delta \ll 1$. Так, например, для резонансной линии H λ 1215 (L_{α}), $\delta \sim 10^{-2}$ (для звезд типа G0) и $\delta \sim 10^{-4}$ (для A0), для линии CaII (λ 3933) δ порядка $5 \cdot 10^{-2}$ (для звезд типа F0) и 0.5 (для G0), и, наконец, для линии HeI λ (584), $\delta \sim 5 \cdot 10^{-3}$ (для B0). Это означает, что распределение атомов в возбужденном состоянии на самом деле далеко от равновесного. Последнее утверждение в свою очередь означает, что допущение о совпадении профилей поглощения и спонтанного излучения ($\varphi = \psi$) далеко от реальности. Эта модель согласована с моделью Оксенюса, предложенной им в 1965 г. (см.[1]).

Имссм

$$F_1(\bar{r}, \bar{v}, t) + F_2(\bar{r}, \bar{v}, t) = n_0 f_0^M, \quad (1)$$

$$n_1 + n_2 = n_0, \quad (2)$$

где $F_1 = n_1 f_1(\bar{v})$ и $F_2 = n_2 f_2(\bar{v})$ функции распределения атомов, соответственно, в основном и возбужденном состоянии, причем

$$\int F_k(\bar{r}, \bar{v}, t) d^3 v = n_k(\bar{r}, t) \quad (k = 1; 2). \quad (3)$$

Кинетическое уравнение Больцмана для возбужденных атомов имеет вид:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial F_2}{\partial \bar{r}} = StF_2. \quad (4)$$

Здесь StF_2 - интеграл столкновения, \bar{v} - средняя скорость теплового движения атома.

В работах [2, 4] детально изучается конвекционный перенос возбужденных атомов, и было показано, что в звездных атмосферах он пренебрежимо мал. В этих работах было показано, что членом, учитывающим диффузионный поток возбужденных атомов, можно

пренебречь, если выполняется условие $\frac{l_{ex}}{l_{ph}} \ll 1$, где l_{ex} - длина свободного

пробега возбужденных атомов $l_{ex} \sim \frac{v}{A_{21}}$, l_{ph} - длина свободного пробега фотонов.

В интеграл столкновения входят следующие члены

$$StF_2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial t} \right)_{inel} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial t} \right)_{ph}, \quad (5)$$

где

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial t} \right)_{inel} = a_{12} F_1(\bar{v}) - a_{21} F_2(\bar{v}), \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial t}\right)_{ph} = B_{12}F_1(\bar{v})M(\bar{v}) - A_{21}F_2(\bar{v}) - B_{21}F_2(\bar{v})N(\bar{v}). \quad (7)$$

Член $\left(\frac{\partial F_2}{\partial t}\right)_{inel}$ описывает неупругие столкновения с электронами, а второй член описывает взаимодействие с полем. Здесь a_{12} и a_{21} - коэффициенты электронных ударов первого и второго рода, B_{12} , B_{21} , A_{21} - эйнштейновские коэффициенты переходов.

$$M(\bar{v}) = \iint I_\nu(\bar{n}') q\left(\nu - \frac{v_0}{c} \bar{n}' \bar{v}\right) \frac{d\Omega'}{4\pi} d\nu', \quad (8)$$

$$N(\bar{v}) = \iint I_\nu(\bar{n}') E\left(\nu - \frac{v_0}{c} \bar{n}' \bar{v}\right) \frac{d\Omega'}{4\pi} d\nu'. \quad (9)$$

Здесь $I_\nu(\bar{n}, \bar{r})$ - искомая интенсивность излучения с частотой ν , с направлением \bar{n} , $q\left(\nu - \frac{v_0}{c} \bar{n} \bar{v}\right)$ и $E\left(\nu - \frac{v_0}{c} \bar{n} \bar{v}\right)$ - нормированные микроскопические профили поглощения и излучения, соответственно, в системе отсчета атома, $d\Omega$ - телесный угол, c - скорость света.

Следует отметить, что приближение полного перераспределения по частотам в лабораторной системе означает следующие предположения (см. [1-6]):

а) распределение атомов по скоростям в основном и возбужденном состоянии является максвелловским,

б) полное перераспределение в системе отсчета атома, т.е. $E=q$. В дальнейшем в отличие от условия а), будем считать, что условие б) выполняется.

Умножая обе части уравнения (4) на $q\left(\nu - \frac{v_0}{c} \bar{n} \bar{v}\right)$ с учетом (5)-(9), и интегрируя по всем скоростям, получим

$$\frac{\partial n_2 \Psi_v(\bar{n})}{\partial t} = n_1 \left[a_{12} \Phi_v(\bar{n}) + B_{12} \iint R(v, \bar{n}, v', \bar{n}') I_v(\bar{n}') \frac{d\Omega'}{4\pi} d v' \right] - n_2 \Psi_v(\bar{n}) [a_{21} + A_{21} + B_{21} J_v(\bar{n})], \quad (10)$$

где

$$\Phi_v(\bar{n}) = \int f_1(\bar{v}) q\left(v - \frac{v_0}{c} \bar{n} \bar{v}\right) d^3 v, \quad (11)$$

$$\Psi_v(\bar{n}) = \int f_2(\bar{v}) q\left(v - \frac{v_0}{c} \bar{n} \bar{v}\right) d^3 v. \quad (12)$$

Профили поглощения и излучения, соответственно,

$$R(v, \bar{n}, v', \bar{n}') = \int f_1(\bar{v}) q\left(v - \frac{v_0}{c} \bar{n} \bar{v}\right) q\left(v' - \frac{v_0}{c} \bar{n}' \bar{v}\right) d^3 v, \quad (13)$$

функция перераспределения по частотам и направлениям,

$$J_v(\bar{n}) = \frac{\int f_2(\bar{v}) N(\bar{v}) q\left(v - \frac{v_0}{c} \bar{n} \bar{v}\right) d^3 v}{\int f_2(v) q\left(v - \frac{v_0}{c} \bar{n} \bar{v}\right) d^3 v}. \quad (14)$$

Предположим, что функция $N(\bar{v})$ слабо зависит от \bar{v} и заменим ее усредненным значением:

$$J = \langle N(\bar{v}) \rangle = \int f_2(\bar{v}) N(\bar{v}) d^3 v = \iint \Psi_v(\bar{n}') I_v(\bar{n}') d v' \frac{d\Omega'}{4\pi}. \quad (15)$$

Это предположение было принято также другими авторами (см. [3, 12-14])

С учетом (15), уравнение (10) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_2 \Psi_\nu(\bar{n})}{\partial t} = & n_1 \left[a_{12} \varphi_\nu(\bar{n}) + B_{12} \iint R(\nu, \bar{n}, \nu', \bar{n}') I_\nu(\bar{n}') d\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi} \right] - \\ & - n_2 \Psi_\nu(\bar{n}) \left[a_{21} + A_{21} + B_{21} \iint \Psi_\nu(\bar{n}') I_\nu(\bar{n}') d\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение переноса в спектральной линии имеет вид (см. [1]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\bar{n}, \bar{r}, t)}{\partial t} + \bar{n} \frac{\partial I_\nu(\bar{n}, \bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} = \\ = - \frac{h\nu_0}{4\pi} [n_1 B_{12} \varphi_\nu(\bar{n}) - n_2 B_{21} \Psi_\nu(\bar{n})] I_\nu(\bar{n}, \bar{r}, t) + \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \Psi_\nu(\bar{n}). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь c - скорость света.

Интегрируя уравнение (16) по ν от 0 до $+\infty$ и по Ω с учетом

$$\int \varphi_\nu(\bar{n}) d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} = \int \Psi_\nu(\bar{n}) d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} = 1$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_2}{\partial t} = & n_1 \left[a_{12} + B_{12} \int \varphi_\nu(\bar{n}') I_\nu(\bar{n}') \frac{d\Omega'}{4\pi} \right] - \\ & - n_2 \left[a_{21} + A_{21} + B_{21} \int \Psi_\nu(\bar{n}') I_\nu(\bar{n}') d\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, задача сводится к совместному решению уравнений (1), (17), (16), (18). Очевидно, что эта задача является достаточно сложной.

3. *Ниже мы опишем простой метод решения задачи в случае плоской геометрии.* Этот метод примыкает к методу полной линсаризации [7], в котором члены, описывающие вынужденное излучение, учитываются приближенно. Пусть плоско-параллельный слой, заполненный атомами одного типа с двумя энергетическими уровнями и свободными электронами, со стороны границы $z=0$ освещается излучением, распределение которого по частотам, направлениям и временам

описывается интенсивностью $I_0(x, \eta, t)$, где $x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$ - безразмерная

частота, $\Delta\nu_D$ - ширина линии, ν_0 - центральная частота линии. Сначала будем считать, что температура газа низкая $h\nu_0 \gg kT$ ($h\nu_0$ - энергия возбуждения атома), и что интенсивность падающего излучения не слишком велика (линейное приближение).

В линейном приближении уравнение переноса (17) и уравнение (16) принимает вид:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I(z, x, \eta, t)}{\partial t} + \eta \frac{\partial I(z, x, \eta, t)}{\partial z} = -\frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \varphi(x) I(z, x, \eta, t) + \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \Psi(x). \quad (19)$$

$$\frac{\partial n_2 \Psi}{\partial t} = n_1 \left[a_{12} \varphi(x) + \frac{B_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x') dx' \int_{-1}^1 I(z, x', \eta, t) d\eta \right] - \quad (20)$$

$$-n_2 \Psi(x) [a_{21} + A_{21}],$$

где $r(x, x')$ - усредненная по направлениям функция перераспределения.

В уравнении (19) перейдем к новому аргументу

$$d\tau = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} dz. \quad (21)$$

Тогда будем иметь

$$t_2 \frac{\partial I}{\partial t} + \eta \frac{\partial I}{\partial \tau} = -\varphi(x) I(\tau, x, \eta, t) + Q(\tau, x, t). \quad (22)$$

Здесь

$$Q(\tau, x, t) = \frac{n_2 A_{21} \Psi(x)}{n_1 B_{12}}; \quad t_2 = \frac{4\pi}{h\nu_0 c n_1 B_{12}}, \quad (23)$$

где t_2 - среднее время, проводимое фотоном в пути между двумя последовательными рассеяниями.

Из (20) с учетом (23) имеем

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial Q}{\partial t} = -Q(\tau, x, t) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, x', \eta) d\eta + \frac{\lambda}{2} g_0 \varphi(x). \quad (24)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + a_{21}}; \quad g_0 = \frac{2 a_{12}}{B_{12}}, \quad (25)$$

где $t = \beta^{-1} = \frac{1}{A_{21} + a_{21}}$ - среднее время, проводимое фотоном в поглощенном состоянии, или среднее время между двумя последовательными столкновениями (спонтанное или неупругое) возбужденных атомов.

К уравнению (24) присоединяется начальное условие

$$Q(\tau, x, 0) = q_0(\tau, x). \quad (26)$$

Интегрируя уравнение (24) с начальным условием (26), и подставляя в уравнение (22), для искомой интенсивности получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} t_2 \frac{\partial I}{\partial t} + \eta \frac{\partial I}{\partial \tau} = & -\varphi(x) I(\tau, x, \eta, t) + \frac{\lambda}{2} \varphi(x) g_0 [1 - e^{-\beta t}] + \\ & + \frac{\lambda}{2} \beta \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x') dx' \int_{0}^1 \int_{-1}^1 e^{-\beta(t-t')} I(\tau, x', \eta', t') d\eta' dt' + q_0(\tau, x) e^{-\beta t} \end{aligned} \quad (27)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} I(0, x, \eta, t) &= I_0(x, \eta, t), \quad \text{при } \eta > 0, \\ I(\tau_0, x, \eta, t) &= 0, \quad \text{при } \eta < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Применим к уравнению (27) преобразование Лапласа по t .
В результате получим

$$\begin{aligned}
 & t_2 [I(0, \tau, x, \eta) - s\bar{I}(s, x, \eta, \tau)] + \eta \frac{\partial \bar{I}(\tau, x, \eta, s)}{\partial \tau} = \\
 & = -\varphi(x) \bar{I}(\tau, x, \eta, s) + \frac{g_0(\tau, x)}{\beta + s} + \frac{\lambda}{2} g_0 \varphi(x) \frac{\beta}{\beta + s} + \\
 & + \frac{\lambda}{2} \frac{\beta}{\beta + s} \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x') \int_{-1}^1 I(\tau, x', \eta, s) d\eta dx',
 \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\bar{I}(\tau, x, \eta, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} I(\tau, x, \eta, t) dt. \tag{30}$$

Отметим, что существует ряд методов решения линейных нестационарных задач (см. [8, 9]). Следуя работе [9], решение уравнения (29) ищем по степеням $1/s$.

$$\bar{I}(\tau, x, \eta, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(\tau, x, \eta)}{s^k}. \tag{31}$$

Целесообразность представления функции $I(\tau, x, \eta, s)$ в виде (31) связано с тем, что обращение Лапласа совершается автоматически. Функцию $I_0(x, \eta, s)$ представим также в виде разложения по $1/s$

$$I_0(x, \eta, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(x, \eta)}{s^k}. \tag{32}$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{\beta}{(\beta + s)s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(\beta + s)}, \tag{33}$$

а также разложением

$$\frac{1}{\beta + s} = \frac{1}{s} \left[1 + \frac{\beta}{s} + \frac{\beta^2}{s^2} + \dots \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{s^{m+1}}. \quad (34)$$

Подставляя (31) в (29), с учетом (33), (34), и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях s , получаем следующее рекуррентное соотношение относительно коэффициентов разложения $I_k(\tau, x, \eta)$:

$$\begin{aligned} & -I_{n+1}(\tau, x, \eta) + \eta \frac{\partial I_n(\tau, x, \eta)}{\partial \tau} = \\ & = -\varphi(x) I_n(\tau, x, \eta) + \left[q_0(\tau, x) - \frac{\lambda}{2} g_0 \varphi(x) \right] \beta^{n-1} + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x') dx' \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{n-1} \beta^{n-k} I_k(\tau, x, \eta) d\eta \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (35)$$

причем

$$I_2(\tau, x, \eta) = \eta \frac{\partial I_1(\tau, x, \eta)}{\partial \tau} + \varphi(x) I_1(\tau, x, \eta) + q_0(\tau, x),$$

$$I_1(\tau, x, \eta) = t_2 I(0, x, \eta, \tau).$$

После нахождения функции $I_k(\tau, x, \eta)$, решение уравнения (27) представляется в виде степенного ряда

$$I(\tau, x, \eta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(\tau, x, \eta)}{k!} t^k,$$

который сходится в силу появления в знаменателе коэффициентов $k!$.

Предположим, что решение линейной задачи известно, и что имеются определенные значения $I^0(z, x, \eta, t)$; $n^0_1(z, t)$; $n^0_2(z, t)$.

Уравнение (17) и (16) перепишем в форме

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \eta \frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \varphi(x) I(z, x, \eta, t) + \\ & + \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \psi + \frac{h\nu_0}{4\pi} B_{21} n_2^0 \psi I^0(z, x, \eta, t), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial n_2 \psi}{\partial t} = n_1 \left[a_{12} \varphi(x) + \frac{B_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x') dx' \int_{-1}^1 I(z, x', \eta', t) d\eta' \right] -$$

$$- n_2 \psi [a_{21} + A_{21}] - n_2^0 \frac{B_{21}}{2} \psi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x') dx' \int_{-1}^1 I^0(z, x', \eta', t) d\eta'.$$

После перехода к новому аргументу, согласно (21), будем иметь

$$t_2 \frac{\partial I}{\partial t} + \eta \frac{\partial I}{\partial \tau} = -\varphi(x) I(\tau, x, \eta, t) + Q(\tau, x, \eta, t) + Q^0(\tau, x, \eta, t), \quad (36)$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial Q}{\partial t} = -Q(\tau, x, t) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, x', \eta', t) d\eta' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} g_0 \varphi(x) - \bar{Q}^0(\tau, x, t), \quad (37)$$

где

$$Q^0(\tau, x, \eta, t) = \frac{n_2^0 A_{21} \psi I^0(\tau, x, \eta, t)}{n_1^0 B_{12}},$$

$$\bar{Q}^0(\tau, x, t) = \frac{n_2^0 B_{21} \psi}{n_1^0 B_{12}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x') dx' \int_{-1}^1 I^0(\tau, x', \eta', t) d\eta'.$$

Замтим, что функция $Q^0(\tau, x, \eta, t)$ в уравнении переноса (36) выступает в качестве внутреннего источника.

Интегрируя уравнение (37) с условием (26) и подставляя в (36), получим

$$t_2 \frac{\partial I}{\partial t} + \eta \frac{\partial I}{\partial \tau} = -\varphi(x) I + \frac{\lambda}{2} \varphi(x) g_0 [1 - e^{-\beta t}] + q_0(\tau, x) e^{-\beta t} +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \beta \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x') dx' \int_{0-1}^1 \int_0^1 e^{-\beta(t-t')} I(\tau, x', \eta', t') dt' d\eta' +$$

$$+ \beta \int_0^1 \bar{Q}^0(\tau, x, t') e^{-\beta(t-t')} dt'.$$

Полученное уравнение можно решить заново, применяя вышеописанную процедуру.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Н.Б.Енгибаряну за обсуждения и полезные замечания.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория, Армения

ON ONE NON-STATIONARY TRANSFER PROBLEM FOR PARTIAL LAWS OF FREQUENCY REDISTRIBUTION.

A.KH.KHACHATRIAN

In the present paper general analyses of the system of non-stationary transfer equations taking into account non-linear effects and partial laws of frequency redistribution on the model of two level atoms are given. The solution method of corresponding problem in plane parallel medium is suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J.Oxenius*, J.Q.R.S., **5**, 771, 1965.
2. *J.Oxenius*, Astron., Astrophys., **76**, 312, 1979.
3. *I.Hubeny*, Bull Astron.Inst.Crechosl, **32**, 271, 1981.
4. *I.Hubeny*, Astron. Astrophys., **100**, 314, 1981.
5. *I.Hubeny, J.Oxenius, E.Simonian*, J.Q.S.R.T., **29**, 477, 1983.
6. *A.Kh.Khachatrian*, Astrophys.Space Science, **172**, 167, 1990.
7. *Д.Михалас*, Звездные атмосферы, 1,2 Мир, М., 1982.
8. *И.Н.Минин*, Астрофизика, **3**, 345, 1967.
9. *Н.Б.Енгибарян*, Астрофизика, **2**, 31, 1966.
10. *Р.С.Варданян, Н.Б.Енгибарян*.Уч.записки ЕрГУ, **3**, 94, 1968.
11. *Р.С.Варданян, Н.Б.Енгибарян*., Астрофизика, **5**, 203, 1969.
12. *B.Baschek, D.Mihalas, J.Oxenius*, Astron.Astrophys., **97**, 43, 1981.
13. *R.Stenitz, R.A.Shine*, Mon.Notic.Roy.Astron.Soc.,**162**, 197, 1973.
14. *D.G.Hummer*, Mon.notic.Roy.Astron.Soc.,**145**, 95, 1969.