А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 37 ФЕВРАЛЬ, 1994 ВЫПУСК 1

УДК: 52–64

К ТЕОРИИ ИЗОТРОПНОГО РАССЕЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛОЕ. О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ.

Э.Х.ДАНИЕЛЯН

Поступила 29 ноября 1993
Принята 22 декабря 1993

Проведены дальнейшие аналитические исследования метода линейных несингулярных интегральных уравнений, предложенного в работе [2] для решения задач теории переноса излучения в среде конечной оптической толщины при изотропном рассеянии. Показано, что в общем случае, при наличии истинного поглощения, решение задач указанного класса сводится к нахождению лишь функций $u^{\pm}(\eta,\tau)$. Найдены явные выражения этих функций при $\tau = 0$.

Приводится новая формулировка возможности полного аналитического решения проблемы — как решение интегрального уравнения (25) на полуоси, с ядром представимым в виде суперпозиции экспонент.

Обсуждается вопрос выбора эффективного способа нахождения φ – функции Амбарцумяна полубесконечной среды. В частности, приводится новое уравнение для нее.

1. *Введение.* Нахождение характеристик поля диффузного излучения при изотропном рассеянии в плоском слое конечной оптической толщины (от $\varphi(\eta,\tau)$, $\psi(\eta,\tau)$ – функций Амбарцумяна, до функции Грина – $G(\tau,\tau',\tau_0,\eta,\zeta)$ зависящей от пяти аргументов) сводится [1] к одной либо двум квадратурам по угловой переменной, если известны вспомогательные функции $a(\eta,\tau)$ и $b(\eta,\tau)$. Для них недавно были найдены [2] элементарные (алгебраические) выражения посредством некоторых функций $u^{\pm}(\eta,\tau)$ и $v^{\pm}(\eta,\tau)$, удовлетворяющих следующим несингулярным, линейным интегральным уравнениям:

$$u^{\pm}(\eta,\tau)= 1 \pm \frac{\lambda}{2}\,\eta \int_0^1 \frac{g(\mu,\tau)}{\mu+\eta}\, u^{\pm}(\mu,\tau)d\mu \quad , \tag{1}$$

$$\nu^{\pm}(\eta,\tau)=\frac{\eta}{1+k\eta}\pm\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{g(\mu,\tau)}{\mu+\eta}\nu^{\pm}(\mu,\tau)d\mu\ . \tag{2}$$

В этих уравнениях обозначено:

$$g(\mu,\tau)=e^{-\frac{\tau}{\mu}}/R(\mu)\,\varphi^2(\mu)\ , \tag{3}$$

где $R(\mu)=T^2(\mu)+\left(\frac{\lambda\pi\mu}{2}\right)^2$, $T(\mu)=1-\frac{\lambda}{2}\mu\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}$ (вычисляя эту функцию для значений $\mu\in[0;1]$, выражение под знаком логарифма следует брать по модулю), $\varphi(\eta)$ – функция Амбарцумяна, λ – альбедо однократного рассеяния, а k – корень характеристического уравнения $T\left(\frac{1}{k}\right)=0$.

В работе [2] говорилось о том, что функции $\nu^{\pm}$ можно элементарно выразить посредством функций $u^{\pm}$. Там же была получена (довольно тривиальным образом) формула, устанавливающая связь между ними лишь для частного случая консервативного рассеяния ($\lambda=1$; $k=0$):

$$\nu^{\pm}(\eta,\tau)=\eta\frac{u^{\mp}(\eta,\tau)}{u^{\mp}(\infty,\tau)}\ . \tag{4}$$

При наличии истинного поглощения ($\lambda<1$) установление связи между функциями $u^{\pm}$ и $\nu^{\pm}$ уже не так тривиально и не приводилось в [2] из соображений экономии объема статьи. Однако, на наш взгляд, с точки зрения возможности полного аналитического решения проблемы переноса излучения в конечном слое, установление такой связи для любых значений параметра λ носит принципиальный характер. Дело в том, что лишь в этом случае можно будет утверждать, что для нахождения любой характеристики поля диффузного излучения в слое конечной оптической толщины достаточно решить лишь одно (одну пару) интегральное уравнение (1) и далее уже ограничиться одной, либо двумя квадратурами по угловой переменной и алгебраическими операциями.

Что же касается решения основного уравнения (1) в конечном виде, то ниже будут обсуждены некоторые аспекты этой проблемы, а также будет получено его решение для частного случая $\tau=0$.

С целью облегчения восприятия основных целей работы, некоторые математические подробности даются отдельно в конце статьи в "Математическом приложении", а в основном тексте в соответствующих местах даются ссылки в виде (П1), (П2) и т.д.

2. *Функции* $v^{\pm}(\eta,\tau)$ *при наличии истинного поглощения.* Выражения для функций $v^{\pm}$ посредством $u^{\pm}$ можно получить по-разному. Кратчайший путь состоит в следующем. Помимо уравнений (1), рассмотрим следующие три пары интегральных уравнений, опуская временно явную зависимость от аргумента τ:

$$v_o^{\pm}(\eta)=\eta\pm\frac{\lambda}{2}\eta\int_o^1\frac{g(\mu)v_o^{\pm}(\mu)}{\mu+\eta}\,d\mu\ , \tag{5}$$

$$U^{\pm}(\eta,z)=\frac{1}{\eta+z}\pm\frac{\lambda}{2}\eta\int_o^1\frac{g(\mu)U^{\pm}(\mu,z)}{\mu+\eta}\,d\mu\ , \tag{6}$$

$$V^{\pm}(\eta,z)=\frac{\eta}{\eta+z}\pm\frac{\lambda}{2}\eta\int_o^1\frac{g(\mu)V^{\pm}(\mu,z)}{\mu+\eta}\,d\mu\ . \tag{7}$$

В последних двух уравнениях z – произвольное, вообще говоря, комплексное число. Интересующие нас величины $v^{\pm}$, очевидно равны

$$v^{\pm}(\eta)=\frac{1}{k}\,V^{\pm}(\eta,\frac{1}{k})\ . \tag{8}$$

Воспользовавшись тождеством $\eta/(\mu+\eta)=1-\mu/(\mu+\eta)$, а также свойством линейности интегральных уравнений (1) и (5)–(7), легко получить следующие соотношения между их решениями:

$$v_o^{\pm}(\eta)=\eta\,\frac{u^{\mp}(\eta)}{u^{\mp}(\infty)}\ , \tag{9}$$

$$\eta U^{\pm}(\eta,z)=V^{\pm}(\eta,z)\pm I^{\pm}(z)v_o^{\mp}(\eta)\ , \tag{10}$$

$$V^{\pm}(\eta,z)=u^{\pm}(\eta)-zU^{\pm}(\eta,z)\ . \tag{11}$$

В них обозначено:

$$u^{\pm}(\infty)=1\pm\frac{\lambda}{2}\int_0^1 g(\mu)u^{\pm}(\mu)d\mu \quad \text{и} \quad \Gamma^{\pm}(z)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1 g(\mu)U^{\pm}(\mu,z)d\mu \ .$$

Исключая из (9)–(11) временно введенные величины $v_0^{\pm}$ и $U^{\pm}$, для V^{+} и V^{-}, получим следующую алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{cases} \eta V^{+}(\eta,z)+zV^{-}(\eta,z)=\eta u^{+}(\eta)Q^{-}(z) \ , \\ zV^{+}(\eta,z)+\eta V^{-}(\eta,z)=\eta u^{-}(\eta)Q^{+}(z) \ , \end{cases} \tag{12}$$

формальное решение которого дает:

$$(z^2-\eta^2)V^{\pm}(\eta,z)=z\eta u^{\mp}(\eta)Q^{\pm}(z)-\eta^2 u^{\pm}(\eta)Q^{\mp}(z) \ . \tag{13}$$

В (12) и (13) обозначено $Q^{\pm}(z)=1\pm z\Gamma^{\mp}(z)/u^{\mp}(\infty)$. Для нахождения величин $Q^{\pm}$ воспользуемся предельными соотношениями, следующими из (7)

$$\lim_{\eta\to z}(z^2-\eta^2)V^{\pm}(\eta,z)=0 \ ; \quad \lim_{\eta\to -z}(z^2-\eta^2)V^{\pm}(\eta,z)=-2z^2 \ ,$$

с помощью которых из (13) получим систему уравнений

$$\begin{cases} u^{-}(z)Q^{+}(z)-u^{+}(z)Q^{-}(z)=0 \ , \\ u^{-}(-z)Q^{+}(z)+u^{+}(-z)Q^{-}(z)=2 \ , \end{cases} \tag{14}$$

откуда $Q^{\pm}(z)=u^{\pm}(z)/D(z)$, а $D(z)=u^{+}(z)u^{-}(-z)+u^{-}(z)u^{+}(-z)$.

Можно показать, что (П1) $D(z)=1$, а следовательно

$$Q^{\pm}(z)=u^{\pm}(z) , \tag{15}$$

тогда из (13) сразу получаем следующее выражение для величин $V^{\pm}$, зависящих от двух аргументов посредством функций $u^{\pm}$, зависящих от одного аргумента (не считая τ)

$$V^{\pm}(\eta,z)=\frac{\eta}{z^2-\eta^2}\left[u^{\mp}(\eta)u^{\pm}(z)\,z-u^{\pm}(\eta)u^{\mp}(z)\,\eta\right] \ , \tag{16}$$

так что конкретно интересующие нас функции $v^{\pm}(\eta,\tau)$ выражаются посредством функций $u^{\pm}(\eta,\tau)$ (здесь, и далее, во избежание недоразумений, мы опять будем указывать явную зависимость от аргумента τ) следующим образом

$$v^{\pm}(\eta,\tau)=\frac{\eta}{1-k^2\eta^2}\left[u^{\mp}(\eta,\tau)u^{\pm}\left(\frac{1}{k},\tau\right)-k\,\eta u^{\pm}(\eta,\tau)u^{\mp}\left(\frac{1}{k},\tau\right)\right]. \tag{17}$$

Заметим, что из (17), при $k=0$, следует уже известный результат для чистого рассеяния (4).

В выражения для функций $a(\eta,\tau)$ и $b(\eta,\tau)$, полученные в [2] входят также величины $v^{\pm}\left(\frac{1}{k},\tau\right)$, которые можно найти из (17), устремляя η к $1/k$. При вычислении пределов, возникающую неопределенность типа 0:0 легко устранить, используя правило Лопиталя. Опуская несложные выкладки, приведем окончательное выражение:

$$v^{\pm}\left(\frac{1}{k},\tau\right)=\frac{1}{2k}u^{+}\left(\frac{1}{k},\tau\right)u^{-}\left(\frac{1}{k},\tau\right)\pm\frac{1}{2}\left[u^{\pm}\left(\frac{1}{k},\tau\right)u_1^{\mp}(\tau)+u^{\mp}\left(\frac{1}{k},\tau\right)u_1^{\pm}(\tau)\right], \tag{18}$$

в котором обозначено

$$u_1^{\pm}(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{g(\mu,\tau)\,u^{\pm}(\mu,\tau)\,\mu d\mu}{(1+k\mu)^2}. \tag{19}$$

Таким образом, получение полного аналитического решения проблемы переноса излучения в среде конечной оптической толщины сводится к решению основных уравнений (1) в замкнутой форме (в конечном виде).

3. *О некоторых возможностях решения основных уравнений в конечном виде.* Уравнения (1) являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода, поэтому искомые функции можно выразить посредством резольвенты, соответствующей ядру этих уравнений. Поскольку в них свободные члены равны единице, то

$$u^{\pm}(\eta,\tau)=1\pm\int_0^1 R^{\pm}(\eta,\zeta;\tau)d\zeta, \tag{20}$$

а резольвента – $R^{\pm}(\eta,\zeta;\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$R^{\pm}(\eta,\zeta;\tau)=\frac{\lambda}{2}\eta\frac{g(\zeta,\tau)}{\zeta+\eta}\pm\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{g(\mu,\tau)}{\mu+\eta}R^{\pm}(\mu,\zeta;\tau)d\mu\ . \tag{21}$$

Легко видеть, что последняя, с точностью до множителя, равна введенной выше функции $V^{\pm}$

$$R^{\pm}(\eta,\zeta;\tau)=\frac{\lambda}{2}g(\zeta,\tau)V^{\pm}(\eta,\zeta;\tau)\ . \tag{22}$$

Эти результаты хотя и не приближают нас явным образом к поставленной цели, однако позволяют с использованием (16) получить два весьма нетривиальных соотношения для функций u^+ и u^-:

$$u^{\pm}(\eta,\tau)=1\pm\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{g(\zeta,\tau)}{\zeta^2-\eta^2}\left[\zeta u^{\pm}(\zeta,\tau)u^{\mp}(\eta,\tau)-\eta u^{\mp}(\zeta,\tau)u^{\pm}(\eta,\tau)\right]d\zeta\ . \tag{23}$$

Решение основного уравнения (ний) можно, в частности, представить в виде преобразования Лапласа

$$u^{\pm}(\eta,\tau)=1\pm\int_0^{\infty}e^{-\frac{z}{\eta}}x^{\pm}(z,\tau)dz \tag{24}$$

от некоторой функции $x^{\pm}$, удовлетворяющей интегральному уравнению Фредгольма на полуоси

$$x^{\pm}(z,\tau)=K(z+\tau)\pm\int_0^{\infty}K(z+\tau+z')x^{\pm}(z',\tau)dz' \tag{25}$$

с ядром, представимым в виде суперпозиции экспонент

$$K(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{\mu}G(\mu)d\mu\ , \tag{26}$$

где $G(\mu)=g(\mu,0)$, т.е. $G(\mu)=1/R(\mu)\,\varphi^2(\mu)$. Формула "обратная" по отношению к (24) имеет вид:

$$x^{\pm}(z,\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{z+\tau}{\zeta}}}{\zeta} u^{\pm}(\zeta,\tau)G(\zeta)d\zeta \ . \qquad (27)$$

В справедливости указанных формул можно убедиться простой проверкой. Так, подставляя (27) в (24), приходим к (1), обратная же подстановка (24) в (27), с учетом (26), – к уравнению (25). Таким образом, основная задача (решение уравнения (1) в явном виде) может рассматриваться в другой, эквивалентной, форме, как аналитическое решение (в конечном виде) уравнения (25).

4. *Явные выражения функций* $u^{\pm}$ *при* $\tau=0$. К настоящему времени нам пока не удалось найти явные выражения для функций $u^{\pm}(\eta,\tau)$. Однако представляет большой интерес нахождение таковых для хотя бы отдельных значений параметра τ. Рассматривая крайние значения из области изменения этого параметра – ноль и бесконечность, убеждаемся в тривиальности результата во втором случае, поскольку при этом очевидно, что

$$u^{+}(\eta,\infty)=u^{-}(\eta,\infty)=1 \ .$$

Что касается случая $\tau=0$, то здесь все обстоит сложнее, хотя бы потому, что при этом уравнение (1), равно как и (25), почти сохраняют свою исходную форму. И тем не менее, явные выражения для $u^{+}(\eta,0)$ и $u^{-}(\eta,0)$ удается найти с использованием ряда аналитических результатов, полученных выше и в работе [2].Нахождение этих величин, отнюдь, не является самоцелью, а по нашему глубокому убеждению, может во многом способствовать нахождению величин $u^{\pm}$ для любого τ, являясь тем самым "предпоследним" шагом на пути полного аналитического решения проблемы переноса излучения в конечном слое. Кроме того, $u^{+}(\eta,0)$ и $u^{-}(\eta,0)$ представляют собой соответственно точную верхнюю и точную нижнюю границы функций $u^{+}(\eta,\tau)$ и $u^{-}(\eta,\tau)$, поскольку из (1) с очевидностью следует, что для любого фиксированного $\eta \in [0;\infty)$ первая из них с ростом τ монотонно убывает, а вторая монотонно возрастает. Поэтому

$$u^{-}(\eta,0) \le u^{-}(\eta,\tau) \le 1 \le u^{+}(\eta,\tau) \le u^{+}(\eta,0) \ . \qquad (28)$$

В работе [2] приводились выражения для суммы (S) и разности (H) функций $a(\eta,\tau)$ и $b(\eta,\tau)$

$$\varphi(\eta)S(\eta,\tau)=u^{+}(\eta,\tau)+\frac{Ce^{-k\tau}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}S\left(\frac{1}{k},\tau\right)v^{+}(\eta,\tau)\ , \tag{29}$$

$$\varphi(\eta)H(\eta,\tau)=u^{-}(\eta,\tau)-\frac{Ce^{-k\tau}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}H\left(\frac{1}{k},\tau\right)v^{-}(\eta,\tau)\ , \tag{30}$$

в которых $C=k(1-k^2)/(k^2-1+\lambda)$.

По определению

$$S(\eta,\tau)=1-\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\varphi(\mu,\tau)}{\mu+\eta}\,d\mu+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\psi(\mu,\tau)}{\mu+\eta}\,d\mu\ , \tag{31}$$

$$H(\eta,\tau)=1-\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\varphi(\mu,\tau)}{\mu+\eta}\,d\mu-\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\psi(\mu,\tau)}{\mu+\eta}\,d\mu\ , \tag{32}$$

следовательно $S(\eta,0)=1$, а $H(\eta,0)=h(\eta)$, где

$$h(\eta)=1-\lambda\,\eta\,\ln(1+\frac{1}{\eta})\ , \tag{33}$$

поскольку $\varphi(\eta,0)=\psi(\eta,0)=1$. Полагая в (29) и (30) $\tau=0$, легко видеть, что

$$\varphi(\eta)=u^{+}(\eta)+cv^{+}(\eta)\ , \tag{34}$$

$$h(\eta)\,\varphi(\eta)=u^{-}(\eta)-ch(\frac{1}{k})v^{-}(\eta)\ . \tag{35}$$

Здесь введены следующие обозначения: $u^{\pm}(\eta,0)=u^{\pm}(\eta)$, $v^{\pm}(\eta,0)=v^{\pm}(\eta)$ и $c=C/\varphi\left(\frac{1}{k}\right)$. Далее, исключая с помощью (16) из (34) и (35) величины $v^{\pm}(\eta)$ после довольно утомительных выкладок, получаем окончательные выражения:

$$u^{+}(\eta)=\varphi(\eta)\,\frac{\left[1-q\,k^2\eta^2-k\,\eta\,\frac{h(\eta)}{h(1/k)}\,(1-q)\right]}{1-k^2\eta^2}\ , \tag{36}$$

$$u^-(\eta)=h(\eta)\,\varphi(\eta)\,\frac{\left[1-\frac{k^2\eta^2}{q}+k\,\eta\,\frac{h(\frac{1}{k})}{h(\eta)}\,(\frac{1}{q}-1)\right]}{1-k^2\eta^2}\,, \tag{37}$$

в которых обозначено

$$q=1-ch(\frac{1}{k})\,\frac{v^-(\infty)}{u^-(\infty)}=\frac{1}{1+c\,\frac{v^+(\infty)}{u^+(\infty)}}\,.$$

Однако из (36) и (37), полагая в них $\eta\to\infty$ и учитывая, что $\varphi(\infty)=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}$, а $h(\infty)=1-\lambda$, можно получить другие выражения для нахождения постоянной q:

$$u^+(\infty)=\frac{q}{\sqrt{1-\lambda}}\ \text{и}\ u^-(\infty)=\frac{\sqrt{1-\lambda}}{q}\,. \tag{38}$$

Заметим, что отсюда следует интересный результат

$$u^+(\infty)\,u^-(\infty)=1\,, \tag{39}$$

который, между прочим, справедлив (П2) и для любых значений $\tau>0$. Постоянную q можно найти из (38), если известны либо $u^+(\infty)$, либо $u^-(\infty)$. Найдем ее с помощью $u^+(\infty)$.

Из основного уравнения (1) (полагая в нем $\tau=0$ и $\eta\to\infty$) следует, что

$$u^+(\infty)=1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 G(\mu)u^+(\mu)d\mu\,.$$

Подставив в правую часть выражение (36), учитывая что

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{d\mu}{R(\mu)\,\varphi(\mu)}=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}-1-\frac{c}{k}$$

после небольших преобразований находим, что

$$q=\frac{kI}{c+kI}\ ,$$

где через I обозначен следующий интеграл

$$I=1+\frac{\lambda}{2}\int_o^1\frac{\left[1-k\,\mu\,\dfrac{h(\mu)}{h(1/k)}\right]}{R(\mu)\,\varphi(\mu)(1-k^2\mu^2)}\,d\mu\ , \tag{40}$$

который удается выразить (П4) в элементарных функциях, так что окончательно получаем, что

$$q=1-\frac{\lambda\ln(1-k^2)}{k(1-\dfrac{\lambda}{1-k})}\ . \tag{41}$$

Таким образом, выражения (36) и (37) в совокупности с (33) и (41) полностью решают задачу, поставленную в настоящем разделе.

В случае чистого рассеяния выражения (35) и (36) сильно упрощаются и с учетом того, что

$$\lim_{k\to o} q=0\ ,\ \lim_{k\to o} h(1/k)=0\ ,\ \lim_{k\to o}\frac{k}{h(1/k)}=2$$

принимают следующий вид:

$$u^+(\eta)=\varphi(\eta)[1-2\,\eta h(\eta)]\quad ,\quad u^-(\eta)=\varphi(\eta)h(\eta)\ .$$

Последние выражения позволяют установить границы изменения этих функций. Устремляя в них η к бесконечности, получаем:

$$u^+(\infty)=\frac{2}{\sqrt{3}}\ \text{и}\ \ u^-(\infty)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ . \tag{42}$$

С другой стороны очевидно, что $u^+(0)=u^-(0)=1$. С учетом же (28) и монотонности функций $u^{\pm}(\eta,\tau)$ по переменной η, получим для них следующую цепочку неравенств

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < u^{-}(\eta,\tau) \leq 1 \leq u^{+}(\eta,\tau) < \frac{2}{\sqrt{3}} \ , \tag{43}$$

имеющих место при чистом рассеянии и для любых $\tau \in [0;\infty)$ и $\eta \in [0;\infty)$. При наличии истинного поглощения границы изменения функций $u^{\pm}$ можно найти из соотношений (33). Как видим, функции $u^{\pm}$ меняются в очень узких пределах и отклоняются от единицы максимум на 13–15% (при $\lambda = 1$ и $\eta >> 1$). На основном же интервале $\eta \in [0;1)$ это отклонение меньше и быстро стремится к нулю с ростом τ. Это свойство функций $u^{\pm}$ позволяет получить множество приближенных формул любой степени точности, но здесь мы на этом останавливаться не будем.

5. *О функции Амбарцумяна* – $\varphi(\eta)$. В работе [2] говорилось о том, что эффективность развиваемого метода во многом зависит от выбора способа нахождения численных значений функции Амбарцумяна – $\varphi(\eta)$ быстро и с большой точностью. Специальное изучение этого вопроса привело нас к трем способам, удовлетворяющим оговоренным требованиям. Первый – численное решение нелинейного интегрального уравнения, приводимого в [3]. Приведем его в наших обозначениях:

$$\varphi(\eta) = \frac{1 + \frac{k}{\sqrt{1-\lambda}}\eta}{1 + k\eta} + \frac{\lambda}{2}\eta\,\varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\left(1 - \frac{k\mu}{\sqrt{1-\lambda}}\right)}{(1-k\mu)(\mu+\eta)}\varphi(\mu)d\mu \ . \tag{44}$$

Это уравнение несколько громоздко на вид и после простейших преобразований переходит в обычное уравнение Амбарцумяна [4]

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\,\varphi(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi(\mu)}{\mu+\eta}d\mu \ , \tag{45}$$

но в отличие от последнего весьма эффективно при численном решении.

Второй способ предполагает использование (неизвестного до сих пор) нелинейного интегрального уравнения (П3)

$$[h(1/k) + h(\eta)]\,\varphi(\eta) = 1 + h(1/k) - \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 \frac{[h(\mu) - h(1/k)]}{R(\mu)\,\varphi(\mu)(\mu+\eta)}d\mu \ . \tag{46}$$

Напомним, что функция $h(\eta)$ дается формулой (33). При численом решении как уравнения (44), так и (46) скорость сходимости последовательных приближений, как и достигаемая точность примерно одинаковы и практически не зависят от значения параметра λ.

И, наконец, третий – несколько громоздкий способ, дающий по–видимому несколько большую точность (при прочих равных условиях), состоит в использовании линейного уравнения с фредгольмовым ядром:

$$\varphi(\eta)=1+r(\eta)+\frac{c\,\eta}{1+k\eta}+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{[r(\mu)-r(\eta)]}{\mu-\eta}\varphi(\mu)d\mu\ , \tag{47}$$

в котором

$$r(\eta)=\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{d\mu}{R(\mu)\,(\mu+\eta)}\ ,\ \text{причем}\ \lim_{\mu\to\eta}\frac{r(\mu)-r(\eta)}{\mu-\eta}=\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{\mu\,d\mu}{R(\mu)\,(\mu+\eta)^2}\ .$$

Уравнение (47) легко вывести из уравнения полученного в [5] (см. также формулу (П3.1)) с использованием (45). Из (47) видно, что φ – функцию можно представить в виде

$$\varphi(\eta)=\alpha(\eta)+c\beta(\eta)\ , \tag{48}$$

где функции α и β удовлетворяют такому же уравнению (47), но соответственно со свободными членами $1+r(\eta)$ и $\eta/(1+k\eta)$. После численного решения этих уравнений, постоянную c можно найти по формуле

$$c=\frac{1-\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{\alpha(\eta)}{1+k\eta}d\eta}{\frac{1}{C}+\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{\beta(\eta)}{1+k\eta}d\eta} \tag{49}$$

а окончательно φ – функцию из (48). Следует отметить, что при составлении комплексных программ для ЭВМ при расчете задач теории переноса в конечном слое предлагаемым методом, вычисление φ – функции последним способом является, на наш взгляд, наиболее естественным и выгодным, что, разумеется, не исключает возможность использования для этой цели как уравнения (44), так и (46).

6. *Заключение.* В заключение необходимо отметить, что метод предлагаемый

нами в [1,2] и в настоящей статье для решения задач теории переноса в слое конечной оптической толщины является частичным повторением и существенным развитием метода, найденного Малликиным еще в середине 60-х годов [6 – 9]. Эти работы, на наш взгляд, явились значительным вкладом в классическую теорию переноса, после основополагающих работ Амбарцумяна, Чандрасекара и Соболева, но не привлекли к себе должного внимания со стороны специалистов и, в частности, до последнего времени не были известны нам в этом качестве, о чем мы весьма сожалеем. Нам было известно лишь то, что в [9] имеются таблицы X и Y– функций, а также, что в [8] осуществлено разделение угловых переменных.

Основное отличие изложения в нашей версии метода Малликина от оригинального является введение в качестве исходных (альтернативных) функций $a(\eta,\tau)$ и $b(\eta,\tau)$ вместо φ и ψ – функций Амбарцумяна (X и Y – функций Чандрасекара), а также функции $B(\tau,\tau_0,\eta)$ (или f и $\tilde{f}$) [1] вместо функции источника $p(\tau,\tau_0,\eta)$ ($J(t,\mu,\tau)$), как более гибких в математическом отношении, посредством которых удается выразить решения стандартных задач теории переноса излучения в конечном слое проще всего. В результате, если обе версии практически идентичны при нахождении функции источника лишь на границах рассматриваемого слоя (т.е., при нахождении φ и ψ– функций), то при нахождении той же функции источников внутри слоя, или, скажем, резольвенты $\Gamma(\tau,\tau',\tau_0)$ ($R(x,y;\tau)$), после решения основных уравнений – в версии Малликина следует провести соответственно 3 и 4 интегрирования [7,8], в нашей же соответственно одно и два.

Заканчивая этой статьей изложение метода "линейных несингулярных интегральных уравнений", автор надеется на привлечение внимания исследователей в этой области к решению уравнений (1) или (25) в конечном виде, призывая осуществить тем самым то, что еще вчера казалось невозможным.

Пользуясь случаем, приношу искреннюю благодарность Н.Н.Роговцову, благодаря обсуждениям с которым появилась идея нахождения φ – функции из уравнения (47) изложенным выше способом. Выражаю искреннюю признательность Г.А.Арутюняну за осуществление численной реализации многих результатов, полученных выше.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

П1. Умножим уравнение (1) для u^+ на $\dfrac{\lambda}{2}\zeta\dfrac{g(\eta,\tau)u^-(\eta,\tau)}{\eta+\zeta}\,d\eta$, а для u^- на $\dfrac{\lambda}{2}\zeta\dfrac{g(\eta,\tau)u^+(\eta,\tau)}{\eta+\zeta}\,d\eta$ и после интегрирования от 0 до 1, составим разность от полученных выражений. Тогда, с учетом (1), получим

$$0=1-u^-(\zeta,\tau)-u^+(\zeta,\tau)+1+I^++I^-. \tag{П1.1}$$

Здесь обозначено

$$I^{\pm}=\frac{\lambda}{2}\zeta\int_o^1 g(\mu,\tau)u^{\pm}(\mu,\tau)\,d\mu\ \ \frac{\lambda}{2}\int_o^1\frac{\eta}{(\eta+\zeta)\,(\mu+\eta)}\,g(\eta,\tau)u^{\mp}(\eta,\tau)d\eta\ . \tag{П1.2}$$

Воспользовавшись тождеством $\dfrac{\eta}{(\eta+\zeta)\,(\mu+\eta)}\equiv\dfrac{1}{(\zeta-\mu)}\left(\dfrac{\zeta}{\eta+\zeta}-\dfrac{\mu}{\mu+\eta}\right)$ из (П1.1) с учетом (1) нетрудно получить

$$I^+ + I^-=u^+(\zeta,\tau)\frac{\lambda}{2}\zeta\int_o^1\frac{g(\mu,\tau)u^-(\mu,\tau)}{\zeta-\mu}\,d\mu-u^-(\zeta,\tau)\frac{\lambda}{2}\zeta\int_o^1\frac{g(\mu,\tau)u^+(\mu,\tau)}{\zeta-\mu}\,d\mu\ . \tag{П1.3}$$

Далее, используя аналитические продолжения функций $u^{\pm}$ для отрицательных значений угловой переменной

$$u^{\pm}(-\zeta,\tau)=1\mp\frac{\lambda}{2}\zeta\int_o^1\frac{g(\mu,\tau)u^{\pm}(\mu,\tau)}{\mu-\zeta}\,d\mu \tag{П1.4}$$

вместо (П1.3), получим выражение

$$I^+ + I^-=u^+(\zeta,\tau)[1-u^-(-\zeta,\tau)\,]-u^-(\zeta,\tau)\,[u^+(-\zeta,\tau)-1]\ \ ,$$

которое после подстановки в (П1.1) дает формулу

$$u^+(\zeta,\tau)u^-(-\zeta,\tau)+u^-(\zeta,\tau)u^+(-\zeta,\tau)=2\ , \tag{П1.5}$$

которой и обосновывается справедливость равенств (15).

П2. Если в (1) и в (П1.4) угловую переменную устремить к бесконечности, то легко видеть, что

$$\lim_{\eta\to\infty} u^{\pm}(\eta,\tau) = \lim_{\zeta\to\infty} u^{\pm}(-\zeta,\tau) \ ,$$

поэтому, совершив в (П1.5) предельный переход $\zeta \to \infty$, получим

$$u^{+}(\infty,\tau)\, u^{-}(\infty,\tau)=1 \ , \tag{П2.1}$$

т.е., обобщение формулы (39) для любых значений $\tau > 0$.

П3. Если в формулах (22) и (23) работы [2] положить $\tau = 0$, то получим два уравнения для функции Амбарцумяна:

$$\varphi(\eta)=1+\frac{c\,\eta}{1+k\eta}+\frac{\lambda}{2}\,\eta\int_0^1\frac{d\mu}{R(\mu)\,\varphi(\mu)(\mu+\eta)} \tag{П3.1}$$

и

$$h(\eta)\,\varphi(\eta)=1-\frac{c\,\eta}{1+k\eta}h\!\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\lambda}{2}\,\eta\int_0^1\frac{h(\mu)d\mu}{R(\mu)\,\varphi(\mu)(\mu+\eta)} \tag{П3.2}$$

первое из которых было получено в [5], а второе приводится здесь впервые. Исключая из них слагаемое с константой c, доставляющее серьезные неудобства при их численной реализации, приходим к (46).

П4. Для вычисления интеграла (40) необходимо, во–первых, воспользоваться следующими тождествами:

$$\frac{1}{1-k^2\mu^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-k\mu}+\frac{1}{1+k\mu}\right)\ ;\quad \frac{k\,\mu}{1-k^2\mu^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-k\mu}-\frac{1}{1+k\mu}\right)$$

и, далее, после небольших преобразований, можно найти, что

$$2h(\frac{1}{k})I=1+h(\frac{1}{k})-\frac{\lambda}{2}\int_o^1\frac{[h(\mu)-h(\frac{1}{k})]}{R(\mu)\,\varphi(\mu)(1-k\mu)}d\mu\ .$$

С другой стороны, полагая в (46) $\eta=-\frac{1}{k}$, имеем

$$\lim_{\eta\to-\frac{1}{k}}\ [h(\eta)+h(\frac{1}{k})\,]\,\varphi(\eta)=1+h(\frac{1}{k})-\frac{\lambda}{2}\int_o^1\frac{[h(\mu)-h(\frac{1}{k})\,]}{R(\mu)\,\varphi(\mu)(1-k\mu)}d\mu\ .$$

Предел, стоящий в левой части последнего равенства можно представить как произведение следующих двух пределов

$$\lim_{\eta\to-\frac{1}{k}}\ [h(\eta)+h(\frac{1}{k})\,]\,\varphi(\eta)=\frac{1}{k}\lim_{\eta\to-\frac{1}{k}}(1+k\eta)\,\varphi(\eta)\cdot\lim_{\eta\to-\frac{1}{k}}\frac{h(\eta)-h(-\frac{1}{k})}{\eta-(-\frac{1}{k})}\ .$$

Здесь учтено, что $h\,(\frac{1}{k})=-h\,(-\frac{1}{k})$ согласно определению этой функции (33).

Далее, из (П3.1) сразу следует, что

$$\lim_{\eta\to-\frac{1}{k}}(1+k\eta)\,\varphi(\eta)=-\frac{c}{k}\ ,$$

второй же сомножитель. очевидно, равен производной функции $h(\eta)$ в точке $\eta=-\frac{1}{k}$, вычислив которую, находим

$$h'(\eta)\Big|_{\eta=-\frac{1}{k}}=-\frac{\lambda k}{1-k}-\lambda\ln(1-k)\ .$$

С учетом последних соотношений, получаем значение искомого интеграла:

$$I=\frac{c}{2\,k\,h(1/k)}\left[\frac{\lambda}{1-k}+\frac{\lambda}{k}\ln(1-k)\right]-\frac{c}{2\,k}\ ,$$

что и приводит к выражению (41) для q.

Бюраканская астрофизическая обсерватория

ON THE THEORY OF ISOTROPIC SCATTERING RADIATION IN THE PLANE SLAB. ON THE POSSIBILLITY OF COMPLETE ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM.

E.KH.DANIELIAN

Subsequent analytical investigations of the method of linear, nonsingular integral equations, suggested in the paper [2] for the solution of transfer theory problems in the slab with finite optical thickness with isotropic scattering has been carried out. It has been shown that in the general case when there is proper absorption, the finding only functions $u^{\pm}(\eta,\tau)$ is enough for the solution of the problems of mentioned class. The explicit expressions for functions $u^{\pm}$ when $\tau=0$ are found.

The problem of choosing an effective way of finding Ambartsumian's φ — function for semi–infinite medium. In particular, a new equation is given for that function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э.Х.Даниелян* Астрофизика 19, 335, 1983.
2. *Э.Х.Даниелян*. Астрофизика, 36, 225, 1993.
3. *К.М.Кейз, П.Ф.Цвайфель*, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
4. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Ереван, 1960.
5. *Р.Р.Андреасян, Э.Х.Даниелян*, Сообщ. Бюраканской обс., 50, 114, 1978.
6. *T.W.Mullikin*, Trans. Amer. Math. Soc., 113, 316, 1964.
7. *A.Leonard, T.W.Mullikin*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 52, 683, 1964.
8. *T.W.Mullikin*, Proc. Interdisciplinary Conference on Electromagnetic Scattering. Univ., Massachusetts. 697, 1965
9. *J.L.Carlstedt, T.W.Mullikin*, Astroph.J. Suppl. Ser., 12, № 113, 1966