# АСТРОФИЗИКА

**TOM 38** 

ФЕВРАЛЬ, 1995

выпуск 1

УДК:524.3-423

## ЛЕГКАЯ ПОДСИСТЕМА С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ ВНУТРИ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СФЕРЫ

#### М.Г.АБРАМЯН, Х.Г.КОКОБЕЛЯН

Поступила 8 декабря 1994 Принята к печати 10 января 1995

Получены возможные фигуры равновесия легкой подсистемы с внутренними течениями вещества постоянной завихренности внутри гравитирующей однородной сферы. Наряду с эллипсоидальными фигурами равновесия - легкими аналогами эллипсоидов Римана, получены фигуры равновесия в виде наклонно вращающихся одно- и двуполостных гиперболоидов.

1. Введение. В наиболее общей постановке теория эллипсоидальных фигур равновесия вращающихся гравитирующих тел была развита в работах Дирихле и Римана. Эллипсоидальные фигуры гравитирующей жидкости с внутренними течениями вещества во многом обогатили теорию фигур и способствовали выявлению тесных генетических связей между различными сериями эллипсоидальных фигур [1, 2].

С точки зрения астрофизических приложений болсе плодотворной оказалась теория вложенных фигур равновесия, рассматривающая поведение гравитирующей или негравитирующей (легкой) подсистемы внутри другой гравитирующей массы заданной геометрии. Результаты, полученные в рамках этой теории, во многом способствуют пониманию динамики различных подсистем галактик [3-7].

Настоящая работа посвящена изучению поведения вращающейся легкой подсистемы с внутренними течениями вещества с линейным полем скоростей внутри гравитирующей сферы. Это есть задача Дирихле для легкой подсистемы внутри гравитирующей сферы.

2. Основные уравнения. Пусть внутри гравитирующей сферы однородной плотности массы и потенциала во внутренней точке

INCOMPTOES WHATHER PROPERTY IS DROVE IN A PROPERTY OF THE PROP

$$V^{\bullet}(\bar{x}) = -\frac{2}{3}\pi G \rho_{\bullet} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$
 (1)

имеется легкая подсистема, главные оси которой неподвижны во вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  системе отсчета, начало декартовых координат которой помещено в центре сферы. В этой системе отсчета легкая подсистема имеет стационарные внутренние течения вещества с линейным полем скоростей\*

$$u_i = \varepsilon_{jik} v_k \frac{a_i}{a_j} x_j; (i, j, k = 1, 2, 3),$$
 (2)

где  $\epsilon_{j|k}$  - единичный антисимметричный тензор Леви-Чивита,  $v_i$ ,  $a_i$  - параметры, характеризующие частоты внутренней циркуляции вещества и геометрические размеры фигуры равновесия легкой подсистемы, соответственно.

**Относительное** равновесие вложенной подсистемы определяется уравнением

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = -u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} [\bar{\Omega} \, \bar{x}]^2 + 2\varepsilon_{llm} \, u_l \, \Omega_m + \frac{\partial V^*}{\partial x_i}. \tag{3}$$

В классической теории фитур равновесия гравитирующей массы с внутренними течениями вещества типа (2) равновесие требуст, чтобы или  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{v}$  были параллельны и оба направлены вдоль одной из главных осей эллипсоида, или были не параллельны, но лежали в одной из главных плоскостей (теорема Римана [1, 2]).

Два случая, различимые теоремой Римана, приводят к существенно различным конфигурациям: в первом случае получаются линейные последовательности эллипсондов (частными случаями которых являются последовательности Маклорсна, Якоби и Дедекинда), названные Чандрасекаром эллипсоидами Римана типа S, а во втором случае - эллипсонды с наклонным вращением (эллипсонды Римана типов I, II, III).

Нетрудно доказать, что теорема Римана справедлива для всех равновесных конфигураций с полем скоростей (2) как гравитирующих, так и легких подсистем в поле с квадратичным потенциалом.

<sup>•</sup> Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование.

Отдельно рассмотрим случаи для легкой подсистемы, различимые теоремой Римана.

3. Легкие аналоги S эллипсоидов. Пусть отличными от нуля компонентами  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\nu}$  являются

$$\Omega_3 = \Omega; \ \nu_3 = \lambda \Omega.$$
(4)

При этом поле скоростей

$$u_1 = -\lambda \Omega \frac{a_1}{a_2} x_2; \ u_2 = \lambda \Omega \frac{a_2}{a_1} x_1; \ u_3 = 0$$
 (5)

характеризуется эллиптическими линиями тока во вращающейся системе отсчета.

Интегрирование уравнения относительного равновесия (3) с учетом (1), (4), (5) для парциального давления легкой подсистемы дает

$$p(\bar{x}) = p_{cs} \left\{ 1 - \frac{x_3^2}{a_3^2} - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 + 2\lambda a_2/a_1)}{4 a_3^2/3} x_1^2 - \frac{4/3 - \Omega^2 (1 + \lambda^2 +$$

$$-\frac{4/3-\Omega^2(1+\lambda^2+2\lambda a_1/a_2)}{4a_3^2/3}x_2^2$$

где постоянная интегрирования выбрана в виде  $p_{\rm cs} = \frac{2\pi}{3} {\rm Gp}_{\bullet} \rho \, a_3^2$ .

Здесь и в дальнейшем время измеряется в единицах  $(\pi G \rho_*)^{-1/2}$ . Из полученного выражения (6) для давления видно, что при условии

$$\Omega^{2}(1+\lambda^{2}+2\lambda a_{2}/a_{1}) = \frac{4}{3}(1-a_{3}^{2}/a_{1}^{2}),$$

$$\Omega^{2}(1+\lambda^{2}+2\lambda a_{1}/a_{2}) = \frac{4}{3}(1-a_{3}^{2}/a_{2}^{2}),$$
(7)

равновесие легкой подсистемы возможно в виде трехосного эллипсоида с полуосями  $a_i$ .

Для сфероидов  $a_1 = a_2 (\equiv a)$  оба уравнения (7) вырождаются в одну,

которая дает

$$\Omega_{c\phi}^2 = \left[\Omega(1+\lambda)\right]^2 = \frac{4}{3}(1-a_3^2/a^2),$$
(8)

где  $\Omega_{c\, \Phi}$  - угловая скорость вращения вложенного легкого сфероида относительно неподвижной инерциальной системы отсчета.

В общем случае из (7) получаем

$$\Omega^2 = \frac{2}{3} \frac{f^2}{1 \pm \sqrt{1 - f^2}}; \ \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - f^2}}{f}, \tag{9}$$

где

$$f = -\frac{a_3^2}{a_1 a_2},\tag{9'}$$

определяющие геометрию и кинематику вложенных легких эллипсоидов с полем скоростей (1), которые назовем легкими аналогами S эллипсоидов Римана.

Заметим, что уравнения (7) инвариантны относительно преобразованиям  $\lambda \to \frac{1}{\lambda}$  и  $\Omega \to \lambda \Omega$ . Это означает выполнение теоремы Дедекинда о сопряженных эллипсоидах [1, 2] для легких вложенных подсистем: если эллипсоид с угловой скоростью вращения  $\Omega$  и частотой внутренней циркуляции V является фигурой равновесия легкой подсистемы, то эллипсоид той же геометрии остается фигурой равновесия, если  $\Omega$  и  $\vee$  меняются ролями (сопряженные эллипсоиды). В формулах (9') знаки ± соответствуют сопряженным конфигурациям.

Равновесие легкой подсистемы требует действительность  $\lambda$  и  $\Omega$ . которая дает возможную геометрию легких S эллипсоидов:

$$|f| \le 1, \ a_3/a_1 \le \sqrt{a_2/a_1}$$
 (10)

Без ограничения общности можно предположить, что полуось  $a_1$  для S эллипсоидов является наибольшей. При этом условие (10) в плоскости  $(a_2/a_1, a_3/a_1)$  представляет область возможных геометрий легких S эллипсоидов. На рис. 1 легкие S эллипсоиды занимают область ОМК, огра-

ниченную сверху последовательностью самосопряженных эллипсоидов OM, которым соответствует  $\lambda = -1$  (f = -1) и, следовательно, все они вращаются с угловой скоростью  $\Omega = \sqrt{2/3}$ , а вещество внутри них циркулирует с частотой  $v = -\sqrt{2/3}$ .

В отличие от классических эллипсоидов Римана, область геометрий

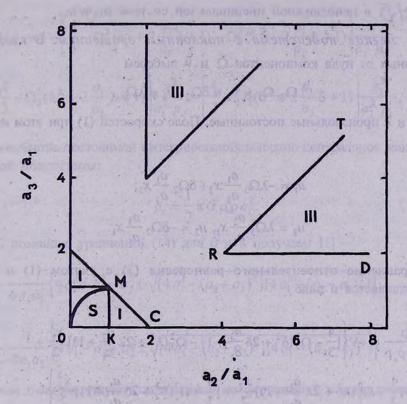


Рис. 1. Области геометрий "легких" аналогов эллипсоидов Римана внутри гравитирующей сферы.

которых разделена на две части последовательностью эллипсоидов Якоби  $(\lambda = 0)$  на эллипсоиды с  $\lambda < 0$  и на эллипсоиды с  $\lambda > 0$  [1], легким Sэллипсоидам соответствуют лишь отрицательные значения λ. Это означает, что циркуляция вещества внутри легких S эллипсоидов происходит в противоположном направлении вращения системы, т.е. имеет характер противотока (отрицательная внутренняя циркуляция).

Все последовательности легких S эллипсоидов ответвляются от соответствующих легких сфероидов (отрезок МК на рис.1) путем нейтрализации тороидальных мод колебаний [4, 5]. В этом отношении имеется полная аналогия с классическими эллипсоидами Римана [1].

В пределе  $a_3 \to 0$  возможной фигурой равновесия является лишь круглый  $(a_1=a_2)$  холодный диск, вращающийся с угловой скоростью  $\Omega=2/\sqrt{3}$  в неподвижной инерциальной системе отсчета.

4. Легкая подсистема с наклонным вращением. В качестве отличных от нуля компонентов  $\vec{\Omega}$  и  $\vec{\nu}$  выберем

$$\Omega_2, \Omega_3 \bowtie \nu_2 \equiv \delta\Omega_2, \nu_3 \equiv \lambda\Omega_3,$$
 (11)

где  $\delta$  и  $\lambda$  произвольные постоянные. Поле скоростей (1) при этом имеет вид

$$u_{1} = -\lambda \Omega_{3} \frac{a_{1}}{a_{2}} x_{2} + \delta \Omega_{2} \frac{a_{1}}{a_{3}} x_{3};$$

$$u_{2} = \lambda \Omega_{3} \frac{a_{2}}{a_{1}} x_{1}; u_{3} = -\delta \Omega_{2} \frac{a_{3}}{a_{1}} x_{1}.$$
(12)

Уравнение относительного равновесия (3) с учетом (1) и (12) представляется в виде

$$\nabla \frac{\mathbf{p}}{\pi G \rho_{\bullet} \rho} = -\nabla \left\{ \left[ \frac{4}{3} - \Omega_{2}^{2} (\delta^{2} + 2\delta \frac{a_{3}}{a_{1}} + 1) - \Omega_{3}^{2} (\lambda^{2} + 2\lambda \frac{a_{2}}{a_{1}} + 1) \right] \frac{x_{1}^{2}}{2} + \left[ \frac{4}{3} - \Omega_{3}^{2} (\lambda^{2} + 2\lambda \frac{a_{1}}{a_{2}} + 1) \right] \frac{x_{2}^{2}}{2} + \left[ \frac{4}{3} - \Omega_{2}^{2} (\delta^{2} + 2\delta \frac{a_{1}}{a_{3}} + 1) \right] \frac{x_{3}^{2}}{2} \right\} - \left[ \hat{J} \Omega_{2} \Omega_{3} (1 + 2\delta \frac{a_{1}}{a_{3}} + \frac{a_{2}}{a_{3}} \lambda \delta) x_{3} - \hat{k} \Omega_{2} \Omega_{3} (1 + 2\frac{a_{1}}{a_{2}} \lambda + \frac{a_{3}}{a_{2}} \lambda \delta) x_{2}. \right]$$
(13)

Ввиду произвольности  $\delta$  и  $\lambda$  потребуем обращения в нуль неградиентных членов в уравнении (13):

$$\lambda \delta + 2 \frac{a_1}{a_2} \delta + \frac{a_3}{a_2} = 0; \ \lambda \delta + 2 \frac{a_1}{a_3} \lambda + \frac{a_2}{a_3} = 0,$$
 (14)

которые совпадают с соответствующими соотношениями эллипсоидов Римана (1). При этом для парциального давления легкой подсистемы получаем выражение

$$p(\vec{x})/p_c = 1 - \left[ \frac{4}{3} - \Omega_2^2 (\delta^2 + 2\frac{a_3}{a_1}\delta + 1) - \Omega_3^2 (\lambda^2 + 2\frac{a_2}{a_1}\lambda + 1) \right] \frac{x_1^2}{a_1^2 p_c} - \left[ \frac{4}{3} - \Omega_3^2 (\lambda^2 + 2\frac{a_1}{a_2}\lambda + 1) \right] \frac{x_2^2}{a_1^2 p_c} - \left[ \frac{4}{3} - \Omega_2^2 (\delta^2 + 2\frac{a_1}{a_3}\delta + 1) \right] \frac{x_3^2}{a_1^2 p_c},$$
 (15)

где в качестве постоянной интегрирования выбрано центральное давление легкой подсистемы:

$$p_c = \frac{1}{2} \pi G \rho_s \rho a_1^2.$$

С помощью уравнений (14) для  $\delta$  и  $\lambda$  получаем [1]

$$\delta = -\frac{1}{4 a_1 a_3} \left\{ 4 a_1^2 + a_3^2 - a_2^2 \pm \sqrt{\left[4 a_1^2 - (a_2 + a_3)^2\right] \left[4 a_1^2 - (a_2 - a_3)^2\right]} \right\}, \tag{16}$$

$$\lambda = -\frac{1}{4 a_1 a_2} \left\{ 4 a_1^2 - a_3^2 + a_2^2 \pm \sqrt{\left[4 a_1^2 - (a_2 + a_3)^2\right] \left[4 a_1^2 - (a_2 - a_3)^2\right]} \right\}$$
(17)

(знакам ± соответствуют сопряженные конфигурации), а также тождества

$$\delta^2 + 2\frac{a_3}{a_1}\delta + 1 = -\frac{4a_1^2 - 3a_3^2 - a_2^2}{2a_1a_3}\delta; \ \delta^2 + 2\frac{a_1}{a_3}\delta + 1 = \frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_1a_3}\delta;$$
 (18)

$$\lambda^2 + 2\frac{a_2}{a_1}\lambda + 1 = -\frac{4a_1^2 - 3a_2^2 - a_3^2}{2a_1a_2}\lambda; \ \lambda^2 + 2\frac{a_1}{a_2}\lambda + 1 = \frac{a_3^2 - a_1^2}{2a_1a_2}\lambda. \tag{19}$$

TOWN THE PROPERTY OF A STATE OF THE HOUSE PROPERTY OF THE

Соотношения (15)-(17) полностью решают проблему о формах фигур равновесия легкой подсистемы с линейным полем скоростей (12) во вращающейся системе отсчета, вложенной внутри гравитирующей сферы.

5. Эллипсоиды с наклонным вращением. Из выражения для парциального давления (15) видно, что при

$$p_C = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta \Omega_2^2}{a_1 a_3} + \frac{\lambda \Omega_3^2}{a_1 a_2} \right) (4 a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) - \left( \frac{a_3}{a_1} \delta \Omega_3^2 + \frac{a_2}{a_1} \lambda \Omega_3^2 \right), \quad (20)$$

$$p_C = \frac{4}{3} \frac{a_2^2}{a_1^2} + \lambda \Omega_3^2 \frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_1^2} \frac{a_2}{a_1},$$
 (21)

$$p_C = \frac{4}{3} \frac{a_3^2}{a_1^2} - \delta\Omega_2^2 \frac{a_2^2 - a_3^2}{2 a_1^2} \frac{a_3}{a_1},$$
 (22)

где учтены соотношения (18) и (19), фигурой равновесия легкой подсистемы является трехосный эллипсоид с полуосями  $a_i$ .

Из последних двух уравнений получаем

$$\frac{a_2}{a_1}\lambda\Omega_3^2 + \frac{a_3}{a_1}\delta\Omega_2^2 = -\frac{8}{3}; \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\Omega_2^2}{a_1a_3} + \frac{\lambda\Omega_3^2}{a_1a_2}\right) = -p_C\frac{a_1^2}{a_2^2a_3^2}, \quad (23)$$

с учетом которых из (20)-(22) находим

$$p_C = \frac{4a_2^2a_3^2}{(4a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)a_1^2 + a_2^2a_3^2},$$
 (24)

$$\lambda\Omega_2^2 = -\frac{8\,a_1a_3}{3(a_2^2 - a_3^2)} \frac{(4\,a_1^2 - a_3^2)(a_3^2 - a_1^2)}{(4\,a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)\,a_1^2 + a_2^2a_3^2},\tag{25}$$

$$\lambda\Omega_3^2 = \frac{8 a_1 a_2}{3(a_2^2 - a_3^2)} \frac{(4 a_1^2 - a_2^2)(a_3^2 - a_1^2)}{(4 a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) a_1^2 + a_2^2 a_3^2}.$$
 (26)

Возможными являются лишь те эллипсоиды, которым соответствуют действительные значения  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega$ , и неотрицательные  $p_{\rm C}$ .

Заметим, что соотношения (16), (17), (24)-(26), определяющие физические и геометрические свойства легких эллипсоидов с наклонным вращением, симметричны относительно величин а, и а,. Следовательно области, занимаемые этими эллипсоидами в плоскости  $(a_2/a_1)$  $a\sqrt{a_1}$  должны быть расположены симметрично относительно прямой  $a_2 = a_3$ . Поэтому ограничимся исследованием полуплоскости  $a \ge a_3$ . Аналогичным свойством обладают и эллипсоиды Римана [1, 2].

Условие действительности δ и λ требует, чтобы [1]

или 
$$a_2 + a_3 \le 2a_1$$
, или  $|a_2 - a_3| \ge 2a_1$ . (27)

Эти два случая рассмотрим отдельно. 1. Случай.  $a_2 + a_3 \le 2a_1$ ,  $a_1 \ge a_3$ . Из (16) и (17) при этом получаем

$$\delta < 0; \lambda < 0.$$
 (28)

Условие р<sub>с</sub>>0 удовлетворяется при этом автоматически, а действительность Ω, и Ω, требует

$$2a_1 \ge a_2 \ge a_3$$
;  $a_1 \ge a_3$ . (29)

В плоскости  $(a_2/a_1, a_3/a_1)$  эти эллипсоиды занимают область эллипсоидов Римана типа I (рис. 1) и являются их "легкими" аналогами (см.[1]).

В отличие от легких S эллипсоидов, которые в пределе  $a_3 \rightarrow 0$  дают лишь невращающийся холодный круглый диск, легкие эллипсоиды типа I переходят в эллиптические диски с наклонным вращением, вытянутые вдоль оси вращения  $a_1/a_1$  (отрезок КС на рис. 1).

2. Случай а,-а,≥2а,.

2. Случан  $a_2 - a_3 \ge 2a_1$ . При этом  $a_2^2 - a_3^2 > 4a_1^2$  и из (16), (17) находим

Так как неотрицательность р требует

$$(4 a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) a_1^2 + a_2^2 a_3^2 > 0,$$

то условие действительности  $\Omega$ , и  $\Omega$ , даст

$$a_3(2a_1-a_3)(a_1-a_2) \ge 0; \quad (2a_1-a_2)(a_1-a_3) \ge 0.$$
 (31)

Здесь выделяются два случая:  $a_3 < a_1$  и  $a_3 ≥ a_1$ .

Случаю  $a_3 < a_1$  соответствуют мнимые значения угловой скорости  $\Omega_2$  за исключением холодных эллиптических дисков с наклонным вращением, для которых

$$\Omega_3 = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{a_1}{a_2},\tag{32}$$

$$\Omega_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}}. (33)$$

Эти формулы справедливы для всех дискообразных эллипсоидов с наклонным вращением, включая легкие эллиптические диски типа I. В области  $a_3 < a_1$ ,  $a_2 \ge 2a_1$  (ось абсцисс, начиная с точки C на рис. 1) эти фигуры являются единственно возможными и представляют легкие аналоги эллипсоидов Римана типа II (см.[1]).

Случай  $a_3 \ge a_1$  соответствует легким эллипсоидам, занимающим в плоскости  $(a_2/a_1, a_3/a_1)$  область (рис. 1)

$$a_2 - a_1 \ge a_3 \ge 2a_1; \quad a_2 \ge 4a_1.$$
 (34)

Эти эллипсоиды являются легкими аналогами эллипсоидов Римана типа III. Заметим, что эта область снизу ограничена последовательностью с  $a_3/a_1=2$ ,  $a_4/a_2 \ge 4$  (луч RD), для которой  $\Omega_2=0$ . Следовательно, члены этой последовательности одновременно являются легкими S эллипсоидами. В следующей работе мы покажем, что последовательности легких эллипсоидов с наклонным вращением типа III ответвляются именно от соответствующих членов последовательности легких S эллипсоидов RD. Что касается легких эллипсоидов типов S и I, то они ответвляются от легких сфероидов (отрезок МК на рис. 1) путем нейтрализации тороидальных и поперечно-скошенных мод колебаний, соответственно. В этом отношении имеется полная аналогия между классическими эллипсоидами Римана [1, 2] и их легкими аналогами (см. также [3-5]).

6. Гиперболоидальные фигуры равновесия. Из общего выражения для парциального давления (15) видно, что при определенных условиях фигурами равновесия могут быть гиперболоиды - как двуполостные, так и однополостные.

Двуполостные гиперболоиды. ДГ, и ДГВ-фигуры. Рассмотрим случай вращения легкой подсистемы вокруг одной оси и воспользуемся

формулами (4) и (5). При этом из (6) следует, что если

$$\Omega^2(1+\lambda^2+2\lambda a_2/a_1)=\frac{4}{3}(1+a_3^2/a_1^2),$$
 (35)

$$\Omega^{2}(1+\lambda^{2}+2\lambda a_{1}/a_{2})=\frac{4}{3}(1+a_{3}^{2}/a_{2}^{2}), \qquad (36)$$

то равновесие подсистемы в пределах гравитирующей сферы возможно в виде двуполостного гиперболонда (ДГ, рис. 2а). Для этих фигур

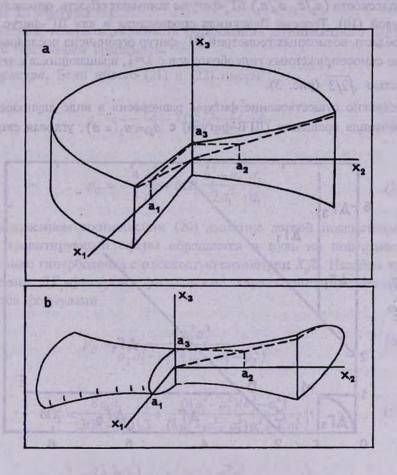


Рис. 2. а) Срез двуполостно-гиперболоидальной фигуры. b). Срез однополостно-гиперболондальной фигуры.

справедливы формулы (9'), но вместо (9) теперь имсем

$$f = \frac{a_3^2}{a_1 a_2} > 0, (37)$$

откуда видно, что этим фигурам соответствуют положительные  $\lambda$ . Эти фигуры равновесия назовем двуполостными гиперболоидами типа S (Д $\Gamma_{i}$ ). Следовательно, Д $\Gamma_{i}$ -фигурам соответствуют сопутствующие внутренние течения вещества (положительная внутренняя циркуляция).

В плоскости  $(a_2/a_1, a_3/a_1)$  ДГ<sub>s</sub>-фигуры занимают область, определяемую формулой (10). Теорема Дедекинда справедлива и для ДГ<sub>s</sub>-фигур. При этом область возможных геометрий ДГ<sub>s</sub>-фигур ограничена последовательностью самосопряженных гиперболоидов с  $\lambda=1$ , вращающихся с угловой скоростью  $\sqrt{2/3}$  (рис. 3).

Возможно существование фигуры равновесия в виде двуполостного гиперболоида вращения (ДГВ-фигура) с  $a_1 = a_2 (\equiv a)$ , угловая скорость

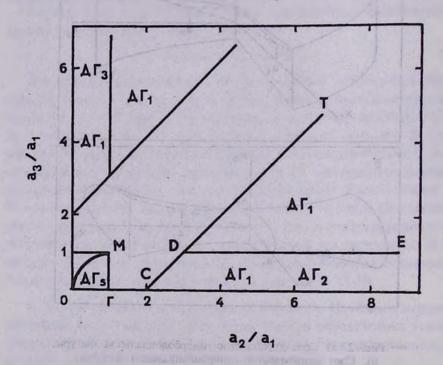


Рис. 3. Области геометрий двуполостно-гиперболоидальных фигур. равновесия внутри гравитирующей сферы.

которой в инерциальной системе отсчета определяется формулой [6, 7]

$$\Omega^2_{\Gamma B} = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{a_3^2}{a^2} \right).$$

Очевидно, что ДГВ-фигурам соответствуют большие значения угловой скорости вращения, чем легким аналогам S эллипсоидов (см.(8)). На рис. 3 отрезок МГ представляет ДГВ-фигуры, от которых ответвляются трехосные ДГ -фигуры [5].

Рассмотрим теперь возможность образования двуполостного гиперболоида с наклонным вращением.

ДГ, -фигура. Если вместо (21) и (22) имеем

$$p_C = -\frac{4}{3} \frac{a_2^2}{a_1^2} - \lambda \Omega_3^2 \frac{a_2^2 - a_3^2}{2 a_1^2} \frac{a_2}{a_1},$$
 (38)

$$p_C = -\frac{4}{3} \frac{a_3^2}{a_1^2} + \delta \Omega_2^2 \frac{a_2^2 - a_3^2}{2 a_1^2} \frac{a_3}{a_1}, \tag{39}$$

то при неизменном соотношении (20) давление легкой подсистемы в пределах гравитирующей сферы обращается в нуль на поверхности двуполостного гиперболоида с плоскостью симмстрии Х.Х. Назовем этот гиперболоид ДГ,-фигурой, физические характеристики которой выражаются формулами

$$p_{C} = \frac{4 a_2^2 a_3^2}{a_2^2 a_3^2 - a_1^2 (4 a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)},$$
(40)

$$\delta\Omega_2^2 = \frac{8 a_1 a_3}{3(a_2^2 - a_3^2)} \left( \frac{1}{3} + \frac{(4 a_1^2 - a_3^2)(a_2^2 - a_1^2)}{(4 a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) a_1^2 + a_2^2 a_3^2} \right),\tag{41}$$

$$\lambda\Omega_3^2 = \frac{-8\,a_1a_2}{a_2^2 - a_3^2} \left( \frac{1}{3} + \frac{a_1^2 a_3^2}{a_2^2 a_3^2 - a_1^2 (4\,a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)} \right). \tag{42}$$

Совместно с (12), (16) и (17) приведенные соотношения полностью описывает поведение ДГ.-фигур.

Симметричность этих формул относительно  $a_2$  и  $a_3$  позволяет ограничиться рассмотрением полуплоскости  $a \ge a_3$ .

Так как для фигур равновесия легкой подсистемы с наклонным вращением формулы (16) и (17) универсальны, то возможные Д $\Gamma_1$ -фигуры следует искать в областях плоскости  $(a_2/a_1, a_3/a_1)$ , опредсляемых неравенствами (27).

Для Д $\Gamma_1$ -фигур область  $a_2 + a_3 \le 2a_1$  является нефизической из-за отрицательности давления р $_C$  Неотрицательность р $_C$  и действительность угловых скоростей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  обсепечены в области  $a_2 - a_3 \ge 2a_1$ . На рис. З эта область ограничена между лучем СТ и осью абсцисс (а также симметричная относительно прямой  $a_2 = a_3$  область). Д $\Gamma_1$ -фигуры указанных двух симметричных областей в принципе ничем не отличаются друг от друга.

 $\mathcal{A}\Gamma_{j}$  или  $\mathcal{A}\Gamma_{j}$ -фигуры. Если вместо (20) и (22) имеют место соотношения

$$p_C = -\frac{1}{2} \left( \frac{\delta \Omega_2^2}{a_1 a_3} + \frac{\lambda \Omega_3^2}{a_1 a_2} \right) (4 a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + \left( \frac{a_3}{a_1} \delta \Omega_2^2 + \frac{a_2}{a_1} \lambda \Omega_3^2 \right) - \frac{4}{3}, (43)$$

$$p_C = -\frac{4}{3} \frac{a_3^2}{a_1^2} + \delta \Omega_2^2 \frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_1^2} \frac{a_3}{a_1},$$
 (44)

то при неизменном соотношении (21) парциальное давление (15) обращается в нуль на поверхности двуполостного гиперболоида с плоскостью симметрии  $X_1X_3$  (Д $\Gamma_2$ -фигура). Физические характеристики этих фигур определяются формулами (16), (17) и

$$p_C = \frac{-4 a_2^2 a_3^2 (a_2^2 - a_3^2)}{(a_2^2 + a_3^2)(4 a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) a_1^2 - a_2^2 a_3^2 (4 a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)};$$
(45)

$$\delta\Omega_2^2 = \frac{8 a_1 a_3}{a_2^2 - a_3^2} \left( \frac{1}{3} + \frac{a_3^2}{4 a_1^2} p_C \right), \tag{46}$$

$$\lambda\Omega_3^2 = \frac{8 a_1 a_2}{a_2^2 - a_3^2} \left( \frac{a_2^2}{4 a_1^2} p_C - \frac{1}{3} \right). \tag{47}$$

Формулы (45)-(47) не симметричны относительно параметров  $a_2$  и  $a_3$ . При этом анализ этих формул показывает, что в полуплоскости  $a_2 \le a_3$  Д $\Gamma_2$ -фигур не существует. Существование этих фигур в области  $a_2 + a_3 \le 2a_1$ ,  $a_2 > a_3$  тоже невозможно из-за недействительности угловой скорости  $\Omega_3$ .

В области  $a_2$ - $a_3 \ge 2a_1$ ,  $a_2 > a_3$ , где  $\delta > 0$ ,  $\lambda < 0$  физические решения получаются при  $a_3/a_1 \le 1$ . В плоскости  $(a_2/a_1, a_3/a_1)$  эта область представляет узкую полосу, ограниченную лучами СТ, DE и осью абсцисс (см. рис. 3). Граничная последовательность DE представляет ДГВ-фигуры, вращающиеся вокруг оси  $X_2$ , так как знаку равенства соответствует  $\Omega_3 = 0$ .

Симметричную область в плоскости  $(a_2/a_1, a_3/a_1)$  представляет гиперболоидальная фигура с наклонным вращением с плоскостью симметрии  $X_1X_2$  (Д $\Gamma_3$ -фигура). Формулы, описывающие свойства этих фигур равновесия можно получить из (45)-(47) заменой  $a_2 \rightleftharpoons a_3$ . Эти фигуры не отличаются от Д $\Gamma_2$ -фигур.

Граничная последовательность Д $\Gamma_2$  (Д $\Gamma_3$ )-фигур, представленная осью абсцисс (ординат), описывает плоские (в плоскости  $X_1X_2$  ( $X_1X_3$ ) гиперболоиды, для которых

$$\Omega_2^2 = \frac{4}{3} \left( 1 - 4 \frac{a_1^2}{a_2^2} \right), \tag{48}$$

$$\lambda\Omega_3^2 = -\frac{8}{3}\frac{a_1}{a_2}\frac{a_2^4 + 4a_1^4}{a_2^4 + 4a_1^4 - a_1^2a_2^2}, \ \lambda^2 + \frac{a_2^2 + 4a_1^2}{2a_1^2}\lambda + 1 = 0.$$
 (49)

Однополостные гиперболоиды. ОГ $_8$ -фигуры. Рассмотрим случай, когда легкая подсистема вращается вокруг главной оси  $X_3$ . Из (6) теперь следуст, что если

$$\Omega^{2}(1+\lambda^{2}+2\lambda a_{2}/a_{1}) = \frac{4}{3}(1-a_{3}^{2}/a_{1}^{2}),$$

$$\Omega^{2}(1+\lambda^{2}+2\lambda a_{1}/a_{2}) = \frac{4}{3}(1+a_{3}^{2}/a_{2}^{2}),$$
(50)

то равновесие возможно в виде однополостного гиперболоида с осью  $X_2$ 

(ОГ, рис. 2b):

$$p = p_C \left( 1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right).$$
 (51)

Физические параметры этих фигур выражаются формулами (9') с

$$f = \frac{a_3^2(a_1^2 + a_2^2)}{a_1 a_2(a_1^2 - a_2^2 - 2a_3^2)}.$$
 (52)

Возможную геометрию этих фигур получаем из условия действительности  $\lambda$  и  $\Omega$ : I f I $\leq$ 1. Заметим, что f может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это значит, что внутренняя циркуляция вещества у  $\Omega$  -фигур может быть как положительной ( $\lambda$ >0), так и отрицательной ( $\lambda$ <0). Для положительных  $\lambda$  условие f дает

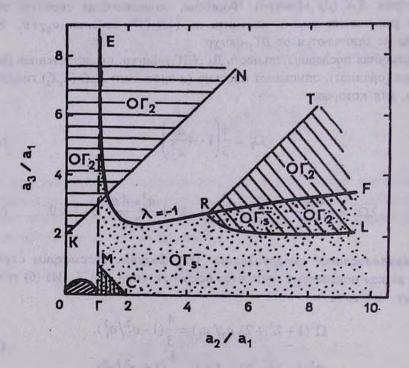


Рис. 4. Области геомстрий однополостно-гиперболоидальных фигур равновесия легкой подсистемы внутри гравитирующей сферы.

$$a_3^2 \le \frac{a_1 a_2 (a_1 - a_2)}{a_1 + a_2},\tag{53}$$

представляющая в плоскости  $(a_2/a_1, a_3/a_1)$  область, заключенную между кривой ОГ и осью абсцисс (рис. 4). Эти фигуры равновесия обозначим ОГ<sub>8</sub><sup>+</sup>. Кривая ОГ представляет последовательность самосопряженных ОГ<sub>8</sub><sup>+</sup> -фигур с  $\lambda$ =1, которые вращаются с угловой скоростью

$$\Omega_{+}^{2} = \frac{2}{3} \frac{a_{1}^{2} + a_{2}^{2}}{(a_{1} + a_{2})^{2}}.$$
 (54)

Для отрицательных  $\lambda$  условие  $|f| \le 1$  дает

$$a_3^2 \le \frac{a_1 a_2 (a_1 + a_2)}{a_2 - a_1},\tag{55}$$

представляющая на рис. 4 область ниже кривой EF. Граничная последовательность EF представляет самосопряженные  $O\Gamma_s$ -фигуры с  $\lambda$ =-1, вращающиеся с угловой скоростью

$$\Omega_{-}^{2} = \frac{2}{3} \frac{a_{1}^{2} + a_{2}^{2}}{(a_{2} - a_{1})^{2}}.$$
 (56)

 $O\Gamma_{\bf k}$ -фигуры с осью  $X_{\bf k}$  ничем не отличаются от рассмотренных.

7.  $O\Gamma$ -фигуры с наклонным вращением. Анализ формул (17), (16), (20)-(22) показывает, что легкая подсистема не имеет фигур равновесия с наклонным вращением в виде однополостного гиперболоида с осью  $X_{l}$ . Однако возможно образование наклонно вращающихся  $O\Gamma$ -фигур с осью  $X_{l}$  (или  $X_{l}$ ).

ОГ, или ОГ, фигуры. Если вместо (21) имсем

$$p_{c} = -\frac{4}{3} \frac{a_{2}^{2}}{a_{1}^{2}} - \lambda \Omega_{3}^{2} \frac{a_{2}^{2} - a_{3}^{2}}{2 a_{1}^{2}} \frac{a_{2}}{a_{1}}, \tag{57}$$

то при неизменных соотношениях (20) и (22) парциальное давление принимает вид (51). Полученная ОГ-фигура является наклонно вращающейся (ОГ<sub>2</sub>-фигура) со следующими характеристиками

$$p_C = \frac{4a_2^2a_3^2(a_2^2 - a_3^2)}{(a_2^2 + a_3^2)(4a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)a_1^2 - a_2^2a_3^2(4a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)},$$
 (58)

$$\delta\Omega_2^2 = -\frac{2a_1^2}{a_2^2 - a_3^2} \frac{a_1}{a_3} \left( p_C - \frac{4}{3} \frac{a_3^2}{a_1^2} \right), \tag{59}$$

$$\lambda\Omega_3^2 = -\frac{2a_1^2}{a_2^2 - a_3^2} \frac{a_1}{a_2} \left( p_C + \frac{4}{3} \frac{a_2^2}{a_1^2} \right). \tag{60}$$

К ним следует добавить (16) и (17).

Формулы (51), (58)-(60) несимметричны относительно  $a_2$  и  $a_3$ . Заменой  $a_2 \rightleftarrows a_3$  получим формулы, описывающие ОГ<sub>3</sub>-фигуры с осью  $X_3$ , которые в принципе не отличаются от ОГ<sub>2</sub>-фигур.

Физические решения для ОГ2-фигур в областях (27) таковы.

- 1.  $a_2+a_3\le 2a_1$ , ( $\delta<0$ ,  $\lambda<0$ ). В плоскости  $(a_2/a_1, a_3/a_1)$  О $\Gamma_2$ -фигуры занимают треугольную область МГС, причем МГ не входит в эту область (рис. 4)
- 2.  $a_2$ - $a_3$ ≥ $2a_1$ , ( $\delta$ >0,  $\lambda$ <0). Физическими являются  $O\Gamma_2$  фигуры области TRL на рис. 4. Граничная последовательность RL одновременно является последовательностью  $O\Gamma_1$ -фигур, так как для них  $\Omega_2$ =0, а  $\Omega_3$  определяется формулой (9') с учетом (52). Хотя в области TRF фигуры  $O\Gamma_1$  и  $O\Gamma_2$  геометрически одинаковы, но кинематически они сильно отличаются, так как последние являются наклонно вращающимися. Совпадение имеет место лишь на кривой RL.
- 3. Во всей области  $a_3$ - $a_2$  $\ge 2a_1$  ( $\delta$ <0,  $\lambda$ >0) О $\Gamma_2$  являются фигурами равновесия (область, ограниченная лучем KN и осью ординат на рис. 4).
  - 8. Заключение. В заключение сделаем некоторые замечания.
- 1. Хотя результаты настоящей работы были получены в предположении об однородности вложенной массы, но все они справедливы и для неоднородных легких подсистем с произвольным баротропным уравнением состояния.
- 2. Рассмотренные фигуры равновесия легкой подсистемы являются односвязными образованиями с  $p_C \ge 0$ . Не исключена возможность формирования фигур равновесия легкой подсистемы в виде гиперболоидов, материя в которых заполняет двухсвязную область.

3. Полученные эллипсондальные фигуры равновесия легкой подсистемы целиком заключены внутри гравитирующей сферы. Однако не исключена возможность того, что эллипсоид вдоль своей большой оси частично выходит за пределы сферы, где вращение легкой подсистемы уже является дифференциальным. В указанном случае, а также во всех других, когда фигурой равновесия является гиперболоид, возникает залача исследования формы распределения материи легкой подсистемы вне гравитирующей сферы.

Этим, а также проблеме устойчивости полученных фигур и установления генетических связей между различными сериями этих фигур будут посвящены последующие работы этой серии.

Арм. пединститут им. Х.Абовяна Иджеванский филиал ЕГУ, Армения

### LIGHT SUBSYSTEM WITH LINEAR VELOCITY FIELD IN THE GRAVITATING SPHERE

#### M.G.ABRAMIAN, Kh.G.KOKOBELIAN

The possible equilibrium figures of light gaseous subsystem with inner current of constant vorticity in the gravitating sphere are established. Besides of ellipsoids having similar properties of Riemanns ellipsoids, the figures of equilibrium in the form of one and two-sheet hyperboloids are obtained.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. С. Чандрасекар, Эллипсоидальные фигуры равновссия. Мир. М., 1969.
- 2. Б.П. Кондратьев, Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. Наука, М., 1989.
- 3. М.Г.Абрамян, С.А.Каплан, Астрофизика, 10, 665, 1974.
- 4. М.Г.Абрамян, С.А.Канлан, Астрофизика, 11, 121; 319, 1975.
- М.Г.Абрамян, Астрофизика, 25, 173; 342, 1986.
- 6. М.Г.Абрамян, Д.М.Седракян, М.А.Чалабян, Астрон. ж., 63, 1089, 1986.
- 7. М.Г.Абрамян, Динамика вложенных гравитирующих подсистем. Докторская диссертация, Бюракан, 1986. с. 350