А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 36 НОЯБРЬ, 1993 ВЫПУСК 4

УДК: 52:531.51

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ЭИХ ФОРМАЛИЗМ В БСТТ. ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

А.А.СААРЯН

Поступила 27 апреля 1993
Принята к печати 31 мая 1993

В рамках БСТТ развит формализм для описания систем тел с релятивистским внутренним строением и постньютоновскими орбитальными движениями. Рассчитана интенсивность дипольного гравитационного излучения таких систем. Полученные результаты приложены к двойному пульсару PSR 1913 + 16.

В работе [1] было показано, что биметрическая скалярно— тензорная теория гравитации (БСТТ) в постньютоновском приближении неотличима от ОТО. Для дальнейшего сравнения этих теорий необходимо перейти к новым гравитационным явлениям, выходящим за рамки этого приближения. Ранее в качестве такого примера было рассмотрено излучение гравитационных волн движущимися источниками [2]. Здесь для решений с переменным скалярным полем наряду с квадрупольным излучением БСТТ предсказывает также дипольное излучение, определяемое гравитационной энергией связи составляющих систему тел. Данная работа посвящена исследованию движения компактных объектов в БСТТ, когда орбитальные эффекты можно описывать в постньютоновском приближении.

Для систем такого типа (примером является хорошо известный двойной пульсар PSR 1913+16), в которых имеются тела с релятивистским внутренним строением, в рамках метрических теорий гравитации разработан формализм, являющийся обобщением метода Эйнштейна—Инфельда—Хофмана (ЭИХ) в ОТО, называемой модифицированным ЭИХ формализмом [3]. Здесь сочетаются постньютоновское описание орбитальных эффектов с релятивистским описанием внутреннего строения гравитирующих тел. Последние предполагаются квазистатическими, почти сферически— симметричными и достаточно малыми по сравнению с расстояниями между ними, чтобы приливными взаимодействиями можно было пренебречь. В ОТО модифицированный ЭИХ формализм совпадает с обычным независимо от внутреннего строения тел, что является следствием сильного принципа эквивалентности [3]. В большинстве альтернативных теорий метрика зависит от добавочных гравитационных полей и гравитационное окружение локальной гравитирующей материи может влиять на метрику, создаваемой материей, через граничные значения этих полей. Тело не будет двигаться по геодезической, его движение будет зависеть от его внутреннего строения. Ниже это будет проиллюстрировано на примере решений уравнений БСТТ с переменным скалярным полем.

В этой теории добавочными полями являются скалярное поле φ и плоская фоновая метрика γ_{ik}. Что касается фоновой метрике, то ее граничные значения не влияют на распределение материи (с точностью до приливных членов). Это обстоятельство является следствием того, что в уравнениях поля она входит только через свои символы Кристоффеля. Иначе обстоит дело со скалярным полем. В решении описывающем строение тела, масса зависит от граничного значения φ_o этого поля: $m = m(\varphi_o)$. В частности, для рассматриваемых нами решений уравнений БСТТ с переменным скалярным полем это приводит к отлично от нуля ускорения тела в свободно падающей системе отсчета [3]. Согласно стандартному модифицированному ЭИХ формализму, заменим постоянную инертную массу m_a a—ого тела в материальном действий переменной массой $m_a(\varphi)$, где φ — значение скалярного поля в центре тела (изменение φ внутри области согласования пренебрегаем). Аналагичную процедуру в теории Йордана-Бранса-Дикке можно найти в [4]. Функциональная зависимость $m_a(\varphi)$ обусловлена природой и строением тела. Рассмотрим это на примере ньютоновского тела. Пусть такое тело находится во внешнем поле тяготения, а его размеры таковы, что неоднородностями поля можно пренебречь. Тогда масса тела

$$m(\varphi) = m_o - \frac{1}{16\pi\varphi} \int \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,') \left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|^{-1} d\vec{r}\, d\vec{r}\,', \tag{1}$$

где φ — локальное значение внешнего скалярного поля в месте нахождения тела. Второе слагаемое в правой части представляет собой гравитационный вклад в массу (гравитационная энергия связи). Для обычных тел его вклад мал.

В соответствии с вышесказанным действие БСТТ в модифицированном ЭИХ формализме запишется в виде (космологическую функцию связи полагаем равной нулю, скорость света $c = 1$)

$$S=-\frac{1}{2}\int[\varphi\Lambda_g-\zeta g^{lk}\varphi_{,l}\varphi_{,k}/\varphi]\sqrt{-g}\,d^4x-\sum_a\int m_a(\varphi)\,d\tau_a, \quad (2)$$

где $\varphi_{,l}=\partial\varphi/\partial x^l$, $\zeta=\zeta(\varphi)$,

$$\Lambda_g=g^{ik}(\bar{\Gamma}^l_{lm}\bar{\Gamma}^m_{ki}-\bar{\Gamma}^l_{ik}\bar{\Gamma}^m_{lm}),\quad \bar{\Gamma}^l_{ik}=\Gamma^l_{ik}-\check{\Gamma}^l_{ik}, \quad (3)$$

Γ^l_{ik} и $\check{\Gamma}^l_{ik}$ символы Кристоффеля метрик g_{ik} и γ_{ik} соответственно, a — нумерует частицы, τ_a — собственное время вдоль мировой линии $x^n_a(\tau)$ частицы a. Полученные отсюда уравнения поля имеют вид

$$\varphi R_{ik}+\varphi_{,n}\bar{\Gamma}^n_{ik}-\varphi_{,(i}\bar{\Gamma}^n_{k)n}-\zeta\varphi_{,i}\varphi_{,k}/\varphi=T_{ik}-g_{ik}T/2, \quad (4а)$$

$$2\zeta\varphi^{;n}_{;n}+(\zeta'-\zeta/\varphi)\varphi^{,n}\varphi_{,n}+\varphi\Lambda_g+2\varphi\,\partial T/\partial\varphi=0,$$

$$\zeta'=d\zeta/d\varphi. \quad (4б)$$

Здесь круглые скобки в индексном выражении означают симметризацию по индексам i и k,

$$T^{ik}=\sum_a m_a u^i_a u^k_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)/(\sqrt{-g}\,u^0_a) \quad (5)$$

— тензор энергии—импульса системы частиц, $\vec{r}_a$ и $u^i_a=dx^i_a/d\tau_a$ — радиус вектор и 4—х скорость a—ого тела. Уравнения движения негравитационной материи следующие

$$\frac{du^i_a}{d\tau_a}+\Gamma^i_{kl}u^k_a u^l_a=\frac{\partial\ln m_a}{\partial\varphi}(g^{ik}-u^i_a u^k_a)\varphi_{,k}, \quad (6)$$

где значения величин берутся в точке нахождения тела a. Наличие в этом уравнении правой части приводит к нарушению сильного принципа эквивалентности. Движение тел не происходит по геодезическим и зависит от их природы (так называемый эффект Нордведта [3]). Выражение в правой части (6) представляет собой ускорение, обусловленное скалярным полем.

Полученные ранее выражения сохраняющихся величин в БСТТ [5] остаются в силе и для действия (2), с той лишь разницей, что ковариантная дивергенция тензора энергии—импульса материи теперь не равна нулю

$$T^{ik}_{;k}=\varphi^{,i}\,\partial T/\partial\varphi. \quad (7)$$

Рассмотрим систему гравитирующих тел, в которой скорости малы: $v_a \ll 1$. Выберем систему координат, в которой асимптотические значения полевых переменных следующие

$$\gamma_{ik} \to \overset{(o)}{\gamma}_{ik} = diad(c_o, c_1, c_1, c_1), \ \varphi \to \varphi_o$$
$$g_{ik} \to \overset{(0)}{g}_{ik} = diad(1, -1, -1, -1). \tag{8}$$

В области вдали от тел можно написать следующие разложения

$$g_{oo} = 1 + \overset{(2)}{g}_{oo} + \overset{(4)}{g}_{oo} \ldots, \quad g_{\alpha\beta} = \overset{(o)}{g}_{\alpha\beta} + \overset{(2)}{g}_{\alpha\beta} + \ldots$$
$$g_{o\alpha} = \overset{(3)}{g}_{o\alpha} + \ldots, \quad \varphi = \varphi_o(1 + \overset{(2)}{\varphi} + \overset{(4)}{\varphi} + \ldots). \tag{9}$$

Здесь и далее греческие индексы пробегают значения 1—3, а $\overset{(n)}{f}$ означает слагаемое порядка v^n в разложении соответствующей величины. Отсюда для функции инертной массы a—ого тела имеем

$$m_a(\varphi) = m_a\,[\,1 + s_a\overset{(2)}{\varphi} + s_a\overset{(4)}{\varphi} + \frac{1}{2}(s_a^2 - s_a - s_a')\overset{(2)}{\varphi}{}^2 + \ldots\,],$$
$$m_a = m_a(\varphi_o), \tag{10}$$

где введены обозначения

$$s_a \equiv \left[\frac{\partial \ln m_a(\varphi)}{\partial \ln \varphi}\right]_{\varphi=\varphi_o}, \quad s_a' \equiv -\left[\frac{\partial^2 \ln m_a(\varphi)}{\partial(\ln\varphi)^2}\right]_{\varphi=\varphi_o} \tag{11}$$

(для этих параметров употребляют термин "чувствительность" [3]). Для ньютоновского тела из (1)

$$s_a = \frac{G}{2\,m_a}\int \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')\,\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^{-1} d\vec{r}\,d\vec{r}\,', \quad G = 1/8\,\pi\varphi_o, \tag{12}$$

т.е. s_a — относительный вклад гравитационной энергии связи в полную массу тела. По порядку величины $s \sim G\,m\,/\,d \sim r_g\,/\,d$, где d — радиус тела.

Подставим разложения (9) в систему уравнений (4). В ньютоновском ($\sim v^2$) и следующем ($\sim v^3$) приближениях уравнение (4а) совпадает с уравнениями Эйнштейна, и поэтому при подходящем выборе координат

$$\overset{(2)}{g}_{oo} = -2U\,,\quad \overset{(2)}{g}_{\alpha\beta} = 2U\overset{(0)}{g}_{\alpha\beta}\,,\quad U = G\sum_a m_a / |\vec{r} - \vec{r}_a|$$

$$\overset{(3)}{g}_{o\alpha} = -\frac{1}{2} G\overset{(0)}{g}_{\alpha\beta} \sum_a \frac{m_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}\left[7\, v_a^{\beta} + \frac{\vec{v}_a\cdot(\vec{r} - \vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^2}(x^{\beta} - x_a^{\beta})\right]. \tag{13}$$

Поправки к фоновой метрике имеют вид

$$\overset{(2)}{\gamma}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha.\beta} + \eta_{\beta.\alpha}\,,\quad \overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha} = \eta_{0,\alpha} + \eta_{\alpha.0}\,,\quad \overset{(2)}{\gamma}_{00} = 0\,,$$

$$\eta_{\alpha} \sim v^2\,,\quad \eta_o \sim v^3$$

а соответствующие символы Кристоффеля равны

$$\Gamma^i_{kl} = \eta^i_{,kl}\,,\quad \eta^i = \overset{(0)}{\gamma}{}^{ik}\eta^k. \tag{14}$$

В низшем приближении уравнение скалярного поля (4b) примет вид

$$\Delta\overset{(2)}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_o \zeta_o}\sum_a m_a s_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\,,\quad \zeta_o = \zeta(\varphi_o)\,,$$

изчезающие на бесконечности решение которого

$$\overset{(2)}{\varphi} = -\frac{2G}{\zeta_o}\sum_a \frac{m_a s_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}. \tag{15}$$

С другой стороны в варианте теории с $\zeta(\varphi) = \zeta_o = \mathrm{const}$ для статического сферически—симметричного тела на больших расстояниях было получено следующее разложение [6]

$$\varphi = \varphi_o(1 - \alpha r_g / \zeta_o r + \ldots)\,,$$

где r — расстояние от центра тела. Сравнивая с (15) для чувствительности s получим следующие выражение

$$s = \alpha \equiv 3\frac{\int P\sqrt{-g}\, d^3x}{\int(\rho + 3P)\sqrt{-g}\, d^3x}. \tag{16}$$

Его значения для моделей из несжимаемой жидкости вычислено в [6], а для реальной уравнении состояния в [7] ($s \le 0.4$). Они мало отличаются от соответствующих значений ОТО. В нерелятивистском приближении с учетом теоремы вириала [3]

$$3\int P\, d^3x = \frac{G}{2}\int \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|^{-1} d^3x\, d^3x'$$

и справедливой в БСТТ формулы Толмена для массы [6,8] мы снова приходим к формуле (12).

В том же приближении уравнение движения a–ого тела (6) примет вид

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = -G\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r^3_{ab}}\,\vec{r}_{ab}\left(1+\frac{2\,s_a s_b}{\zeta_o}\right), \quad \vec{r}_{ab}=\vec{r}_a-\vec{r}_b. \tag{17}$$

Ускорение тела зависит от его внутренней структуры через параметр s_a.

Выше мы использовали ЭИХ уравнения для нахождения полей в пространстве между телами (ближная зона). Из этих уравнений можно также получить и гравитационно—радиационные поля в дальней зоне, и скорость потери энергии на гравитационное излучение. Главным образом нас будет интересовать потери, обусловленные дипольным гравитационным излучением, дающим основной вклад.

Рассмотрим излучение гравитационных волн системой, описываемой модифицированным ЭИХ формализмом. Поля в волновой зоне представим в виде

$$g_{ik} = \overset{(0)}{g}_{ik} + h_{ik}, \quad \varphi = \varphi_o(1+\varphi_1).$$

Рассуждениями, аналогичными [2] можно показать, что в предположении малых скоростей источника

$$\varphi_1(t,\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r}\sum_m \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \int S(t-r,\vec{r}\,')(\vec{n}\cdot\vec{r}\,')^m\, d\vec{r}\,',$$

$$\vec{n} = \vec{r}/r,$$

где функция источника в достаточном приближении (см. (4б))

$$S = \frac{1}{\varphi_o \zeta_o}\sum_a m_a s_a\,[\,1+(\vec{n}\cdot\vec{v}_a)\,].$$

Величины h_{ik} не дают вклада в дипольное излучение, поэтому мы их не выписываем. Таким образом,

$$\varphi_1 = -\frac{2G}{\zeta_o r}\sum_a m_a s_a [1 + (\vec{n}\cdot\vec{v}_a)]. \tag{18}$$

Поток энергии гравитационного излучения через элементарную площадку определяется $r^2\, d\Omega$выражением (см. [2])

$$\frac{dI}{d\Omega} = -n_\alpha r^2 \frac{-g\varphi_o}{\sqrt{-\gamma}\;\varphi} t^{o\alpha}_{LL}, \tag{19}$$

где t^{ik}_{LL} — тензор энергии—импульса гравитационного поля, являющийся обобщением псевдотензора Ландау—Лифшица ОТО (его выражение см. в [5]) На больших расстояниях в достаточно малых областях волну можно считать плоской, и поэтому

$$t^{o\alpha}_{LL} = \varphi_o n^\alpha \left(\frac{1}{4} h^{ik}_{,o} h_{ik,o} + \zeta_o \varphi^2_{1,o}\right), \tag{20}$$

где для h_{ik} выбрана калибровка, в которой отличны от нуля только h_{23} и $h_{22} = h_{33}$. В дипольное излучение вклад дает лишь второе слагаемое (20) и интенсивность дипольного излучения равна

$$\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_{дип.} = \frac{G^3}{2\pi\zeta_o}\left[\sum_{a\neq b}\frac{m_a m_b s_a}{r^3_{ab}}\left(1+\frac{2 s_a s_b}{\zeta_o}\right)(\vec{n}\,\vec{r}_{ab})\right]^2.$$

Отсюда для полных потерь энергии, обусловленных дипольным излучением получим следующее выражение

$$I_{дип.} = \frac{2G^3}{3\zeta_o}\left[\sum_{a\neq b}\frac{m_a m_b}{r^3_{ab}} s_a\left(1+\frac{2 s_a s_b}{\zeta_o}\right)\vec{r}_{ab}\right]^2. \tag{21}$$

В случае двойной системы, разлагая движение на координаты центра масс и относительного движения, из (21) получим

$$I_{дип.} = \frac{2G^3 m_1^2 m_2^2}{3\zeta_o r^4}\left(1+\frac{2 s_1 s_2}{\zeta_o}\right)^2 (s_1 - s_2)^2,$$

где $r = | \vec{r}_2 - \vec{r}_1' |$. Для усредненной по периоду обращения потери энергии на дипольное излучение [3]

$$\frac{dE}{dt} = -<I_{дин.}> = \frac{2G^3 m_1^2 m_2^2}{3\zeta_o a^4}\left(1 + \frac{2s_1 s_2}{\zeta_o}\right)(s_1 - s_2)^2 \frac{1 + e^2/2}{(1 - e^2)^{5/2}},$$

где e и a эксцентриситет и большая ось орбиты системы. Скорость изменения периода вследствие дипольного гравитационного излучения имеет вид

$$\left(\frac{\dot{P}}{P}\right)_{дин.} = -\frac{2G^3 M}{\zeta_o}(s_1 - s_2)^2 \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \frac{1 + e^2/2}{(1 - e^2)^{5/2}},$$

$M = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ — приведенная масса системы. Для параметров двойного пульсара PSR 1913+16 отсюда имеем

$$\left(\frac{\dot{P}}{P}\right)_{дин.} = -\frac{6}{\zeta_o}\left(\frac{s_1 - s_2}{0,1}\right)^2 \frac{M}{m_\odot} 10^{-7}\ год^{-1}.$$

Если предположить, что наблюдаемое значение уменьшения орбитального периода двойного пульсара $\dot{P}/P \approx 10^{-9}$ год$^{-1}$ обусловлено излучением гравитационных волн (о других возможных причинах изменения периода см. [3]), то получим следующее ограничение на параметры

$$\left(\frac{s_1 - s_2}{0.1}\right)^2 \zeta_o^{-1} \leq 10^{-2}.$$

Еще раз подчеркнем, что приведенные выше результаты получены на основе решений уравнений БСТТ с переменным скалярным полем. Наряду с этими решениями теория допускает конфигурации, в которых скалярное поле постоянно [7,9]. В этом случае предсказания БСТТ совпадают с результатами ОТО и поэтому дипольное излучение отсутствует (сравнение наблюдаемых параметров двойного пульсара и предсказаний ОТО см. [3]).

Таким образом, в предположении, что изменение орбитального периода PSR 1913+16 обусловлено потерей энергии на гравитационное излучение, возможны три случая: а) компоньон пульсара является нейтронной звездой с близкой структурой ($s_1 \approx s_2$), б) параметр теории $\zeta_o \geq 100$, либо в) в двойном пульсаре реализуется решение с постоянным гравитационным скаляром $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$.

В заключении, выражаю признательность Л.Ш.Григоряну за ценные обсуждения и замечания.

Ереванский государственный университет

MODIFICATED EIH FORMALISM IN BSTT. GRAVITATIONAL RADIATION

A.A.SAHARIAN

Within the framework of BSTT a formalism is developed for the description of systems of bodies with relativistic inner structure and post-Newtonian orbital motions. The intensity of dipole gravitational radiation is calculated for such systems. The obtained results are applied to the binary pulsar PSR 1913+16.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян*, Астрофизика, 32, 491, 1990.
2. *А.А.Саарян*, Астрофизика, 36, 3, 1993.
3. *К.Уилл*, Теория и эксперимент в гравитационной физике, Энергоатомиздат, М., 1985.
4. *D.M.Eardley*, Astrophys. J., 196, 59, 1975.
5. *А.А.Саарян, Л.Ш.Григорян*, Астрофизика, 33, 107, 1990.
6. *L.Sh.Grigorian, A.A.Saharian*, Astrophys. and Space Sci., 167, 271, 1990.
7. *М.Р.Авакян, Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, Астрофизика, 35, 121, 1991.
8. *М.Р.Авакян, Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян*, Астрофизика, 34, 265, 1991.
9. *А.А.Саарян*, Астрофизика, 36, 245, 1993.