А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 37 ФЕВРАЛЬ, 1994 ВЫПУСК 1

УДК: 52–64

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ.I. РЕЗОЛЬВЕНТА ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Д.И.НАГИРНЕР

Поступила 10 декабря 1993
Принята к печати 23 декабря 1993

Предлагается новый метод расчета переноса излучения в спектральной линии при изотропном рассеянии с полным перераспределением по частоте или без изменения частоты в однородном бесконечном вдоль оси прямом круговом цилиндре. Одновременно с цилиндром исследуется рассеяние в слое, симметричном относительно середины, и шаре. Получены уравнения, которым удовлетворяет резольвента основного интегрального уравнения, описывающего рассматриваемые случаи рассеяния. Путем применения преобразования Ганкеля по конечному промежутку резольвента выражается через вспомогательную функцию. Для вспомогательной функции выведено уравнение, которое удобно решать итерациями, причем скорость их сходимости увеличивается с ростом радиуса области рассеяния.

1. *Введение.* Большинство астрофизических объектов, в которых существенную роль играет перенос излучения,— звездные атмосферы и оболочки, атмосферы планет и Земли, планетарные и диффузные туманности и др.— могут рассматриваться как среды плоской или сферической геометрии. Однако ряд объектов, протяженность которых значительно больше их поперечника, более адекватно представляются в виде вытянутых цилиндров. К ним относятся прежде всего солнечные образования: протуберанцы, спикулы, корональные лучи и арки, а также, возможно, гранулы и элементы горизонтальной неоднородности фотосферы и хромосферы. Подобная геометрия встречается и у других светящихся объектов, в том числе и нестационарных. Примерами могут служить такие нестационарные образования, как джеты активных ядер галактик и аккреционных дисков, струи и потоки в двойных системах.

Большой интерес представляет задача о переносе излучения в цилиндре для физики газового разряда. Идентичное математическое описание имеет перенос нейтронов в стержнях. Те же уравнения описывают перенос тепла.

Теория многократного рассеяния излучения в плоских средах подробно разработана. Она изложена, например, в монографиях В.В.Соболева [1,2] и В.В.Иванова [3] (см. также обзоры автора [4,5]). Задачи об изотропном рассеянии при сферической геометрии часто сводятся к плоским. Монохроматическое рассеяние и рассеяние в спектральной линии в шаре при полном перераспределении по частоте (ППЧ) аналитически рассматривалось В.В.Соболевым [6] и автором [7]. Анизотропное монохроматическое рассеяние в средах сферической геометрии было рассмотрено А.К.Колесовым [8], получившим решения ряда задач. Более ранние работы цитируются в указанных статьях. Можно сказать, что сферическая симметрия освоена так же хорошо, как и плоская.

Изучению же рассеяния в цилиндрах посвящено относительно немного работ. В книге [9] выведены уравнения для расчета плотности нейтронов внутри цилиндра при любых аксиально симметричных источниках для изотропного и простейшего неизотропного рассеяния. Задача о переносе тепла в рамках предположения об изотропном монохроматическом рассеянии в цилиндрических областях с внешними и внутренними источниками, с отражающими и свободными границами рассматривалась в работах [10, 11]. В [10] получено основное уравнение, а в [11] решение через разложение по некоторым функциям. Выведены соотношения между решениями различных задач [12—14]. Приводятся выражения для интенсивностей и потоков в радиальном и осевом направлениях [15]. Найдены элементарные решения типа кейзовских для бесконечной среды с аксиальной симметрией при анизотропном рассеянии [16]. Выведены асимптотики решений вдали от оси симметрии [17].

Получены численные решения некоторых задач. Рассчитывалось рассеяние нейтронов в среде, представляющей два соосных цилиндра, внутренний из которых размножающий [18]. Метод дискретных ординат применялся в работе [19]. Другие численные методы использованы в [20—22].

Основные уравнения, описывающие перенос излучения в спектральной линии при ППЧ в случае цилиндрической геометрии, приведены в [23]. В [24] найдена асимптотика числа рассеяния фотонов в цилиндре с цилиндрическим слоевым источником, когда оптический радиус цилиндра $\tau_0 \to \infty$. Характерные функции задач с цилиндрической симметрией изучены в работе [25]. Возбуждение атомов в цилиндрической среде в работе [26] было найдено методом вероятности выхода Соболева.

Сделаны некоторые приложения теории. Расчет поля излучения в облаках с аэрозолем, состоящим из сферических частиц Ми с определенными распределениями по размерам, произведен в работе [27]. Модель цилиндрического протyберанца представлена в [28]. Свечение и спектры цилиндрического пылевого облака вокруг вращающейся протозвезды найдены в зависимости от параметров системы и от углов наклона к линии наблюдения [29].

В ряде работ исследовался спектр основного интегрального уравнения для бесконечного цилиндра в связи с задачей о критичности. В [30] получена асимптотика первого собственного значения (с.з.), а в [31] предложен метод расчета асимптотик всех с.з. и собственных функций (с.ф.) для цилиндра большого оптического радиуса $\tau_o >> 1$ при рассеянии с ППЧ.

Книга [32] содержит изложение асимптотической теории спектра основного интегрального уравнения для цилиндра при изотропном монохроматическом рассеянии нейтронов. Методом интегральных преобразований в [9] получены уравнения для решения задачи критичности при изотропном и простейшем неизотропном рассеянии. Близкие уравнения для расчета критических радиусов выведены в [33,34]. Критические радиусы цилиндров табулировзны с высокой точностью (до 12 десятичных знаков) для сферической [35] и простейшей несферической [36] (методом Галеркина) индикатрис рассеяния.

Настоящая серия работ состоит из трех частей и посвящена исследованию изотропного рассеяния излучения в бесконечно протяженном вдоль оси круговом цилиндре методом интегральных преобразований. В первой части получены удобные уравнения для некоторых вспомогательных функций, путем решения которых может быть найдена резольвента основного интегрального уравнения переноса. Во второй части рассмотрены конкретные модельные задачи и получены асимптотики ряда характеристик поля излучения для случая консервативного рассеяния в спектральной линии при ППЧ в цилиндре большого радиуса. Наконец, в третьей части предлагается способ расчета спектра задачи. Краткое изложение результатов этой, третьей части приведено в статье автора [37].

2. *Основное интегральное уравнение переноса для цилиндра.* Рассмотрим перенос излучения в линии некоторого атома в двухуровневом приближении. Примем, что рассеиваются фотоны на этих атомах изотропно и с полным перераспределением по частоте при каждом рассеянии (ППЧ) (см. [1,3]), причем вынужденными процессами можно пренебречь. Тогда, как известно (см., например, [3]), задача расчета поля излучения в такой линии в однородной выпуклой среде сводится к интегральному уравнению для функции источников, пропорциональной степени возбуждения атомов:

$$S(\vec{\tau})=S_o(\vec{\tau})+\lambda\int K_P\left(|\vec{\tau}-\vec{\tau}'|\right) S(\vec{\tau}')d^3\tau' . \tag{1}$$

Здесь $\vec{\tau}$ — оптический радиус-вектор точек области рассеяния, рассчитанный для центра линии, λ — вероятность выживания фотона при каждом рассеянии,

$S_0(\vec{\tau})$ — функция, описывающая распределение мощности первичных источников излучения. Ядро уравнения зависит от вида рассеяния и определяется формулой

$$K_P(\tau)=\frac{A}{4\pi\tau^2}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^2(x)\exp(-[\alpha(x)+\beta]\tau)dx\ , \tag{2}$$

где x — безразмерная частота, отсчитываемая от центра линии, $\alpha(x)$ — симметричный профиль коэффициента поглощения в линии, $\alpha(0)=1$, A — множитель, нормирующий интеграл от $\alpha(x)$ по всем x на 1, β — отношение поглощения в континууме и в центре линии. Интегрирование в (1) производится по объему, занимаемому атомами.

Ядро (2) может быть приведено к виду суперпозиции экспонент

$$K_P(\tau)=\frac{1}{4\pi\tau}\int_a^b yA(y)e^{-y\tau}dy\ , \tag{3}$$

где $a=\beta$, $b=\infty$,

$$A(y)=\frac{A}{y}\begin{cases}2\int\limits_{x(y-\beta)}^{\infty}\alpha^2(x)dx\ , & \beta\le y\le 1+\beta,\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha^2(x)dx\ , & y\ge 1+\beta,\end{cases} \tag{4}$$

а $x(y)\ge 0$ — функция, обратная $y=\alpha(x)$.

Рассмотрим единообразно области трех геометрий: симметричный относительно срединной плоскости плоский слой толщины $2\tau_0$, бесконечно протяженный круговой цилиндр и шар с радиусами τ_0. Все три области для краткости будем называть цилиндрическими с радиусом (оптическим) τ_0. Можно сказать, что в основании этих трех областей лежат m-мерные "шары" ($m=1,2$ и 3 соответственно), а $3-m$ измерений являются "осями" симметрии (в случае настоящего шара их нет). Обозначим через τ расстояние от осей симметрии, то есть от плоскости симметрии слоя, от оси цилиндра и от центра трехмерного шара. Считаем, что функция S_0 и, следовательно, S зависят только от τ. Тогда, как легко показать, уравнение (1) сводится к

$$S(\tau)=S_0(\tau)+\lambda\int_0^{\tau_0}K(\tau,\tau')\,S(\tau')\,\tau'^{2\nu+1}d\tau'\ . \tag{5}$$

Здесь $\nu=m/2-1$,

$$K(\tau, \tau')=(\tau, \tau')^{-\nu}\int_a^b y\, A(y) I_\nu(y\,\tau_m)\, K_\nu(y\,\tau_M) dy \ , \tag{6}$$

причем τ_M и τ_m — большее и меньшее из τ и τ', а I_ν и K_ν — модифицированные функции Бесселя.

При $m=1$ и 3, то есть для слоя и шара, когда $\nu=-1/2$ и $1/2$, функции Бесселя вырождаются в экспоненты. Тогда в случае слоя

$$K(\tau, \tau')= [K(|\tau-\tau'|) + K(|\tau+\tau'|)]/2 \ , \tag{7}$$

а в случае шара

$$K(\tau, \tau')= [K(|\tau-\tau'|) - K(|\tau+\tau'|)]/(2\,\tau\,\tau') \ , \tag{8}$$

где

$$K(\tau)= A\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^2(x)\, E_1(\tau[\alpha(x)+\beta])dx \tag{9}$$

или

$$K(\tau)=\int_a^b A(y) e^{-y\tau} dy \ . \tag{10}$$

Использование соотношений (7) и (8) приводит к известному заключению, что для решения (5) в этих случаях достаточно решить одно уравнение для несимметричного слоя с ядром $K(|\tau-\tau'|)$. Соответствующие резольвенты $R(\tau,\tau_1,\tau_o)$ выражаются через резольвенту указанного уравнения для несимметричного слоя $\Gamma(\tau,\tau_1,2\tau_o)$. Уравнение с ядром от модуля разности аргументов, как отмечалось выше, подробно изучено. Интерес представляет лишь случай настоящего цилиндра, то есть $m=2$, $\nu=0$, когда в (6) реально остаются бесселевы функции I_o и K_o. Мы, однако, будем изучать уравнения с ядром вида (6) с произвольным $\nu\leq 1/2$, так как, во-первых, общее рассмотрение имеет эвристическое значение, во-вторых, при $\nu=\pm 1/2$ должны получаться известные результаты, и, в-третьих, такое совместное рассмотрение демонстрирует существенные отличия теории при $\nu\neq\pm 1/2$.

Заметим, что при монохроматическом рассеянии $a=1$, $b=\infty$, $A(y)=1/y$ при $y\geq 1$. Мы же сейчас на время отвлечемся от конкретных видов рассеяния и будем рассматривать произвольные ядра вида (6), считая $0\leq a<b\leq\infty$, а функцию $A(y)\geq 0$ непрерывной и удовлетворяющей условию Гельдера (см.

[38 |) на промежутке (a, b). При этом мы будем следовать обозначениям статьи автора [37].

Приведем некоторые сведения об известных в теории переноса функциях, которые понадобятся нам в дальнейшем.

3 *Ядерные функции.* В аналитической теории уравнений с ядром от модуля разности большую роль играют преобразования Лапласа от ядерной функции (10)

$$\bar{K}(p)=\int_0^\infty K(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau=\int_a^b A(y)dy/(y+p) \tag{11}$$

и двустороннее преобразование Лапласа от нее

$$U(p)=[\bar{K}(p)+\bar{K}(-p)]/2 \;. \tag{12}$$

Легко видеть, что $\bar{K}(p)$ для ядер вида (10) является интегралом типа Коши, регулярным на всей комплексной плоскости p, кроме отрезка $[-b, -a]$. С помощью формул Сохоцкого–Племеля [38] находим, что при $a<y<b$ выполняется

$$U(y\pm i\,0)=U(y)\mp i\,\pi\, sign(y) A(|y|) \;, \tag{13}$$

где при вычислении $U(y)$ один из интегралов (11) в (12) понимается в смысле главного значения по Коши.

При положительных $A(y)$ и $a>0$ могут существовать два изолированных корня $\pm k (k\geq 0)$ характеристического уравнения

$$1-\lambda U(k)=0 \tag{14}$$

Корни могут сливаться в один двукратный $k=0$. Мы примем, что такие корни имеются: если их нет, как, например, при рассеянии в линии [3,4]; то все содержащие их слагаемые в различных соотношениях должны быть опущены. При наличии корня обозначим вычет

$$res\,\frac{1}{1-\lambda U(p)}\Big|_{p=\pm k}=\mp\frac{C_o^2}{2k}\;,\quad C_o=\left[-\frac{2kU(k)}{U'(k)}\right]^{1/2} \;. \tag{15}$$

Важной величиной теории является также так называемая H–функция [3,4], факторизующая характеристическую функцию ядра (12):

$$[1-\lambda U(p)]\,H(p)H(-p)=1 \tag{16}$$

(соотношение Винера–Хопфа). Для нее известно явное выражение [3]

$$\ln H(p)=-\frac{p}{\pi}\int_0^\infty \ln\,[1-\lambda V(u)]\,\frac{du}{p^2+u^2}\ , \tag{17}$$

где $V(u)=U(iu)$ — преобразование Фурье от ядерной функции. H– функция имеет линию ветвления $[-b,-a]$, как и $\bar{K}(p)$, а также возможный полюс $-k$ — решение уравнения (14), причем вычет ее в этой точке

$$res\ H(p)\Big|_{p=-k}=C_o\exp\,(-k\tau_e)\ , \tag{18}$$

где

$$\tau_e=\frac{1}{k}\ln\frac{2kH(k)}{C_o} \tag{19}$$

· - экстраполированная длина.

Приведем здесь также формулы, связывающие функции Бесселя I_ν с K_ν [37]

$$I_\nu\,(p)=\frac{1}{\pi}\left[e^{\pi i/2}\,K_\nu\,(e^{\pm\pi i}p)+e^{\mp\pi i(\nu+1/2)}K_\nu(p)\right]\ , \tag{20}$$

где верхние знаки берутся при $-3\pi/2<\arg p<\pi/2$, нижние при $-\pi/2<\arg p<3\pi/2$. Различие в знаках для разных аргументов комплексного p отражает ветвление функций Бесселя и связанное с ним известное явление Стокса [39].

4. *Резольвента.* Уравнение, определяющее резольвенту уравнения (5), имеет вид

$$R(\tau,\tau_1,\tau_o)=\lambda\,K(\tau,\tau_1)+\lambda\int_0^{\tau_o}K\,(\tau,\tau')\,R(\tau',\tau_1,\tau_o)\tau'^{2\nu+1}d\tau'\ . \tag{21}$$

С ее помощью любое решение (5) выражается через свободное слагаемое

$$S(\tau)=S_o(\tau)+\int_o^{\tau_o} R(\tau,\tau_1,\tau_o)\,S_o(\tau_1)\tau_1^{2\nu+1}d\tau_1 \; . \tag{22}$$

Резольвента $R(\tau,\tau_1,\tau_o)$ симметрична относительно своих аргументов τ и τ_1, так как хотя уравнение (21) не симметрично, оно может быть симметризовано домножением на $(\tau\,\tau_1)^{\nu+1/2}$.

Получим некоторые дополнительные соотношения, которым удовлетворяет резольвента. Непосредственно из (21) получается соотношение

$$\frac{\partial R\,(\tau,\tau_1,\tau_o)}{\partial\tau_o}=\tau_o^{2\nu+1}R\,(\tau,\tau_o,\tau_o)\,R\,(\tau_1,\tau_o,\tau_o) \; , \tag{23}$$

откуда

$$R\,(\tau,\tau_1,\tau_o)=R\,(\tau,\tau_1,\infty)-\int_{\tau_o}^{\infty}R\,(\tau,t,t\,)\,R(\tau_1,t,t\,)t^{2\nu+1}dt \; . \tag{24}$$

Первое слагаемое в этом соотношении — известная функция, так как является характеристикой бесконечной среды, все решения для которой выражаются через одну функцию, определяемую уравнением (см. [3,4])

$$\Phi_\infty(\tau)=\frac{\lambda}{2}K\,(|\tau|)+\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty}K\,(|\tau-\tau'|)\Phi_\infty(\tau')d\,\tau' \; . \tag{25}$$

Для этой функции известно явное выражение

$$\Phi_\infty(\tau)=\frac{C_a^2}{2k}e^{-k\tau}+\frac{\lambda}{2}\int_a^b A(y)R(y)e^{-y\tau}dy \; , \tag{26}$$

где

$$R(y)=\left\{[1-\lambda U(y)]^2+[\lambda\pi A(y)/2]^2\right\}^{-1} \; . \tag{27}$$

Легко проверить, что ядро (6) обладает свойством

$$(D_\tau-D_{\tau_1})K(\tau,\tau_1)=0 \; , \tag{28}$$

где оператор

$$D_\tau=\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{2\nu+1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau} \; . \tag{29}$$

С помощью соотношения (28) можно убедиться, что из уравнения (21) следует еще одно соотношение, которому подчиняется резольвента

$$(D_\tau - D_{\tau_1})\, R(\tau, \tau_1, \tau_o) = $$
$$= \tau_o^{2\nu+1} \left[R(\tau, \tau_o, \tau_o) \frac{\partial R(\tau_1, \tau_o, \tau_o)}{\partial \tau_o} - R(\tau_1, \tau_o, \tau_o) \frac{\partial R(\tau, \tau_o, \tau_o)}{\partial \tau_o} \right] . \quad (30)$$

Уравнение (30) является обобщением соотношения между резольвентой плоского слоя (несимметричного) $\Gamma(\tau, \tau_1, \tau_o)$ и ее частным (граничным) значением $\Phi(\tau, \tau_o) = \Gamma(\tau, 0, \tau_o)$, полученного В.В.Соболевым [40] (см. также [2,3]). Такие уравнения в общем случае рассматривались в работе [41]. Однако соотношение В.В.Соболева позволяет выразить Γ через Φ и ограничиться нахождением только $\Phi(\tau, \tau_o)$. В общем случае уравнение (30) не первого порядка, как для Γ, а второго. Кроме того, производные по τ_o, входящие в (30), очень сингулярны при граничных значениях $\tau = \tau_o$ и $\tau_1 = \tau_o$. Поэтому использование (30) для цилиндра затруднительно, и мы будем действовать другим путем.

5. *Интегральное преобразование от резольвенты.* Введем преобразование от резольвенты R типа преобразования Ганкеля по конечному промежутку:

$$Q(\tau, p, \tau_o) = p^{1/2} \tau^{-\nu} I_\nu(p\tau) + p^{1/2} \int_o^{\tau_o} \tau_1^{\nu+1} I_\nu(p\tau_1) R(\tau, \tau_1, \tau_o) d\tau_1 . \quad (31)$$

По определению резольвенты (22) функция $Q(\tau, p, \tau_o)$ удовлетворяет уравнению (5) со свободным слагаемым, совпадающим с первым слагаемым справа в (31).

Если применить преобразование (31) к уравнению (21), то получится линейное уравнение для функции $Q(\tau, p, \tau_o)$ с интегралом по второму ее аргументу:

$$[1 - \lambda U(p)]\; Q(\tau, p, \tau_o) = p^{1/2} \tau^{-\nu} I_\nu(p\tau) -$$
$$- \lambda p^{1/2} \int_a^b y^{1/2} A(y) Q(\tau, y, \tau_o) F_1(y\,\tau_o, p\,\tau_o) \frac{dy}{y^2 - p^2} , \quad (32)$$

где

$$F_1(y, p) = y\, K_{\nu+1}(y) I_\nu(p) + p K_\nu(y) I_{\nu+1}(p) . \quad (33)$$

При выводе (32) использованы интегралы от бесселевых функций, приводимые, например, в [42] (формулы 1.11.3.3 и 1.12.3.1). Уравнение (32) схоже по виду с полученными в [9 33, 34].

Уравнение (32), хотя оно и не является сингулярным, так как особенности справа и слева взаимно уничтожаются, все же решать трудно. Мы из него получим более удобное для решения уравнение типа Фредгольма.

Перед выводом указанного уравнения приведем еще одно соотношение для Q, легко получаемое из (31) и (23):

$$\frac{\partial Q(\tau,p,\tau_o)}{\partial\tau_o} = \tau_o^{2\nu+1} Q(\tau_o,p,\tau_o)\, R(\tau,\tau_o,\tau_o) \ . \tag{34}$$

Из (32) следует, что при $|\mathrm{Re}\,p| \le a$

$$Q(\tau,p,\infty)=p^{1/2}\tau^{-\nu} I_\nu(p\tau)/[1-\lambda U(p)] \ . \tag{35}$$

Это равенство, несмотря на то, что интеграл в (31) при $\tau_o=\infty$ расходится, можно аналитически продолжить на все комплексные p, как и в плоском случае. Равенства (34) и (35) позволяют написать соотношение вида (24) и для $Q(\tau_o,p,\tau_o)$.

6. *Уравнение для вспомогательной функции.* Введем еще одну функцию

$$q(\tau,p,\tau_o) = \frac{\lambda}{2} e^{p\tau_o} p^{1/2} \int_a^b y^{1/2} A(y) Q(\tau,y,\tau_o) F_K(y\tau_o, p\tau_o) \frac{dy}{y^2-p^2} \ , \tag{36}$$

где

$$F_K(y,p = y K_{\nu+1}(y) K_\nu(p) - p K_\nu(y) K_{\nu+1}(p) \ . \ . \tag{37}$$

При помощи (36) с учетом (20) уравнение (32) можно переписать так:

$$\begin{aligned}[1-\lambda U(p)]\, Q(\tau,p,\tau_o) &= p^{1/2}\tau^{-\nu} I_\nu(p\tau) - \\ - e^{p\tau_o} q(\tau, e^{\pm\pi i} p,\tau_o) &- e^{-p\tau_o} e^{\mp\pi i(\nu+1/2)} q(\tau,p,\tau_o) \ .\end{aligned} \tag{38}$$

Знаки здесь расставляются по тому же правилу, что и в (20). Неоднозначность их — кажущаяся. При $\nu = \pm 1/2$ ее вообще нет, так как тогда фазовый множитель во втором слагаемом (38) справа равен ± 1.

Получим уравнение для вспомогательной функции $q(\tau,p,\tau_o)$. Для этого сначала заменим в (38) p на $-p$, соблюдая правило знаков. Затем напишем формулу Коши с интегралом вдоль мнимой оси для функции $H(p)\, q\,(\tau,p,\tau_o)$. Это можно сделать, ибо из определения (36) видно, что так как $F_K(y\,\tau_o, p\,\tau_o)$ обращается в нуль при $p=y$, то при $\mathrm{Re}\, p>0$ функция $q(\tau,p,\tau_o)$ регулярна. Из (31) также следует, что при $P\to\infty$ она имеет порядок не выше, чем $(1/p)\ln p$. В то же время $H(\infty)=1$. Воспользовавшись (38), получим

$$H(p)q(\tau,p,\tau_o) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{H(p')dp'}{p'-p}\Big([1-\lambda U(p')]\, Q(\tau,e^{\mp \pi i}p',\tau_o)e^{-p'\tau_o} -$$

$$- e^{2p'\tau_o}e^{\mp \pi i(\nu+1/2)}q(\tau,e^{\mp \pi i}p',\tau_o) + \tau^{-\nu}(e^{\mp \pi i}p)^{1/2}I_\nu(e^{\mp \pi i}p\tau)\Big)\,. \tag{39}$$

Часть подинтегральной функции в (39), соответствующая первому слагаемому в фигурной скобке, регулярна при $\mathrm{Re}\, p'<0$ и может быть отброшена. Интеграл от второй части преобразуем к отрицательной ветви вещественной оси, где регулярна функция q, стоящая там множителем. При преобразовании контура интегрирования надо учесть формулу (13), отражающие ветвление $H-$ функции на отрезке $[-b,-a]$ согласно (16), и различие множителей $e^{\mp \pi i(\nu+1/2)}$ сверху и снизу промежутка $(-\infty,0)$, отражающее ветвление функций Макдональда K_ν и $K_{\nu+1}$ в (36). Надо также взять вычет в полюсе $H-$ функции $-k$. При преобразовании интеграла от третьего слагаемого нужно принимать во внимание только особенности $H-$функции. В результате получим

$$H(p)\, q(\tau,p,\tau_o) = C_o\,\frac{k^{1/2}\tau^{-\nu}}{k+p}\, I_\nu(k\tau)\, e^{-k(\tau_o+\tau_e)} +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_a^b\frac{A(y)R(y)}{H(y)}\,\frac{y^{1/2}\tau^{-\nu}}{y+p}\, I_\nu(y\tau)e^{-y\tau_o}dy + \sin(\pi\nu)\, C_o\frac{q(\tau,k,\tau_o)}{k+p}e^{-k(\tau_e+2\tau_o)} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{R(y)}{H(y)}\,dy\,\frac{q(\tau,y,\tau_o)}{y+p}\, e^{-2y\tau_o}\Big[\frac{\lambda\pi}{2}A(y)\sin(\pi\nu) - \tag{40}$$

$$-[1-\lambda U(y)]\,\cos(\pi\nu)\Big] - \frac{\cos(\pi\nu)}{\pi}\int dy\,\frac{q(\tau,y,\tau_o)}{y+p}\, e^{-2y\tau_o}\,\frac{1}{H(y)\,[1-\lambda U(y)]}\,.$$

Здесь функция $R(y)$ определяется формулой (27).

Последний интеграл в (40) берется по дополнению отрезка $[a, b]$ до полуоси $[0,\infty]$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Заметим, что при $\nu=\pm 1/2$ этот интеграл не возникает, так же, как и слагаемое в фигурных скобках с множителем $\cos(\pi\nu)$. Эти особенности характерны для цилиндра.

Уравнение (40) можно решать итерациями. При $\nu=\pm 1/2$ искомую функцию $q(\tau,p,\tau_o)$ достаточно найти при $p=y$ из $[a,b]$ и $p=k$, в общем же случае — для всех $p=y\geq 0$.

7. *Обращение преобразования.* Рассчитав функцию $q(\tau,p,\tau_o)$ можно найти и резольвенту R, знание функции Q при этом не требуется.

Обращением преобразования (31) служит

$$R(\tau,\tau_1,\tau_o)=\frac{1}{\tau_1\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}[Q(\tau,p,\tau_o)-p^{1/2}\tau^{-\nu}I_\nu(p\tau)]\,p^{1/2}K_\nu(p\tau_1)dp\ . \qquad (41)$$

Можно получить несколько отличную от (41) формулу обращения, где подинтегральная функция быстрее убывает при $p\to\infty$. Для этого продолжим резольвенту на значения ее аргументов τ и τ_1 большие τ_o, то есть вне цилиндра. Сделаем это с помощью уравнения (21). Легко показать, что при $\tau_1\geq\tau_o$ из (21) следует

$$R(\tau,\tau_1,\tau_o)=\lambda\int_a^b y^{1/2}A(y)dy\,\tau_1^{-\nu}K_\nu(y\tau_1)\,Q(\tau,y,\tau_o)\ . \qquad (42)$$

Преобразование от этой функции вида (31), но по промежутку $\tau_o\leq\tau_1<\infty$ дает первое интегральное слагаемое в (32). Поэтому преобразование от R по τ_1 по всему промежутку $[0,\infty]$ равно $\lambda U(p)\,Q(\tau,p,\tau_o)$, так что

$$R(\tau,\tau_1,\tau_o)=\frac{\lambda}{\tau_1\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}U(p)\,Q(\tau,p,\tau_o)p^{1/2}K_\nu(p\tau_1)dp\ . \qquad (43)$$

Теперь преобразуем контур интегрирования в (43), подставив туда выражение для Q из (38). Контур надо преобразовывать к особенностям функции $[1-\lambda U(p)]^{-1}$, причем налево при $\tau>\tau_1$ и направо в противоположном случае. Примем также во внимание, что из (35) следует

$$R(\tau,\tau_1,\infty)=\frac{1}{\tau^{\nu}\tau_1^{\nu}}\Big[C_o^2 I_\nu(k\tau_m)K_\nu(k\tau_M)+$$
$$+\lambda\int_a^b A(y)y^{1/2}dyR(y)I_\nu(y\tau_m)K_\nu(y\tau_M)\Big] \ . \tag{44}$$

Тогда, действуя так же, как при выводе (40), получим

$$R(\tau,\tau_1,\tau_{o})=R(\tau,\tau_1,\infty)-\pi\tau_1^{-\nu}\Big[C_o^2K^{-1/2}e^{-K\tau_o}I_\nu(K\tau_m)\,q(\tau_M,k,\tau_o)+$$
$$+\lambda\int_a^b A(y)y^{1/2}dy\,R(y)q(\tau_M,y,\tau_o)e^{-y\tau_o}I_\nu(y\tau_m)\Big] \ . \tag{45}$$

Заметим, что для вычисления резольвенты значения функции $q(\tau,y,\tau_o)$ при y вне промежутка $[a,b]$ не нужны (кроме $q(\tau_M,k,\tau_o)$).

Теперь упомянем об одном обобщении наших уравнений.

8. *Случ: й пространства произвольного числа измерений.* Мы рассматривали уравнения для физического, трехмерного пространства. Представляет некоторый интерес рассмотреть рассеяние излучения в пространствах с числом измерений, отличным от трех. В теории переноса излучения в начале ее развития, а в сложных случаях и сравнительно недавно рассматривалось рассеяние в одномерной среде, когда считается, что фотоны рассеиваются только вперед и назад (см. [1,43,44,45]). Были работы, например, [46,47], в которых изучалось рассеяние в двумерной среде, когда фотоны не выходят из некоторой фиксированной плоскости. Одномерная среда моделирует трехмерную в двухпотоковом приближении [1], двумерная — среду с цилиндрической симметрией. В [46] приближение двумерной среды использовалось при изучении давления радиации во вращающихся и расширяющихся аксиально симметричных оболочках, а в [47] изучалось рассеяние на выстроенных цилиндрических частицах. В [31] размерность цилиндрической области, где рассеиваются фотоны, считалась произвольной. Общее рассмотрение может дать возможность оценить ошибку, вносимую заменой размерности пространства.

Заметим, что уравнения настоящей статьи сохраняют свой вид и для пространств любого числа $N \geq 1$ измерений. Надо лишь вместо (3) предположить, что трансляционно инвариантное ядро уравнения с интегралом по N—мерной области $\vec{\tau}'$

$$S(\vec{\tau})=S_o(\vec{\tau})+\lambda\int K_{PN}(|\vec{\tau}-\vec{\tau}'|)\,S(\vec{\tau}')d^N\tau' \tag{46}$$

представляется в виде

$$K_{PN}(\tau)=\int_a^b y\,A(y)dy\,G_N(y,\tau)\ , \tag{47}$$

где G_N — функция Грина уравнения Гельмгольца

$$G_N(y,\tau)=(2\pi)^{-N/2}(y/\tau)^{N/2-1}K_{N/2-1}(y\tau)\ . \tag{48}$$

Тогда для цилиндрической области, в основании которой лежит m−мерный шар, а осями симметрии служат остальные $N-m$ измерений, уравнение (46) перепишется в виде (5), ядром будет функция вида (6), где по−прежнему $\nu=m/2-1$, а функция $A(y)$ может быть любой (не связанной с теорией переноса).

Ядро уравнения, описывающего рассеяние фотонов в N−мерном пространстве, имеет вид

$$K_{PN}(\tau)=\frac{1}{\sigma_N\,\tau^{N-1}}A\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^2(x)\exp(-\tau[\alpha(x)+\beta])\,dx\ , \tag{49}$$

где $\sigma_N=2\,\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$ — площадь N — мерной единичной сферы. Смысл (49) тот же, что и у (2): множитель перед интегралом отражает геометрическую дилюцию излучения, а экспонента под интегралом — ослабление за счет поглощения в линии и континууме фотонов определенной частоты. Множитель $A\,\alpha(x)$ характеризует вероятность излучения фотона в частоте x, а второй множитель $\alpha(x)$ — вероятность поглощения его в этой частоте.

Легко показать, что (49) приводится к виду (47) с $a=\beta$, $b=\infty$ и функцией $A(y)$ вида

$$A_N(y)=\frac{4A\,\sigma_{n-1}}{y\,\sigma_N}\begin{cases}\displaystyle\int_{x(y-\beta)}^{\infty}\alpha^2(x)\left\{y^2-[\alpha(x)+\beta]^2\right\}^{N/2-3/2}dx\ , & \beta\le y\le 1+\beta\ ,\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\alpha^2(x)\left\{y^2-[\alpha(x)+\beta]^2\right\}^{N/2-3/2}dx\ , & y\ge 1+\beta\ ,\end{cases}$$

(50)

Нетрудно установить связи между функциями, соответствующими ядрам (49) при разных N. Например, для преобразований Фурье

$$V_N(u)=A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2(x)dx}{\alpha(x)+\beta}F\left(\frac{1}{2},1,\frac{N}{2},-\frac{u^2}{[\alpha^2(x)+\beta]^2}\right)=$$

$$=\frac{2\Gamma(N/2)}{\Gamma(N/2-1/2)\pi^{1/2}}\int_0^1(1-t^2)^{N/2-3/2}V_1(ut)dt\;. \tag{51}$$

Как уже говорилось, вид ядра и всех уравнений сохраняется при произвольных N. Заметим также, что мы считали $|\nu|\leq 1/2$, то есть $m\leq 3$. При больших m и ν в некоторых из уравнений появляются расходящиеся интегралы, которые должны быть модифицированы, но мы на этом не останавливаемся.

Таким образом, задачи о свечении симметричного слоя, шара (что уже было известно [7]) и цилиндра сводятся к решению уравнений одного вида для вспомогательной функции $q(\tau,p,\tau_0)$, а именно уравнений (40). Эти уравнения удобны тем, что поддаются решению итерациями, причем итерации ввиду наличия множителей $e^{-2y\tau_0}$ сходятся тем скорее, чем больше τ_0. При этом при ν полуцелых (шар и слой) и $a>0$ итерации (40) сходятся со скоростью $e^{-2a\tau_0}$. В общем же случае (произвольные ν или $a=0$) поправки убывают пропорционально некоторой степени τ_0. Отметим еще раз, что в случаях, когда ν не полуцелое, в частности, в случае цилиндра при $a>0$ или $b<\infty$ уравнение (40) для вспомогательной функции $q(\tau,p,\tau_0)$ сложнее, чем при полуцелых ν, так как содержит дополнительные интегралы и требует расчета функции $q(\tau,p,\tau_0)$ для более широкой области ее аргумента p. Для случая рассеяния в линии при ППЧ и отсутствия поглощения в континууме этой дополнительной трудности не возникает.

Во второй статье этой серии рассмотрим случаи конкретных источников излучения и конкретных видов рассеяния. В частности, мы получим асимптотики соответствующих решений при $\tau_0\to\infty$ для консервативного рассеяния в спектральной линии и некоторые численные решения полученных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93—02—2957).

Санкт-Петербургский государственный университет

RADIATIVE TRANSFER IN A CYLINDER. I. THE RESOLVENT OF THE BASIC INTEGRAL EQUATION

D.I.NAGIRNER

A new method for calculation of the transfer of spectral line radiation in homogeneous, infinite along the axis cylinder is proposed. The scattering is supposed to be isotropic with complete redistribution in frequency. Simultaneously with the cylinder the transfer of radiation is investigated in slab which is symmetric relative to its middle plane and in sphere. The equations are obtained which determine the resolvent of the basic integral equation, describing the scattering considered. Using Hankel transform on finite interval the resolvent is expressed in terms of an auxilliary function. For this function the equation is derived which is convenient to solve by iterations. The rate of iteration convergence increases with the growth of the optical dimension of the scattering medium.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.В.Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
2. *В.В.Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
3. *В.В.Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
4. *Д.И.Нагирнер*, Теория переноса излучения в спектральной линии. Итоги науки и техн. Астрономия, ВИНИТИ АН СССР, 22, 220, 1983 (Sov. Sci. Rev. Sect. E, Astrophys. Space Phys. 3, 255, 1984).
5. *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, 26, 157, 1987.
6. *В.В.Соболев*, Астрофизика, 8, 197, 1972.
7. *Д.И.Нагирнер*, Астрофизика, 5, 507, 1969.
8. *А.К.Колесов*, Астрофизика, 22, 178, 1985.
9. *Ю.И.Ершов, С.Б.Шихов*, Методы решения краевых задач теории переноса, Атомиздат, М., 1977.
10. *S.T.Thynel, M.N.Ozisic*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 36, 497, 1986.
11. *S.T.Thynel, M.N.Ozisic*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 38, 413, 1987.
12. *S.A.El Wakil, E.A.Saad*, Astrophys. Space Sci., 139, 321, 1987.
13. *A.L.Crosbi, L.C.Lee*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 38, 231, 1987.
14. *M.Madkour*, Astrophys. Space Sci., 168, 1, 1990.
15. *S.T.Thynel*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 42, 117, 1989.
16. *А.К.Колесов*, Докл. АН СССР, 287, 115, 1986.
17. *Е.Б.Павельева*, Асимптотика решения уравнения переноса излучения в диске большого радиуса с источником в окрестности оси симметрии, Ин–т Прикладной математики, Препр. N 97, 1990, 27с.
18. *R.M.Westfall, D.R.Metcalf*, Nucl. Sci. Eng., 52, 1, 1973.
19. *P.Gouttebroze*, Astron. and Astrophys., 228, 295, 1990.
20. *A.L.Crosbi, L.C.Lee*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 48, 441, 1992.
21. *C.E.Siewert, J.R.Thomas Jr.*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 48, 227, 1992.
22. *Wu Shang–Chen, Wu Chin–Yang*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 48, 279, 1992.
23. *M.A.Heaslet, R.F.Warming*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 6, 751, 1966.
24. *А.М.Дыхне, А.П.Напартович*, Перенос резонансного излучения в неоднородной плазме, Ин–т Атомной энергии ИАЭ–2066, М., 1970.
25. *G.J.Pert*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 46, 367, 1991.

26. *A.I.Shestakov, D.C.Eder*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 42, 483, 1989.
27. *S.A.El Wakil, M.T.Attia, M.A.Madkour*, J.Quantit. Spectrosc. Rad. Trans., 45, 235, 1991.
28. *P.Gouttebroze*, In. IAU Coll. 117, 1990, p. 278.
29. *A.Efstathiou, M.Rowan-Robinson*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 252, 528, 1991.
30. *T.Holstein*, Phys. Rev. 83, 1159, 1951.
31. *C.Van Trigt*, J. Math. Phys., 14, 863, 1973.
32. *К.Кейз, П.Цвайфель*, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
33. *R.M.Westfall, D.R.Metcalf*, Trans. Amer. Nucl. Soc., 15, 266, 1972.
34. *J.R.Thomas Jr., J.D.Southers, C.E.Siewert*, Nucl. Sci. Eng., 84, 79, 1983.
35. R.Sanchez, B.D.Ganapol, Nucl. Soc. Eng. 84, 61, 1983
36. *R.M.Westfall*, Trans. Amer. Nucl. Soc., 44, 281, 1983.
37. *Д.И.Нагирнер*, Докл. АН СССР, 289, 606, 1986.
38. *Ф.Д.Гахов*, Краевые задачи, Наука, М., 1977.
39. *Г.Бейтмен, Ф.Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, т.2. Наука, М., 1974.
40. *В.В.Соболев*, Изв. АН Арм.ССР, сер. ф.-м. наук, 11, 39, 1958.
41. *А.Б.Нерсесян*, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 17, 442, 1982.
42. *А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев*, Интегралы и ряды, Специальные функции. Наука, М., 1983.
43. *В.В.Иванов*, Вестн. Ленинградского ун-та, вып. 19, 117, 1960.
44. *С.И.Грачев*, Астрофизика, 13, 185, 1977.
45. *Г.А.Арутюнян, А.Г.Никогосян*, Докл. АН СССР, 242, 66, 1978.
46. *В.П.Гринин*, Астрофизика, 14, 537, 1978.
47. *М.И.Мищенко*, Кинематика и физика небес. тел, 3, 48, 1987.