АСТРОФИЗИКА

ТОМ 37 ФЕВРАЛЬ, 1994 ВЫПУСК 1

УДК: 52: 531: 51

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В БСТТ

Л.Ш.ГРИГОРЯН, А.А.СААРЯН

Поступила 15 декабря 1993
Принята к печати 26 декабря 1993

В рамках биметрической скалярно-тензорной теории гравитации получены ковариантные выражения сохраняющихся 4-импульса и момента импульса гравитационного поля вместе с материей. Эти величины представлены в виде поверхностных интегралов, позволяющих вычислить их значения лишь на основе данных в асимптотической области вдали от источника.

В биметрической скалярно-тензорной теории (БСТТ) гравитации переменными гравитационного поля являются искривленная метрика g_{ik} и скалярное поле φ, рассматриваемые на фоне плоского пространства — времени с метрикой γ_{ik}. Полное действие теории имеет вид [1,2]

$$S=\int\left[-\frac{1}{2}\varphi\Lambda_g+\frac{1}{2}\zeta(\varphi)g^{ik}\varphi_{,i}\varphi_{,k}/\varphi+L_m\right]\sqrt{-g}\,d^4x\ , \tag{1}$$

где $\varphi_{,i}=\partial\varphi/\partial x^i$, $\zeta(\varphi)$ — безразмерная функция связи, L_m — плотность лагранжиана негравитационной материи,

$$\Lambda_g=g^{ik}\left(\bar{\Gamma}^l_{in}\bar{\Gamma}^n_{kl}-\bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{\Gamma}^n_{ln}\right)\ ,\quad \bar{\Gamma}^l_{ik}=\Gamma^l_{ik}-\overset{\gamma}{\Gamma}{}^l_{ik}\ , \tag{2}$$

Γ^l_{ik} и $\overset{\gamma}{\Gamma}{}^l_{ik}$ — символы Кристоффеля для метрик g_{ik} и γ_{ik} соответственно. Для исследования интегральных законов сохранения уравнения гравитационного поля, вытекающие из (1), удобно записать в виде [3]

$$U^{limp}_{|pl}=2(T^{lm}+t^{lm}_{LL})g/\gamma\varphi\ ,\quad U^{limp}=(g^{lm}g^{ip}-g^{lp}g^{im})g/\gamma \tag{3а}$$

$$2\zeta\varphi^{;n}_{;n}+(d\zeta/d\varphi-\zeta/\varphi)g^{ik}\varphi_{,i}\varphi_{,k}+\varphi\Lambda_g=0\ . \tag{3б}$$

Вертикальная черточка и точка с запятой обозначают ковариантные производные соответственно по метрикам γ_{ik} и g_{ik}, T^{lm} — метрический тензор энергии — импульса негравитационной материи, t^{lm}_{LL} (явное выражение приведено в [3]) — ковариантное обобщение псевдотензора Ландау–Лифшица общей теории относительности (ОТО) на случай БСТТ, t^{lm}_{LL} — симметричный тензор, зависящий только от первых производных гравитационного поля. Вследствие антисимметричности U^{limp} относительно перестановки двух первых индексов из (3а) следует дифференциальный закон сохранения

$$[(T^{lm}+t^{lm}_{LL})g/\gamma\varphi]_{|l}=0\ . \tag{4}$$

Можно вывести более общее соотношение (аналогичный вывод в случае теории Йордана–Бранса–Дикке приведен в [4,5]), если записать (3а) в следующем эквивалентном виде

$$\sigma^{lim}_{|i}=\tau^{lm}\ , \tag{5}$$

где

$$\sigma^{lim}=\lambda^{limp}_{|p}=[f(\varphi)U^{limp}]_{|p}\varphi_o/2f_o\ ,\quad f_o=f(\varphi_o)\ ,$$

$$\tau^{lm}=(\bar{t}^{lm}_{LL}+T^{lm})g\varphi_o f(\varphi)/\gamma\varphi f_o\ , \tag{6}$$

$$\bar{t}^{lm}_{LL}=t^{lm}_{LL}+[(f_{,p}U^{limp})_{|i}+f_{,i}U^{limp}_{|p}]\varphi\gamma/2gf(\varphi)\ ,$$

а $f(\varphi)$ — произвольная функция, φ_o — постоянная размеренности φ. Для случая изолированной гравитирующей системы постоянную φ_o выберем равной асимптотическому значению скалярного поля вдали от системы. Заметим, что в отличие от t^{lm}_{LL} симметричный тензор $\bar{t}^{lm}_{LL}$ в общем случае содержит вторые производные скалярного поля. Аналогично (4) из уравнения (5) следует ковариантный дифференциальный закон сохранения для материи и гравитационного поля взятых вместе:

$$\tau^{lm}_{\ |l}=0\ . \tag{7}$$

Чтобы записать это уравнение в обычном виде, содержащем частные производные, воспользуемся тем обстоятельством, что фоновое пространство–время является плоским, и поэтому обладает десятью векторами Киллинга ξ_m:

$$\xi_{m|n}+\xi_{n|m}=0 \tag{8}$$

В силу симметричности τ^{lm} теперь (7) можно представить в виде

$$(\sqrt{-\gamma}\,\xi_m\tau^{lm})_{,l}=0\ , \tag{9}$$

откуда следует, что ковариантная величина

$$P=\int\sqrt{-\gamma}\,\xi_m\tau^{lm}dV_l \tag{10}$$

сохраняется, если соответствующий поток на бесконечности равен нулю. В (10) интегрирование производится по любой бесконечной гиперповерхности, охватывающей все трехмерное пространство. Важным следствием существования у тензора энергии–импульса τ^{lm} суперпотенциала $\sigma^{ilm}=\sigma^{ilm}$ (см. (5)) является вывод о том, что (10) можно представить в виде поверхностного интеграла, и поэтому возможно вычисление интегральных сохраняющихся величин лишь на основе данных в асимптотической области вдали от источника (см., например, [6]). Действительно, с учетом (5) и (6) величину (10) можно представить в виде

$$P=\int[(\sigma^{ilm}\xi_m)_{|i}-(\lambda^{ilmp}\xi_{m|i})_{|p}+\lambda^{ilmp}\xi_{m|ip}]\sqrt{-\gamma}\,dV_l\ . \tag{11}$$

Поскольку фоновое пространство–время плоское, то $\xi_{m|ip}=0$. Учитывая также антисимметричность σ^{ilm} и равенство

$$\lambda^{ilmp}\xi_{m|i}=-\lambda^{piml}\xi_{m|i}$$

из (11) получим выражение

$$P=\int (\sigma^{lim}\xi_m+\lambda^{lpmi}\xi_{m|p})_{,i}\sqrt{-\gamma}\, dV_l \quad , \tag{12}$$

которое преобразуется в интеграл по двумерной поверхности:

$$P=\frac{1}{2}\oint (\sigma^{lim}\xi_m+\lambda^{lpmi}\xi_{m|p})\sqrt{-\gamma}\, df^{*}_{li} \; . \tag{13}$$

Если в формуле (12) в качестве области интегрирования выбрать гиперплоскость $x^0=\mathrm{const}$, то в (13) поверхность интегрирования оказывается чисто пространственной

$$P=\oint (\sigma^{0\alpha m}\xi_m+\lambda^{0pm\alpha}\xi_{m|p})\sqrt{-\gamma}\, dS_\alpha \; . \tag{14}$$

Здесь и далее греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3.

Поскольку плоское пространство–время обладает десятью независимыми векторами Киллинга, то из (13) вытекает десять независимых интегральных сохраняющихся величин 4–импульса и момента импульса. Для подгруппы трансляции (см., например, [7])

$$\xi_m=f^k_{,m}a_k$$

и поэтому из (13) вытекает следующее выражение для 4–импульса системы

$$P^k=\frac{1}{2}\oint \sigma^{lim}f^k_{,m}\sqrt{-\gamma}\, df^{*}_{li}=\oint \sigma^{0\alpha m}f^k_{,m}\sqrt{-\gamma}\, dS_\alpha \quad , \tag{15}$$

где f^k — функции, связывающие координаты x^i с координатами x'^i, в которых метрический тензор фонового пространства–времени диагонален $\gamma_{ik}=\mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$:

$$x'^k=f^k(x^i) \; .$$

Аналогичным образом, выбирая

$$\xi_m=f^l_{,m}f^k\omega_{lk} \quad , \quad \omega_{lk}=-\,\omega_{kl}$$

получаем момент импульса системы:

$$M^{ik}=\frac{1}{2}\oint\left[\sigma^{lpm}(f^{l}_{,m}f^{k}-f^{k}_{,m}f^{l})-\lambda^{lnmp}(f^{l}_{,m}f^{k}_{,n}-f^{k}_{,m}f^{l}_{,n})\right]\sqrt{-\gamma}\,df^{*}_{lp}=$$
$$=\oint\left[\sigma^{o\alpha m}(f^{l}_{,m}f^{k}-f^{k}_{,m}f^{l})-\lambda^{onm\alpha}(f^{l}_{,m}f^{k}_{,n}-f^{k}_{,m}f^{l}_{,n})\right]\sqrt{-\gamma}\,dS_{\alpha}\ . \qquad (16)$$

Формулы (15) и (16) позволяют вычислить значения сохраняющихся величин для гравитирующей системы, используя лишь значения полевых переменных в асимптотической области.

В качестве примера вычислим полную энергию системы в случае постоянного гравитационного поля. При этом вдали от системы искривленную метрику и скалярное поле в системе координат

$$\gamma_{ik}=\mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1) \qquad (17)$$

можно представить в виде [8]

$$g_{oo}=1-\frac{2GM}{r}+\ldots\ ,\quad g_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}(1+\frac{2GM}{r})+\ldots$$
$$\varphi=\varphi_{o}(1+\frac{2GM_{s}}{r})+\ldots\ ,\quad \varphi_{o}=\frac{1}{8\pi G}\ , \qquad (18)$$

где M — гравитационная масса системы, а M_s — так называемая скалярная масса. Из (15) для полной энергии системы находим

$$P^{o}=\oint\lambda^{o\alpha op}_{,p}\,dS_{\alpha}=M+\frac{\varphi_{o}f'_{o}}{2f_{o}}M_{s} \qquad (19)$$

В [9], используя постньютоновское приближение теории было показано, что БСТТ удовлетворяет сильному принципу эквивалентности, и поэтому гравитационная и инертная массы должны равняться друг другу. Чтобы инертная масса, определенная как P^{o}, удовлетворяла этому требованию, нужно выбрать $f'_{o}=0$, т.е., например,

$$f(\varphi)=\mathrm{const}\ . \qquad (20)$$

Отметим, что лишь в этом случае тензор τ^{lm} не содержит вторые производные скалярного поля. Таким образом, при условии (20)

$$M_i \equiv P^o = M = \int (T^{\,o}_{o} - T^{\,\alpha}_{\alpha}) \sqrt{-g}\, d^3x \tag{21}$$

(мы воспользовались формулой для M, выведенной в [8]).

В заключение покажем, что определенная нами инертная масса совпадает с коэффициентом M_i в выражении

$$S = S_g + S_m = -M_i \int dt \tag{22}$$

для полного действия в системе покоя гравитирующего тела. В (22) действие рассматривается на решениях уравнений поля (см. также [1]). Это нетрудно сделать, если воспользоваться равенством

$$\zeta(\varphi)\, g^{ik} \varphi_{,i}\, \varphi_{,k}/\varphi - \varphi \Lambda_g = (\varphi \bar{W}^{\,n})_{;n} + T\ , \tag{23}$$

которое является следствием системы (3), T — след тензора энергии импульса материи, а

$$\bar{W}^{\,i} = g^{ln}\, \bar{\Gamma}^{i}_{ln} - g^{il}\, \bar{\Gamma}^{n}_{ln}\ .$$

Подставив (23) в выражение (1), получим

$$S = \frac{1}{2} \int \left[(\varphi \bar{W}^{\,n})_{;n} + T + 2L_m\right] \sqrt{-g}\, d^4x\ .$$

Трехмерный пространственный интеграл в первом слагаемом можно преобразовать, используя теорему Гаусса, (17), (18), а также равенство $L_m = -T^o_o$ справедливое для материи. После этого достаточно воспользоваться формулой (21), чтобы прийти к искомому соотношению:

$$S = -\frac{M}{2} \int dt - \int (T^o_o - T/2) \sqrt{-g}\, d^4x = M_i \int dt\ .$$

Институт прикладных проблем физики НАН Армении,
Ереванский государственный университет

INTEGRAL CONSERVATION LAWS IN BSTT

L.SH.GRIGORIAN, A.A.SAHARIAN

The covariant expressions of the energy–momentum and angular momentum for matter and gravitational field are derived within the framework of Bimetric Scalar–Tensor Theory of gravity. These quantities are expressed as surface integrals, which allows to evaluate energy–momentum and angular momentum completely in the asymptotic region, without any detailed knowledge of the near–field behavior.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, Астрофизика, 31, 359, 1989.
2. *L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian*, Astrophys. and Space Sci., 167, 271, 1990.
3. *А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян*, Астрофизика, 33, 107, 1990.
4. *D.L.Lee*, Phys. Rev., D10, 2374, 1974.
5. *А.А.Саарян*, Астрофизика, в печати.
6. *D.L.Lee, A.P.Lightman, W.-T.Ni*, Phys. Rev., D10, 1685, 1974.
7. *А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили*, Релятивистская теория гравитации, Наука, М., 1989.
8. *М.Р.Авакян, Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, Астрофизика, 34, 265, 1991.
9. *А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян*, Астрофизика, 32, 491, 1990.