УДК: 52—423.4

НОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ МАССЫ ЗВЕЗДЫ В БИМЕТРИЧЕСКОЙ СКАЛЯРНО—ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Л.Ш. ГРИГОРЯН, П.Ф. КАЗАРЯН

Поступила 15 августа 1993
Принята к печати 6 сентября 1993

В рамках биметрической скалярно—тензорной теории гравитации выведена новая формула, связывающая квадрат массы статического сферически—симметрического небесного тела с распределением давления в объеме звезды.

До недавнего времени биметрическая формулировка общей теории относительности (ОТО) [1—5] и скалярно—тензорные теории гравитации [6—12] исследовались независимо друг от друга. В [13—17] была предложена биметрическая скалярно—тензорная теория (БСТТ) гравитации. Для наипростейшего варианта БСТТ действие гравитирующих масс определяется выражением [13]

$$S = \int \left(-\frac{\varphi}{2} \Lambda_g + \frac{\zeta}{2\varphi} \varphi_{,n} \varphi^{,n} + L_m \right) \sqrt{-g} d^4 \Omega, \quad (1)$$

φ — независимая полевая переменная (скаляр), ζ — безразмерная постоянная теории, L_m — плотность лагранжиана вещества и негравитационных полей, $\varphi_{,n} = \partial \varphi / \partial x^n$; $\varphi^{,n} = g^{nm} \varphi_{,m}$; скорость света $c = 1$, а $\Lambda_g = \Lambda$, где введено обозначение

$$\Lambda = g^{ik} (\bar{\Gamma}_{in}^l \bar{\Gamma}_{kl}^n - \bar{\Gamma}_{ik}^l \bar{\Gamma}_{ln}^n). \quad (2)$$

В (2) $\bar{\Gamma}_{in}^l = (\Gamma_{ik}^l - \check{\Gamma}_{ik}^l)$ — тензор аффинной деформации, определяемый

символами Кристоффеля Γ_{ik}^l искривленного пространства — времени с квадратом интервала $g_{ik} dx^i dx^k$ и $\check{\Gamma}_{ik}^l$ плоского фонового пространства — времени с квадратом интервала $\gamma_{ik} dx^i dx^k$. В случае $\Lambda_g = R$, где R — скалярная кривизна искривленного пространства — времени, действие (1) переходит в соответствующее выражение для наипростейшего варианта скалярно-тензорной теории (теория Йордана—Бранса—Дикке [6—8]). Если же скалярное поле φ считать постоянным и равным $\varphi_0 = 1/8 \pi G$ (G — ньютоновская гравитационная постоянная), то (1) перейдет в действие ОТО в биметрической формулировке [1—5].

Равенство [1,2]

$$\Lambda = R - \omega_{;n}^n,$$

где

$$\omega^n = g^{ik} \bar{\Gamma}_{ik}^n - g^{ni} \bar{\Gamma}_{ik}^k,$$

а точка с запятой означает ковариантную производную по отношению к метрике g_{ik} позволяет в (1) отбросить несущественный поверхностный интеграл, что приводит к действию Эйнштейна—Гильберта. Однако в случае переменного φ слагаемое, пропорциональное $\omega_{;n}^n$, не сводится к поверхностному интегралу. Поэтому уравнения поля [13]

$$\begin{aligned} \varphi R_{ik} + \varphi_{;n} \bar{\Gamma}_{ik}^n - \varphi_{;i} (\bar{\Gamma}_{ik}^n)_{;n} - \frac{\xi}{\varphi} \varphi_{;i} \varphi_{;k} = T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik}, \quad (3) \\ (2\xi \varphi_{;n} - \varphi \omega^n)_{;n} = T, \end{aligned}$$

вытекающие из (1) с $\Lambda_g = \Lambda$, отличаются как от уравнений теории Йордана—Бранса—Дикке, вытекающих из (1) с $\Lambda_g = R$, так и от уравнений ОТО. В (3) T_{ik} — тензор энергии—импульса вещества и негравитационных полей,

$$f_{(ik)} = (f_{(ik)} + f_{(ki)})/2.$$

В [18,19] показано, что решения уравнений ОТО вместе с $\varphi = \varphi_0$ являются также решениями уравнений (3) и, что уравнения (3) содержат также неэйнштейновские решения с переменным скалярным полем φ . Это обстоятельство приводит к нетрадиционной постановке вопроса о согласии БСТТ с данными наблюдений: задача сводится к согласию ОТО с данными наблюдений и к физической интерпретации неэйнштейновских решений уравнений (3). Последние могут оказаться полезными для предсказания новых эффектов в теории гравитации. В [19] рассмотрен один из подобных эффектов на примере зависимости

массы M нейтронной звезды от давления P в ее центре. В [20] выведена новая формула:

$$M^2 = \frac{8}{G} \int P r \sqrt{-g} d^3 \Omega \quad (4)$$

для квадрата массы статического сферически—симметрического небесного тела. Она справедлива в изотропной системе координат:

$$g_{ik} dx^i dx^k = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2)], \quad (5)$$

с началом в центре небесного тела; $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ — функции радиальной координаты r , определяемые из уравнений Эйнштейна.

Выражение (4) дополняет формулу Толмена [21]

$$M = \int (\rho + 3P) \sqrt{-g} d^3 \Omega \quad (6)$$

для массы небесного тела; ρ , P — плотность полной энергии и давления звездного вещества. В [20] формула (4) выведена в рамках ОТО, однако понятно, что (4) и (6) справедливы также для эйнштейновской ветви решений уравнений (3), когда $\varphi = \varphi_0$. Более того, в [13,14,22] показано, что формула (6) справедлива также для неэйнштейновской ветви решений уравнений БСТТ с переменным φ . Численные же значения массы на эйнштейновской и неэйнштейновской ветвях, разумеется, будут отличаться друг от друга. Возможно, и формула (4) справедлива на неэйнштейновской ветви решений уравнений БСТТ. Ниже дан ответ на этот вопрос.

Рассмотрим статическое сферически—симметрическое небесное тело, описываемое неэйнштейновской ветвью решений уравнений БСТТ. Выберем сферическую систему координат с началом в центре звезды такую, чтобы

$$\gamma_{ik} dx^i dx^k = dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2).$$

Из симметрии задачи понятно, что для искривленного пространства—времени

$$g_{ik} dx^i dx^k = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - e^{\mu(r)} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2). \quad (7)$$

Используя уравнения (3) в [13,14] показано, что

$$\mu(r) = \lambda(r)$$

для всех r , поэтому (7) переходит в (5) (изотропная система координат). С учетом этого обстоятельства уравнения (3) можно преобразовать к виду

$$\varphi u \nu' = \frac{m}{r^2}, \quad (8)$$

$$u'' + \left(\frac{3}{r} + \frac{\varphi'}{\varphi} \right) u' = \frac{2}{\varphi} P u^3 e^{-\nu}, \quad (9)$$

$$\xi \varphi' u + 2\varphi u' = \frac{m_*}{r^2}, \quad (10)$$

где $u = e^{(\nu + \lambda)/2}$,

$$m = \int_0^r (\rho + 3P) r^2 u^3 e^{-\nu} dr, \quad m_* = 3 \int_0^r P r^2 u^3 e^{-\nu} dr,$$

а штрих означает производную по r . Уравнения (8), (10) приведены в [13,14]. Новым является уравнение (9), которое также вытекает из (3).

Функции $\nu(r)$, $u(r)$ и $\varphi(r)$, определяются уравнениями (8)–(10), а $P(r)$ и $\rho(r)$ — из уравнения гидростатического равновесия:

$$P' = -\frac{1}{2}(\rho + P)\nu',$$

с учетом уравнения состояния $P = P(\rho, \tau)$ звездного вещества. Для сверхплотного небесного тела (белый карлик, нейтронная звезда) зависимость от температуры τ не существенна [9], а для звезд типа Солнца зависимость $\tau(r)$ определяется из уравнения лучистого равновесия [23].

Уравнение (9) преобразуется к виду

$$u' [\ln(\varphi u' r^3)]' = \frac{2}{\varphi} P u^3 e^{-\nu} \quad (11)$$

и вне небесного тела элементарно интегрируется:

$$u' = \beta / \varphi r^3, \quad \text{при } r \geq r_1,$$

r_1 — координатный радиус звезды. Постоянную интегрирования β можно определить, используя аналитическое решение уравнений (8)–(10) вне небесного тела (см., например, в [13] выражения (39), (42)–(45)):

$$\beta = \frac{G}{16\pi} (M^2 + \frac{2}{\xi} M_*^2). \quad (12)$$

Здесь

$$M_* = 4\pi m_*(r_1) = 3 \int P \sqrt{-g} d^3 \Omega$$

— постоянная с размерностью массы, которая вместе с тяготеющей массой $M = 4\pi m(r_1)$ фигурирует в аналитическом решении уравнений (8)–(10) вне небесного тела (напомним, речь идет о неэйнштейновской ветви решений).

Введем функцию $\sigma(r)$, определяемую уравнением

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{2}{\varphi u'} P u^3 e^{-\nu} \quad (13)$$

Вне небесного тела она постоянна: $\sigma(r) = \sigma_1$ при $r \geq r_1$. При этом (11) интегрируется:

$$u' = \frac{\beta \sigma}{\varphi r^3 \sigma_1} \quad (14)$$

для всех r , $u'(0) = \sigma(0) = 0$. Подставив (14) в (13):

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{2}{\beta} P r^3 u^3 e^{-\nu},$$

и проинтегрировав по r от центра до поверхности небесного тела, получим равенство

$$\int_0^{r_1} P r^3 u^3 e^{-\nu} dr = \frac{\beta}{2},$$

которое с учетом (12) сводится к искомой формуле

$$M^2 + \frac{2}{\xi} M_*^2 = \frac{8}{G} \int P r \sqrt{-g} d^3 \Omega \quad (15)$$

для квадрата массы на неэйнштейновской ветви решений уравнений БСТТ.

Как видим, для решений с переменным φ формулу (4) необходимо видоизменить, добавив в левой части равенства слагаемое $2 M_*^2 / \xi$. В пределе $\xi \rightarrow \infty$ скалярно—тензорные теории переходят в ОТО, и поэтому (15) переходит в (4). Заметим также, что формулы (4) и (15) явным образом содержат r , и поэтому не инварианты относительно преобразований радиальной координаты $r \rightarrow f(r)$.

В [24] приведены численные значения M и M_* для нейтронных звезд с разными значениями давления звездного вещества в центре небесного тела $P(0)$. В следующей публикации будут вычислены значения интеграла, фигурирующего в (15), для различных значений $P(0)$, что позволит проверить точность численных расчетов авторов [24] подстановкой соответствующих величин в (15).

A NEW FORMULA FOR A STAR MASS IN THE BIMETRIC SCALAR—TENSOR THEORY OF GRAVITATION

L.SH.GRIGORIAN, P.F.KAZARIAN

A new formula connecting the mass square of a static spherically—symmetric celestial body with a pressure distribution in the star volume is derived within the frame of the bimetric scalar—tensor theory of gravitation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *N.Rosen*, The III International School of Cosmology and Gravitation, Erice, 8—20 May, 1974, p.2
2. *L.P.Grishchuk, A.N.Petrov, A.D.Popova*, *Comm. Math. Phys.*, 94, 379, 1984.
3. *Я.Б.Зельдович, Л.П.Гришук*, *Успехи физ. наук*, 149, 695, 1986.
4. *Н.А.Черников*, Вариационный метод Гильберта и тензор Папалетру, Препр. ОИЯИ, P2—87—683, 1987.
5. *А.А.Логунов*, Лекции по теории относительности и гравитации, Наука, М., 1987.
6. *P.Jordan*, *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig, Friedr. Vieweg and Sohn, 1955.
7. *P.Jordan*, *Zs. Phys.*, 157, 112, 1959.
8. *C.Brans, R.H.Dicke*, *Phys. Rev.*, 124, 925, 1961.
9. *Г.С.Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
10. *С.Вайнберг*, Гравитация и космология, Мир, М., 1975.
11. *Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер*, Гравитация, Мир, М., т.3, 1977.
12. *К.Уилл*, Теория и эксперимент в гравитационной физике, Энергоатомиздат, М., 1985.
13. *Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, *Астрофизика*, 31, 359, 1989.
14. *L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian*, *Astrophys. Space Scr.*, 167, 271, 1990.
15. *А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян*, *Астрофизика*, 32, 491, 1990.
16. *А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян*, *Астрофизика*, 33, 107, 1990.
17. *L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian*, *Astrophys. Space Scr.*, 180, 39, 1991.
18. *А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян*, Труды IV семинара "Гравитационная энергия и гравитационные волны", Препр. ОИЯИ, P2-92-12, Дубна, 1992, с.193.
19. *L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian*, *Astrophys. Space Scr.*, 207, 1, 1993.
20. *Р.М.Авакян*, *Астрофизика*, 33, 429, 1990.
21. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1973.
22. *М.Р.Авакян, Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, *Астрофизика*, 34, 265, 1991.
23. *М.Шварцшильд*, Строение и эволюция звезд, ИЛ, М., 1961.
24. *М.Р.Авакян, Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, *Астрофизика*, 35, 121, 1991.