

УДК: 52: 531. 51

## ПЛОСКАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В БСТТ: ПОДХОД, ОСНОВАННЫЙ НА КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.А.СААРЯН

Поступила 5 июля 1994

Принята к печати 5 августа 1994

Методы качественной теории динамических систем применяются для исследования плоской космологической модели биметрической скалярно-тензорной теории гравитации (БСТТ) с уравнением состояния  $p = a\varepsilon$ ,  $-1 \leq a \leq 1$ . Выделены основные классы решений и рассмотрено их поведение в различных предельных случаях. Показано, что свойства модели критическим образом зависят от значения безразмерного параметра теории. Найдены бифуркационные кривые соответствующей динамической системы и исследовано поведение фазовых траекторий в их окрестности.

**1. Введение.** Одним из характерных особенностей современного этапа развития качественной теории динамических систем является ее широкое применение в различных областях науки. В частности, отметим успешное использование методов этой теории при исследовании космологических и астрофизических вопросов ОТО [1], теорий типа Калузы-Клейна [2] и скалярно-тензорных теорий гравитации [3-5]. В данной работе на основе методов качественной теории динамических систем рассмотрены основные свойства плоской космологической модели БСТТ, в варианте, когда безразмерная функция связи является постоянной. Уравнение состояния выбрано в виде

$$p = a\varepsilon, \quad -1 \leq a \leq 1, \quad (1)$$

$p$  — давление,  $\varepsilon$  — плотность энергии материи, содержащая наиболее важные случаи пылевидной ( $a = 0$ ), радиационно-доминированной ( $a = 1/3$ ) и вакуумно-доминированной ( $a = -1$ ) стадий эволюции вселенной. Включение отри-

цательных значений  $a$  связано с необходимостью рассмотрения моделей инфляции. Возможная инфляционная стадия в развитии Вселенной в настоящее время широко обсуждается в литературе (см. [6] и приведенные там ссылки). Особо отметим, недавно предложенную в рамках скалярно-тензорных теорий гравитации, модель растянутой инфляции [7-10], где в отличие от ОТО инфляция происходит не экспоненциально, а по степенному закону. Модель основана на сверхохлажденном фазовом переходе первого рода.

2. *Уравнения модели.* В БСТТ переменными гравитационного поля являются скалярное поле  $\varphi$  и искривленная метрика  $g_{ik}$ , заданные на фоне плоского пространства-времени с метрическим тензором  $\gamma_{ik}$ . В варианте теории с постоянной функцией связи  $\xi(\varphi)$  они определяются из уравнений [11,12]

$$\varphi R_{ik} + \varphi_{;n} \bar{\Gamma}_{ik}^n - \varphi_{(i} \bar{\Gamma}_{k)n}^n - \xi \varphi_{;i} \varphi_{;k} / \varphi = T_{ik} - g_{ik} T/2 \quad (2)$$

$$[2\xi \varphi^{;n} - \varphi (g^{km} \bar{\Gamma}_{km}^n - g^{nm} \bar{\Gamma}_{mk}^k)]_{;n} = T,$$

где круглые скобки в первом уравнении означают симметризацию по индексам  $i$  и  $k$ ,  $\bar{\Gamma}_{ik}^l = \Gamma_{ik}^l - \dot{\Gamma}_{ik}^l$  — тензор аффинной деформации, равный разности символов Кристоффеля метрик  $g_{ik}$  и  $\gamma_{ik}$  соответственно. Для полноты систему (2) следует дополнить уравнениями негравитационной материи, которые здесь те же, что и в ОТО. Вследствие наличия в теории абсолютной переменной  $\gamma_{ik}$ , они, вообще говоря, не являются следствием уравнений (2). Тензор энергии-импульса  $T_{ik}$ , как обычно это делается в космологии, выберем в виде  $T_{ik} = (\varepsilon + p) u_i u_k - p g_{ik}$ , где  $u_i$  — 4 скорость материи.

В однородной и изотропной космологической модели с плоским пространством динамические переменные гравитационного поля имеют вид

$$g_{ik} = \text{diag} (1, -R^2, -R^2, -R^2), \quad R=R(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (3)$$

Как показано в работе [13] фоновую метрику здесь можно выбрать в виде  $\gamma_{ik} = \text{diag} (1, -1, -1, -1)$  и уравнения (2) сводятся к системе (точка означает производную по времени)

$$\begin{aligned} (\dot{R}/R)^2 - (\xi/6) (\dot{\varphi}/\varphi)^2 &= \varepsilon/3\varphi \\ (\dot{R}/R) + (\dot{R}/R) (3\dot{R}/R + \dot{\varphi}/\varphi) &= (\varepsilon - p)/2\varphi \\ (\dot{\varphi}/\varphi) + (\dot{\varphi}/\varphi) (3\dot{R}/R + \dot{\varphi}/\varphi) &= -\varepsilon/\xi\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

В данном случае уравнение непрерывности для  $T_{\mu}$  вытекает из (4), поэтому мы его отдельно выписывать не будем. Используя уравнение состояния (1) и исключая  $\varepsilon/\varphi$  из второго и третьего уравнений с помощью первого уравнения, получим следующую систему относительно  $R$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + \frac{3}{2}(1+a) \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{\dot{R}\dot{\varphi}}{R\varphi} + \frac{\xi}{4}(1-a) \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 &= 0 \\ \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 + \frac{3\dot{R}\dot{\varphi}}{R\varphi} + \frac{3}{\xi} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Плотность энергии негравитационной материи определяется через решение этой системы с помощью первого уравнения (4).

Отметим, что наряду с (3) система уравнений (2) допускает также плоские космологические модели с постоянным скалярным полем [14, 15]. Этот случай мы здесь рассматривать не будем, так как в соответствующих моделях решения для  $R(t)$  те же, что и в ОТО.

3. *Динамическая система и частные решения.* После введения обозначений

$$x = \dot{R}/R, \quad y = \dot{\varphi}/\varphi \quad (6)$$

уравнения (5) определяют двумерную автономную динамическую систему

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (7)$$

с функциями

$$\begin{aligned} P(x, y) &= -3(1+a)x^2/2 - xy - \xi(1-a)y^2/4 \\ Q(x, y) &= -3x^2/\xi - 3xy - y^2/2 \end{aligned} \quad (8)$$

Системы (4) и (7) могут быть интегрированы точно (см. [15, 16]). Однако для исследования качественной структуры разбиения фазовой плоскости  $(x, y)$  на траектории, знания состояний равновесия и их устойчивости, асимптотического поведения решений, намного удобнее и нагляднее использование методов качественной теории динамических систем. Как будет показано ниже, (7) принадлежит к классу динамических систем, для которых возможно исчерпывающее качественное исследование.

Качественная картина фазовых траекторий динамической системы определяется расположением и характером ее особых точек, являющихся корнями уравнений

$$P(x,y) = Q(x,y) = 0$$

Для функций из (8) эта система имеет одно очевидное решение  $x = y = 0$ . При  $\xi = 2/3$ ,  $2/[3(1-a^2)]$  особыми являются также точки прямых  $y = -3x$  и  $y = -3(1+a)x$ , соответственно. Мы сначала рассмотрим случай, когда  $\xi$  отлично от этих значений и единственной особой точкой в конечной части фазовой плоскости является начало координат. Так как в этой точке  $P'_i = Q'_i = 0$ ,  $i = x, y$ , то соответствующие собственные числа равны нулю:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  и особая точка является вырожденной (непростой, по другой терминологии). Согласно обычному методу исследования вырожденных особых точек (см., например, [1, 17]) преобразуем систему (7) в полярные координаты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \text{arctg}(y/x)$$

и произведем замену времени  $d\tau/dt = r$ . При этом вместо точки (0,0) вклеивается окружность  $S^1 = \{r = 0, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$  (см. ниже рисунки). В полярных координатах система (7) примет вид

$$\frac{dr}{d\tau} = r Z(\alpha), \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = N(\alpha), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} Z(\alpha) &= \cos\alpha P(\cos\alpha, \sin\alpha) + \sin\alpha Q(\cos\alpha, \sin\alpha), \\ N(\alpha) &= \cos\alpha Q(\cos\alpha, \sin\alpha) - \sin\alpha P(\cos\alpha, \sin\alpha). \end{aligned} \quad (10)$$

Прежде всего заметим, что решениями этой системы являются лучи  $\alpha = \alpha_m$ , где  $\alpha_m$  корни уравнения

$$N(\alpha) = 0. \quad (11)$$

Обозначением  $v = x/y = \text{ctg } \alpha$  оно сводится к кубическому уравнению, которое факторизуется:

$$\left[ v + \frac{\xi}{2}(1-a) \right] \left( v^2 - \frac{\xi}{6} \right) = 0,$$

Это уравнение имеет три действительных корня

$$v_1 = -\xi(1-a)/2, \quad v_2 = \sqrt{\xi/6}, \quad v_3 = -\sqrt{\xi/6} \quad (12)$$

для положительных значений  $\xi$  и один действительный корень  $v = v_1$  при  $\xi < 0$ , причем  $v_1$  и  $v_3$  совпадают при  $3\xi(1-a)^2 = 2$ . В соответствующих космологических решениях относительное изменение гравитационного скаляра пропорционально параметру Хаббла:

$$\frac{\dot{R}}{R} = v_i \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}. \quad (13)$$

Интегрирование второго уравнения системы (5) с учетом (13) приводит к следующему результату

$$\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = \frac{1}{a_i t + C}, \quad \varphi = \text{const} |a_i t + C|^{1/a_i}, \quad R = \text{const} |a_i t + C|^{v_i/a_i}, \quad (14)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования, определяющая начало отсчета времени,

$$a_i = 3v_i^2/\xi + 3v_i + 1/2. \quad (15)$$

Отдельные коэффициенты  $a_i$  равны

$$a_1 = -[\omega(1-a^2) - 1]/2, \quad a_i = 1 + (-1)^i \sqrt{\omega}, \quad i=2,3; \quad \omega \equiv 3\xi/2. \quad (16)$$

Решения (14) можно получить также из первого уравнения системы (9) с  $\alpha = \alpha_m$ . Они ранее были найдены в работах [14, 15]. Заметим, что из первого уравнения системы (4) следует равенство нулю плотности энергии  $\epsilon$  негравитационной материи для решения (13) при  $i = 2,3$ , т.е. описывают пустую Вселенную.

4. *Особые точки и фазовые траектории.* Вернемся теперь к динамической системе (9). При построении фазового портрета этой системы можно ограничиться исследованием случая  $x > 0$ . Фазовые траектории в области  $x < 0$  (сжимающиеся модели) получаются отсюда заменой  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$  и изменением направления стрелок, что является следствием инвариантности системы (7) относительно отражения  $(x, y, t) \rightarrow (-x, -y, -t)$ .

В дальнейшем случаи положительных и отрицательных  $\xi$  удобно рассматривать отдельно.

а) Случай  $\xi > 0$ . Особыми точками системы (9) в конечной части фазовой плоскости являются следующие точки окружности  $S^1$ :

$$A_m (r=0, \alpha = \alpha_m), \quad m=1-6, \\ \alpha_n = \operatorname{arcsctg} v_n, \quad \alpha_{n+3} = \alpha_n + \pi, \quad n=1-3. \quad (17)$$

Поведение фазовых траекторий в окрестности этих точек определяются собственными числами  $\lambda_1^{(m)}$  и  $\lambda_2^{(m)}$ , которые согласно (9) равны

$$\lambda_1^{(m)} = Z(\alpha_m), \quad \lambda_2^{(m)} = N'(\alpha_m). \quad (18)$$

Вычисления по формулам (10) приводят к следующим выражениям

$$\lambda_1^{(1)} = -\frac{\omega(1-a^2)-1}{2\sqrt{v_1^2+1}}, \quad \lambda_2^{(1)} = -\frac{\omega(1-a)^{-1}-1}{2\sqrt{v_1^2+1}} \\ \lambda_1^{(m)} = -\frac{\sqrt{\omega} + (-1)^m}{\sqrt{\xi/6+1}}, \quad \lambda_2^{(m)} = \frac{\sqrt{\omega}(1-a) + (-1)^m}{\sqrt{\xi/6+1}}, \quad m=2,3 \\ \lambda_i^{(m+3)} = -\lambda_i^{(m)}, \quad i=1,2; \quad m=1-3. \quad (19)$$

Отсюда следует невырожденность особых точек при  $\omega \neq 1, 1/(1-a)^2, 1/(1-a^2)$  (случай этих особых значений будет рассмотрен ниже отдельно). Поскольку все собственные числа действительны, то особые точки являются или узлами, или седловыми точками в зависимости от их знаков. Для системы (9) собственные векторы  $\vec{n}_i$ , соответствующие собственным числам  $\lambda_i$ , в полярных координатах имеют вид

$$\vec{n}_1 = (1, 0), \quad \vec{n}_2 = (0, 1), \quad (20)$$

т.е. совпадают с осями координатной системы  $(r, \alpha)$ .

Для исследования поведения динамической системы на бесконечности воспользуемся координатами  $(\rho, \alpha)$ , где  $\rho = 1/r$ . При таком отображении бесконечно удаленные точки переходят в точки окружности

$\bar{S}^1 = \{\rho=0, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$ . Система (9) принимает вид

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\rho Z(\alpha), \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = N(\alpha). \quad (21)$$

Здесь особыми являются точки

$$B_m(\rho = 0, \alpha = \alpha_m), \quad m = 1-6 \quad (22)$$

с собственными числами

$$\bar{\lambda}_1^{(m)} = -Z(\alpha_m), \quad \bar{\lambda}_2^{(m)} = N'(\alpha_m), \quad (23)$$

отличающиеся от собственных чисел точек  $A_m$  знаком перед  $\lambda_1^{(m)}$ . Как и выше, собственные векторы точек  $B_m$  совпадают с осями полярной системы координат.

Таким образом, динамическая система (9) имеет двенадцать особых точек  $A_m$  и  $B_m$ ,  $m = 1-6$  с действительными собственными числами  $\lambda_1^{(m)}$  и  $\bar{\lambda}_1^{(m)}$ , соответственно, задаваемые выражениями (19) и (23), причем

$$\bar{\lambda}_1^{(m)} = -\lambda_1^{(m)}, \quad \bar{\lambda}_2^{(m)} = \lambda_2^{(m)}. \quad (24)$$

Невырожденные особые точки с действительными собственными числами классифицируются следующим образом. Когда собственные числа различны и одного знака точка является притягивающим (устойчивым) узлом при  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Траектории в окрестности особой точки входят в эту точку, при этом все траектории, кроме двух, касаются собственного вектора, отвечающего минимальному по модулю собственному числу, а две исключительные траектории касаются второго собственного вектора. Если  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , то узел отталкивающий (неустойчивый). Соответствующий фазовый портрет получается из предыдущего случая обращением направления времени (стрелок). В случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  особая точка называется звездным (дикритическим) узлом. При  $\lambda < 0$  все траектории в окрестности особой точки входят в эту точку, касаясь произвольных направлений. Случай  $\lambda > 0$  описывается аналогично при обращении времени. Если собственные числа имеют противоположные знаки, то особая точка является седлом (см., например, точку на рис.2). Седловая особая точка неустойчива при любом направлении времени. Исключительные траектории, входящие в эту особую точку, называются сепаратрисами седла.

На основе такой классификации и соотношений (19) и (24) можно сделать следующие заключения. Во-первых, все узлы при  $a = 0$  являются дикритическими, во-вторых, характер особых точек  $A_2, A_5, B_2, B_5$  не зависит от значений параметров  $\xi$  и  $a$ . Точки  $A_2$  и  $A_5$  являются седловыми точками,

точка  $B_2$  — неустойчивым узлом, точка  $B_5$  — устойчивым узлом. В окрестности  $B_2$  и  $B_5$  все траектории, кроме исключительных, касаются собственного вектора  $\vec{n}_2$  при  $a > 0$  и  $\vec{n}_1$  при  $a < 0$ . Характер других особых точек меняется в зависимости от значений параметров. На рис. 1 представлено разбиение пространства параметров  $a, \omega$  на шесть различных областей I—VI, в каждой из которых качественная фазовая картина системы (7) одна и та же, а при переходе из одной области в другую происходит смена качественных структур. Границами этих областей служат линии

$$\omega = 1, \omega = 1/(1-a)^2, \omega = 1/(1-a^2) \quad (25)$$

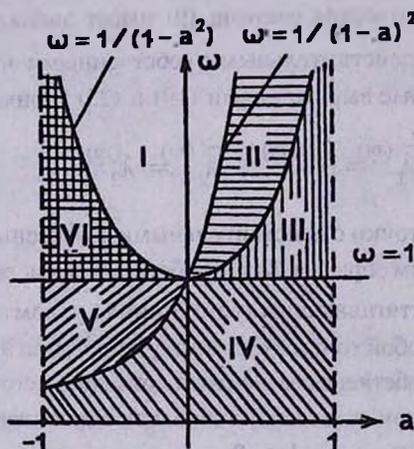


Рис. 1 Разбиение пространства параметров  $(a, \omega)$  динамической системы (7) на качественно различные области.

являющиеся бифуркационными кривыми динамической системы. Качественная структура разбиения фазовой плоскости  $(X, Y)$  на траектории для каждой из шести областей изображена на рис. 2, 3. На этих рисунках предварительно проведено отображение фазовой плоскости  $(X, Y)$  на кольцеобразную область между окружностями  $A_1 A_2 \dots A_6$  (образ окружности  $S^1 = \{r=0, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$ ) и  $B_1 B_2 \dots B_6$  (образ окружности  $\bar{S}^1 = \{r=\infty, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$ ). Это можно сделать, например, посредством отображения

$$(r, \alpha) \rightarrow (\bar{r}, \alpha), \quad r = (\bar{r} - 1)/(2 - \bar{r}), \quad 1 \leq \bar{r} \leq 2.$$

Частным решением (13), (14) соответствуют траектории  $B_1 A_1 A_4 B_4$ ,  $B_2 A_2 A_5 B_5$ ,  $B_3 A_3 A_6 B_6$  для  $i=1, 2, 3$ , которые являются сепаратрисами соответствующих седловых точек. Из характера особых точек  $B_2$  и  $A_2$  следует, что чисто вакуумная траектория  $B_2 A_2$  ( $\epsilon = 0$ , расширение пустого пространства) неустойчива: при появлении сколь угодно малого  $\epsilon$  траектории удаляются от нее. Сжатие же пустого пространства соответствующее тра-

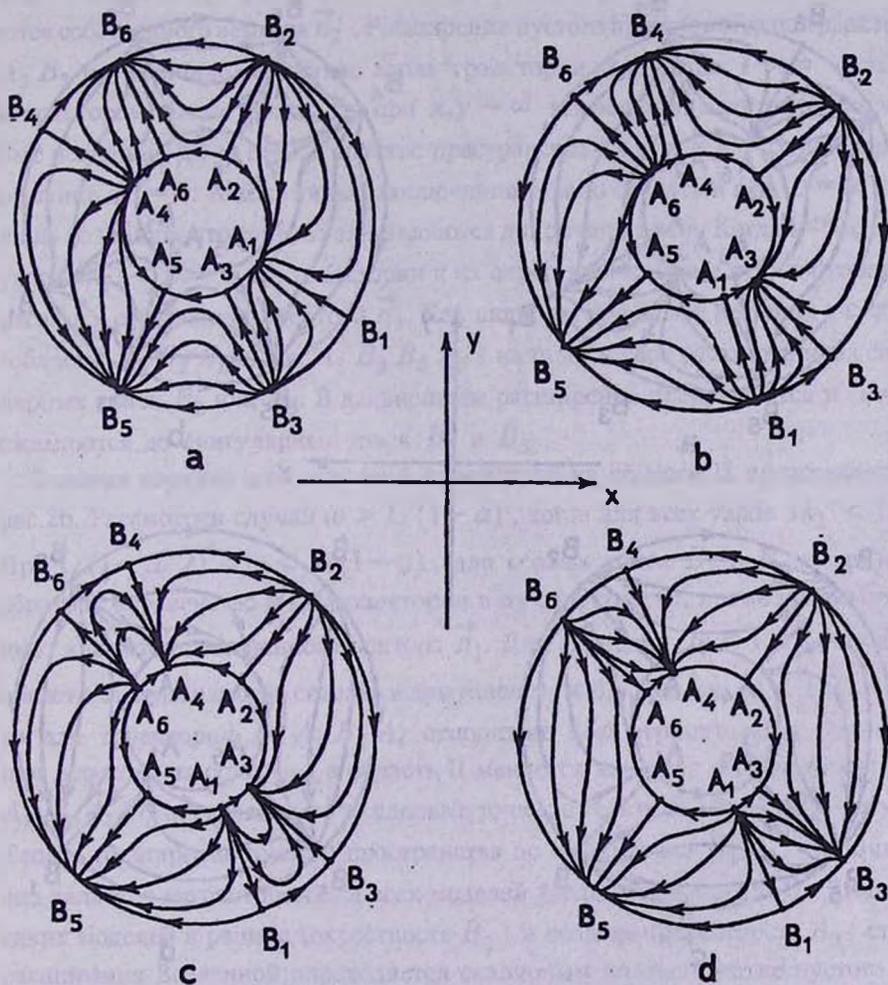


Рис.2 Фазовые картины динамической системы (7) в различных областях пространства параметров (см. рис. 1): а) область I, б) область II, в) область III, д) область IV.

ектории  $A_5 B_5$  устойчиво и при  $t \rightarrow \infty$  является аттрактором для решений с  $\varepsilon \neq 0$ .

Из первого уравнения системы (4) следует, что внутри (вне) областей  $A_2 A_3 B_3 B_2$  и  $A_5 A_6 B_6 B_5$  отношение  $\varepsilon/\varphi$  положительно (отрицательно). Первая из них соответствует моделям расширения ( $x = R/R > 0$ ), вторая —

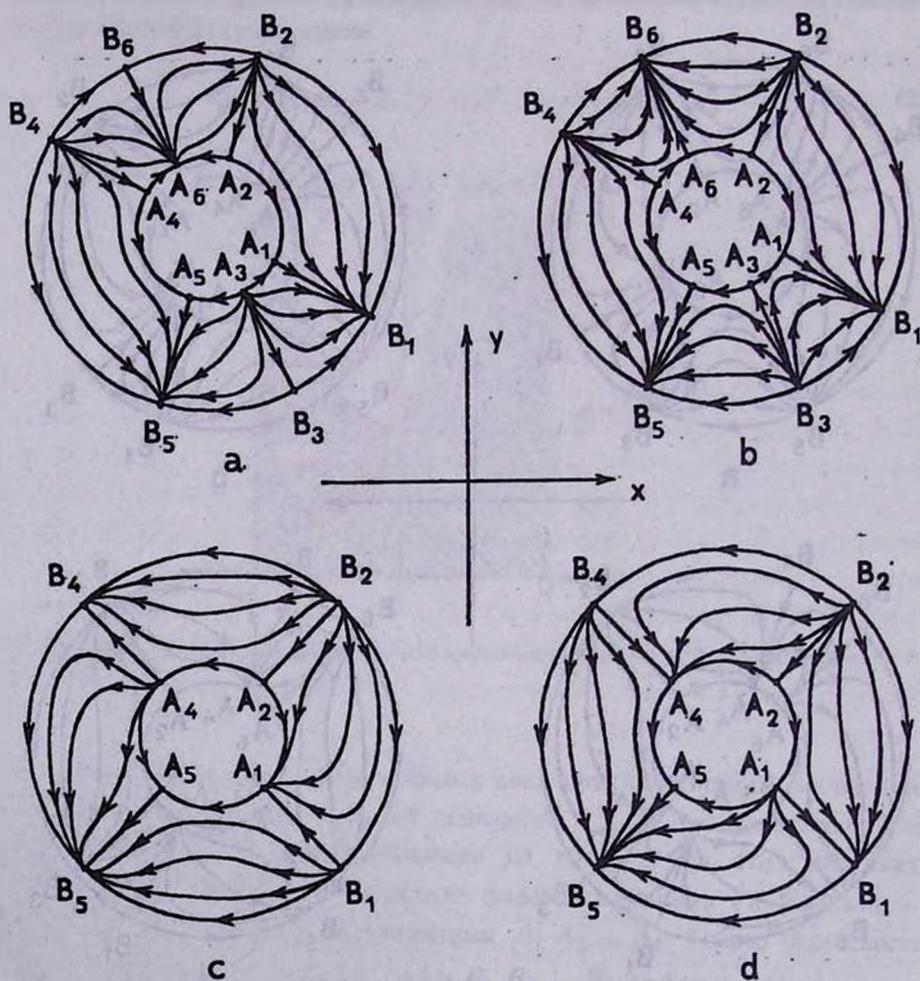


Рис.3 Фазовые картины динамической системы в различных областях пространства параметров: а) область V, б) область VI, в)  $\omega = 1/(1-a)^2$ ,  $a > 0$ , г)  $\omega = 1/(1-a)^2$ ,  $a < 0$ .

моделям сжатия. Исключительная траектория  $B_1 A_1 A_4 B_4$  находится в этих областях при условии  $\omega(1-a)^2 > 1$ . Фазовый портрет системы (7) для значений параметров  $a, \omega$  из области I:

$$\omega > 1/(1-a)^2, 1/(1-a^2)$$

изображен на рис.2а. Рассмотрен случай  $a > 0$ , когда для всех узлов  $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ , и все траектории в их окрестности, кроме исключительных, касаются собственного вектора  $\vec{n}_2$ . Расширение пустого пространства по траектории  $A_3 B_3$  неустойчиво, а сжатие вдоль траектории  $A_6 B_6$  при  $t \rightarrow \infty$  является аттрактором. Видно также, что при  $x, y \rightarrow \infty$  все решения ведут себя как частные решения (14) с  $i = 2, 3$  (пустое пространство), а при  $x, y \rightarrow 0$  как частное решение с  $i = 1$ . Аналогичные заключения можно сделать и при  $a = 0$ , с той лишь разницей, что теперь узлы являются дикритическими. Когда  $a < 0$  для всех узлов  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$  и все траектории в их окрестности, кроме исключительных, касаются собственного вектора  $\vec{n}_1$ . Как видно из рис.2а все решения с  $\varepsilon/\varphi < 0$  (области  $A_2 B_2 B_6 A_6$  и  $A_3 B_3 B_5 A_5$ ) начинают свое расширение из сингулярных точек  $B_2$  или  $B_3$ . В дальнейшем расширение прекращается и модели сжимаются до сингулярных точек  $B_6$  и  $B_5$ .

Фазовая картина для значений параметров из области II представлена на рис.2б. Рассмотрен случай  $\omega > 1/(1-a)$ , когда для всех узлов  $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ . При  $1/(1-a/2)^2 < \omega < 1/(1-a)$ , для особых точек  $B_1$  и  $B_4$  имеет место обратное неравенство и все траектории в их окрестности, кроме исключительных, касаются собственного вектора  $\vec{n}_1$ . Для значений  $\omega < 1/(1-a/2)^2$  из области II это же можно сказать и для узлов  $A_3$  и  $A_6$ . Так как  $\omega < 1/(1-a)^2$ , то для траектории  $B_1 A_1 B_4 A_4$  отношение  $\varepsilon/\varphi$  отрицательно. Видно, что при переходе из области I в область II меняется характер особых точек: узлы  $A_1, B_3, A_4, B_6$  превращаются в седловые точки, а точки  $B_1, A_3, A_6, B_4$  — в узлы. Теперь расширение пустого пространства по траектории  $B_3 A_3$  устойчиво и оно является аттрактором для всех моделей расширения с  $\varepsilon/\varphi > 0$ . Динамика таких моделей в ранние (окрестность  $B_2$ ) и поздние (окрестность  $A_3$ ) стадии расширения Вселенной определяется скалярным полем. Сжатие пустого пространства с началом в точке  $A_6$  неустойчиво. При появлении сколь угодно малой  $\varepsilon$  соответствующие траектории удаляются от  $A_6 B_6$  и заканчиваются в точках  $B_4$  (при  $\varepsilon/\varphi < 0$ ) или  $B_5$  (при  $\varepsilon/\varphi > 0$ ). Существует класс моделей с

$\varepsilon/\varphi < 0$ , начинающихся в точках  $B_1$  и  $B_2$ , для которых расширение переходит в дальнейшее сжатие с конечными точками  $B_5$  и  $B_4$  соответственно.

При переходе из области II в область III изменится лишь характер особых точек  $A_1, B_1, A_4, B_4$ . Точки  $A_1$  и  $A_4$  становятся узлами, точки  $B_1$  и  $B_4$  — седловыми точками. Соответствующий фазовый портрет изображен на рис.2с. Теперь имеется класс моделей расширения (область  $A_1 B_1 B_3 A_3$ ) с началом и концом на окружности  $S^1$ .

Картина фазовых траекторий динамической системы (7) для значений параметров

$$\omega < 1, \quad 1/(1-a)^2$$

(область IV) изображена на рис.2d. По сравнению с предыдущим случаем изменился характер особых точек  $A_3, B_3, A_6, B_6$ : точки  $B_3$  и  $B_6$  превращаются в узлы (соответственно, устойчивый и неустойчивый), а  $A_3$  и  $A_6$  — в седловые точки. Это связано с тем, что при переходе мы пересекаем бифуркационную кривую  $\omega = 1$ . На рис.2d изображен случай  $a > 0$ . При  $a = 0$  все узлы становятся дикритическими, а при  $a < 0$  изменятся направления касания траекторий в окрестности узлов: для  $B_2$  выполняется неравенство  $\lambda_1 < \lambda_2$ , а для остальных узлов  $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ . Все модели расширения с  $\varepsilon/\varphi > 0$  начинаются в точке  $B_2$  и заканчиваются также в сингулярной точке  $B_3$ . Для них характерным является доминантность скалярного поля в ранних и поздних этапах расширения. Расширение пустого пространства с началом в особой точке  $A_3$  устойчиво и является аттрактором для моделей расширения. Существуют также классы моделей расширения с дальнейшим сжатием (области  $A_1 B_1 B_5 A_5$  и  $A_2 B_2 B_4 A_4$ ).

Еще одна перестройка фазовых траекторий происходит при переходе из области IV в область V (рис.3а). Теперь  $\omega > 1/(1-a)^2$  и траектории  $A_1 B_1, B_4 A_4$  находятся в областях с  $\varepsilon/\varphi > 0$ . Они являются аттрактором для моделей расширения. В ранние этапы расширения (точки  $B_2$  и  $A_3$ ) динамика модели по-прежнему определяется скалярным полем. В поздних этапах модели расширения ведут себя как частное решение (14) с  $i = 1$ . На рис.3а изображен случай  $\omega > 1/(1-a)$ , когда для всех узлов  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ . При  $1/(1-a/2)^2 < \omega < 1/(1-a)$  для точек  $B_1$  и  $B_4$  выполняется обратное неравенство и меняются направления касания траекторий в их окрестности. Для  $\omega < 1/(1-a/2)^2$  меняются также направления касания в окрестности

особых точек  $A_3$  и  $A_6$ . Класс смешанных моделей расширения — сжатия находится в секторах  $A_3 B_3 B_5 A_5$  и  $B_2 A_2 A_6 B_6$ .

И, наконец, в области VI точки  $A_3$  и  $A_6$  превращаются из узлов в седловые точки, а  $B_3$  и  $B_6$  — из седловых точек в узлы (неустойчивый и устойчивый, соответственно). Фазовая картина этого случая представлена на рис.3б. Для всех узлов  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$  и все траектории, кроме исключительных, касаются собственного вектора  $\vec{n}_1$ . Все модели заканчиваются в сингулярных точках  $B_1$ .

В приведенном выше анализе предполагалось, что точка в пространстве параметров  $a, \omega$  не находится на бифуркационных кривых (25) (см. рис.1). Рассмотрим теперь случай этих особых значений. Как уже отмечалось выше при  $\omega = 1/(1-a)^2$  точки  $A_1, B_1, A_4, B_4$  совпадают с точками  $A_3, B_3, A_6, B_6$ , соответственно. Как это видно из выражений (19) эти особые точки становятся вырожденными:  $\lambda_2 = 0$ . Здесь нужно различать два случая, соответствующие переходам между областями I и II, IV и V. Фазовые картины динамической системы (7) для этих случаев получаются из рис. 2а и рис.2д после указанного выше совмещения особых точек. Они представлены на рис.3с и 3д, соответственно. Точки  $A_1, B_1, A_4, B_4$  являются вырожденными особыми точками типа седло-узел. Они представляют собой неустойчивые состояния равновесия с одним узловым сектором и одним седловым. Модели расширения с  $\varepsilon/\varphi > 0$  начинаются в точке  $B_2$  и заканчиваются в  $A_1$  или  $B_1$ . Однако вследствие неустойчивости этих особых точек появление сколь угодно малой  $\varepsilon$  с  $\varepsilon/\varphi < 0$  приводит к дальнейшей эволюции модели, заканчивающейся сжатием до сингулярной точки  $B_5$ . То же самое можно сказать для моделей с  $\varepsilon/\varphi < 0$  и началом в точке  $B_2$ .

Перейдем к рассмотрению случая особых значений

$$\omega = 1, \quad \omega = 1/(1-a^2),$$

для которых динамическая система (7) имеет целые прямые особых точек:  $y = -3x$  и  $y = -3(1+a)x$ , соответственно. Фазовые картины для значений параметров на границах между различными областями изображены на рис.4. Граничным точкам между областями III, IV и V, VI соответствуют рис.4а и рис.4д, соответственно. Особая прямая  $y = -3x$  изображена отрезками  $A_3 B_3, A_6 B_6$ , для которых  $\varepsilon = 0$ . Рис.4б и 4с соответствуют граничным точкам между областями VI, I и II, III. На них особая прямая  $y = -3(1+a)x$  представлена отрезками  $A_1 B_1, A_4 B_4$ . Из рис.4а видно, что точки отрезка  $A_3 B_3$  явля-

ются конечными точками для моделей расширения начинающихся в точке  $B_2$  при  $\varepsilon/\varphi > 0$  и в точке  $A_1$  при  $\varepsilon/\varphi < 0$ . Траектории в областях  $A_1 B_1 B_5 A_5$  и  $A_2 B_2 B_4 A_4$  соответствуют моделям, для которых расширение в дальнейшем меняется на сжатие. На рис.4б особая линия находится в области с  $\varepsilon/\varphi > 0$  и является конечной для траекторий расширения с  $\varepsilon/\varphi > 0$ , начинающихся в сингулярных точках  $B_2$  и  $B_3$ . Особая линия  $A_4 B_4$  неустойчива. При сколь

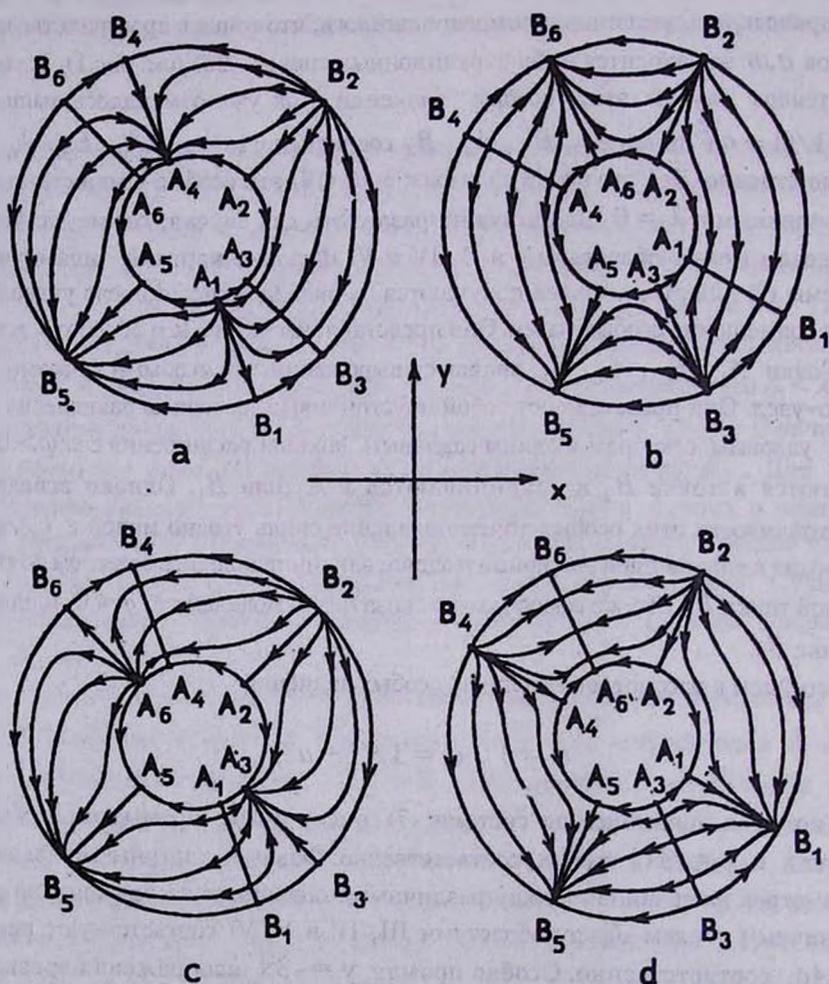


Рис.4. Фазовые картины динамической системы (7) для значений параметров  $a, \omega$  принадлежащих бифуркационным кривым: а)  $\omega = 1, a > 0$ , б)  $\omega = 1/(1-a^2), a < 0$ , в)  $\omega = 1/(1-a^2), a > 0$ , д)  $\omega = 1, a < 0$ .

угодно малом отклонении от нее существующие модели сжимаются до сингулярных точек  $B_5$  или  $B_6$ . На рис.4с расширение пустого пространства по  $B_3 A_3$  устойчиво и при  $t \rightarrow \infty$  является аттрактором для траектории в области  $A_1 B_1 B_2 A_2$ . В других моделях расширение меняется на сжатие (секторы  $A_2 B_2 B_4 A_4$  и  $A_1 B_1 B_5 A_5$ ) заканчивающееся или на отрезке  $A_4 B_4$  или в сингулярной точке  $B_5$ .

б) *Случай*  $\xi < 0$ . Теперь уравнение (11) имеет единственное действительное решение  $v = v_1 = -\xi(1-a)/2$ . Во всей фазовой плоскости  $\varepsilon/\varphi \geq 0$ . Особыми точками системы (9) являются

$$A_m(r=0, \alpha_m), \quad m=1,2, \quad \alpha_1 = \text{arccot} v_1, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \pi \quad (26)$$

с собственными числами (18), равными

$$\lambda_1^{(1)} = -\frac{|\omega|(1-a^2)+1}{2\sqrt{v_1^2+1}}, \quad \lambda_2^{(1)} = -\frac{|\omega|(1-a^2)+1}{2\sqrt{v_1^2+1}}$$

$$\lambda_i^{(2)} = -\lambda_i^{(1)}, \quad i=1,2. \quad (27)$$

На бесконечности динамическая система имеет две особые точки:

$$B_m(r=\infty, \alpha = \alpha_m), \quad m=1,2,$$

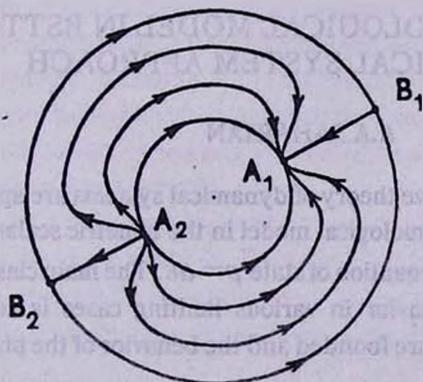


Рис.5. Фазовый портрет динамической системы (7) при  $\xi < 0$  и  $a > 0$ .

собственные числа  $\bar{\lambda}_i^{(m)}$  которых отличаются от (27) знаком перед  $\lambda_i$ :

$$\bar{\lambda}_1^{(m)} = -\lambda_1^{(m)}, \quad \bar{\lambda}_2^{(m)} = \lambda_2^{(m)}.$$

Из вышеприведенной классификации особых точек следует, что точка  $A_1$  является устойчивым узлом,  $A_2$  — неустойчивым узлом, точки  $B_1$  и  $B_2$  — седловыми точками. Для узлов  $A_i$  при  $a > (<) 0$  имеем  $|\lambda_2| < (>) |\lambda_1|$  и все траектории в их окрестности, кроме исключительных, касаются собственного вектора  $\vec{n}_2$  ( $\vec{n}_1$ ). Соответствующая фазовая картина изображена на рис.5. При  $a < 0$  картина отличается от этого лишь тем, что в окрестностях точек  $A_i$  траектории касаются направлений  $B_1 A_1$  и  $A_2 B_2$ . В случае  $a = 0$  точки  $A_i$  становятся дикритическими узлами. Сжатие вдоль траектории  $A_2 B_2$  неустойчиво. Для других траекторий, начинающихся в точке  $A_2$  сжатие в дальнейшем меняется на расширение и заканчивается в устойчивом узле  $A_1$ . Там же заканчивается сепаратриса  $B_1 A_1$  (частное решение (14) с  $i = 1$ ), описывающая расширение из сингулярной точки  $B_1$ . Таким образом, при  $\xi < 0$  плоские космологические модели БСТТ, кроме исключительных траекторий  $B_1 A_1$  и  $A_2 B_2$ , являются несингулярными.

Автор выражает благодарность участникам семинара кафедры теоретической физики Ереванского государственного университета за обсуждение результатов работы.

Ереванский государственный университет,  
Армения

## FLAT COSMOLOGICAL MODEL IN BSTT: A DYNAMICAL SYSTEM APPROACH

A.A.SAHARIAN

The methods of the qualitative theory of dynamical systems are applied to the flat isotropic and homogeneous cosmological model in the bimetric scalar-tensor theory of gravitation (BSTT) with the equation of state  $p = a\varepsilon$ . The main classes of solutions are distinguished and its behavior in various limiting cases is considered. The bifurcation lines of the system are founded and the behavior of the phase trajectories near this lines is investigated.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *О.И.Боголюбский*, Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике, Наука, М., 1980.
2. *P.Turkowski, K.Maslanka*, Gen. Rel. Grav., 19, 611, 1987.
3. *В.А.Белинский и др.*, ЖЭТФ, 89, 346, 1985.
4. *C.Romero, H.P.Oliveira, J.R.T. de Mello Neto*, Astrophys. Space Sci., 148, 229, 1988.
5. *C.Romero, H.P.Oliveira*, Astrophys. Space Sci., 159, 1, 1989.
6. *А.Д.Линде*, Физика элементарных частиц и инфляционная космология, Наука, М., 1990.
7. *D.La, D.J.Steinhardt*, Phys. Rev. Lett., 62, 376, 1989.
8. *E.J.Weinberg*, Phys. Rev. D, 40, 3950, 1989.
9. *J.D.Barrow, K.Maeda*, Nucl. Phys., B341, 294, 1990.
10. *F.S.Accetta, J.J.Trester*, Phys. Rev. D, 39, 2854, 1989.
11. *Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, Астрофизика, 31, 359, 1989.
12. *L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian*, Astrophys. Space Sci., 167, 271, 1990.
13. *М.Р.Авакян, Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, Астрофизика, 32, 189, 1990.
14. *Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, В сб. "Гравитационная энергия и гравитационные волны", Дубна, 1992, с.193.
15. *L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian*, Astrophys. Space Sci., 207, 1, 1993.
16. *А.А.Саарян*, Астрофизика, 37, 1994.
17. *Н.Н.Баутин, Е.А.Леонтович*, Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, Наука, М., 1976.