АСТРОФИЗИКА

ТОМ 36 МАЙ, 1993 ВЫПУСК 2

УДК: 52: 531.51

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОТО ЯВЛЯЮТСЯ ЧАСТНЫМИ РЕШЕНИЯМИ БСТТ

А. А. СААРЯН

Поступила 3 августа 1992

Принята к печати 3 сентября 1992

Показано, что уравнения биметрической скалярно-тензорной теории гравитации (БСТТ) имеют сферически-симметричные решения с постоянным скалярным полем определяющие ту же геометрию искривленного пространства-времени, что и в ОТО Найдена также метрика соответствующего фонового (плоского) пространства-времени.

Биметрическая скалярно-тензорная теория (БСТТ) относится к классу метрических теорий гравитации, обладающих предпочтительной геометрией. От обычных скалярно-тензорных теорий (СТТ) она отличается наличием, наряду с динамическими метрикой g_{ik} и гравитационным скаляром φ, плоской фоновой метрики γ_{ik}. Уравнения гравитационного поля в БСТТ имеют вид [1, 2].

$$\varphi R_{ik} + \varphi_{,n}\overline{\Gamma}^n_{ik} - \varphi_{,(i}\overline{\Gamma}^n_{k)n} - \zeta(\varphi)\varphi_{,i}\varphi_{,k}/\varphi = T_{ik} - g_{ik}T/2, \tag{1a}$$

$$2\zeta\varphi^{;n}_{;n} + (d\zeta/d\varphi - \zeta/\varphi)\varphi^{,n}\varphi_{,n} + \varphi\Lambda_g = 0, \tag{1б}$$

где $\varphi_{,i} = \partial\varphi/\partial x^i$, точка с запятой—ковариантная производная по g_{ik}, а круглые скобки в первом случае означают симметризацию соответствующего выражения по индексам i и k.

$$\Lambda_g = g^{ik}(\overline{\Gamma}^l_{ik}\overline{\Gamma}^n_{kl} - \overline{\Gamma}^l_{ik}\overline{\Gamma}^n_{ln}), \quad \overline{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \breve{\Gamma}^l_{ik}, \tag{2}$$

Γ^l_{ik} и $\breve{\Gamma}^l_{ik}$ — символы Кристоффеля для метрик g_{ik} и γ_{ik}, соответственно. Уравнения же негравитационной материи здесь те же, что и в ОТО (как и в любой метрической теории). Заметим, что, воспользовавшись сверткой (1а) и

$$R = \Lambda_g + \overline{w}^n_{;n}, \quad \overline{w}^l = w^l - \breve{w}^l = g^{mn}\overline{\Gamma}^l_{mn} = g^{ln}\overline{\Gamma}^n_{mn}, \tag{3}$$

уравнение (1б) можно представить в виде

$$(2\zeta\varphi^{,n} - \varphi\overline{w}^n)_{;n} - \varphi_{,n}\varphi^{,n}\, d\zeta/d\varphi = T. \tag{1б'}$$

Рассмотрим решения системы (1) с постоянным скалярным полем

$$\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}, \tag{4}$$

когда она принимает вид

$$\varphi_0 R_{ik} = T_{ik} - Tg_{ik}/2, \tag{5а}$$

$$\varphi_0\,\overline{w}^n_{;n} = -T. \tag{5б}$$

Первое из этих уравнений не содержит фоновую метрику, и при $\varphi_0 = 1/8\pi G$, G—ньютоновская гравитационная постоянная, совпадает с уравнением Эйнштейна ОТО. Во втором же уравнении, помимо g_{ik} и материальных переменных, фигурирует также γ_{ik}. В общем случае эта метрика зависит от четырех произвольных функций, определяющих координатную систему в фоновом пространстве—времени. Таким образом, вопрос о существовании решений БСТТ типа (4) сводится к следующему [4]: можно ли подбором этих функций удовлетворить единственному уравнению (5б) при заданных решениях уравнений Эйнштейна? Покажем сначала, что когда обе метрики статические этого сделать нельзя. Действительно, в статическом случае, как показано в [3], на больших расстояниях от гравитирующей системы

$$\varphi = \varphi_0(1 + r_0/r + \ldots),$$

где

$$r_0 = \frac{1}{4\pi\varphi_0\zeta}\int T^i_i\sqrt{-g}\,d^3x, \quad i = 1-3.$$

Так как, вообще говоря, $r_0 \neq 0$, то гравитационный скаляр не может быть постоянным.

В [4] найдены частные решения системы (5) для плоской космологической модели Фридмана. Например, одно из решений имеет вид

$$g_{00} = 1, \quad g_{ik} = \gamma_{ik} = -b^2(t)\,\delta_{ik},$$

$$\gamma_{00} = 1 - \left(\frac{db}{dt}\right)^2 \delta_{ik} x^i x^k, \quad \gamma_{0i} = -b\frac{db}{dt}\delta_{ik} x^k, \quad i, k = 1-3,$$

где $b(t)$—решение уравнений Эйнштейна (см., например, [5]).

Ниже мы рассмотрим решения (5б) для сферически-симметричного распределения гравитирующих масс, когда решения уравнений (5а) можно представить в виде

$$g_{ik} = \mathrm{diag}\,(e^{\nu}, -e^{\lambda}, -r^2, -r^2\sin^2\theta), \quad \nu = \nu(t, r), \quad \lambda = \lambda(t, r). \tag{6}$$

Из уравнений для ν и λ следуют следующие неравенства [5]:

$$\nu' + \lambda' \geqslant 0, \quad \nu + \lambda \leqslant 0, \quad e^{\lambda} \geqslant 1, \quad e^{\nu} \leqslant 1, \tag{7}$$

где штрих означает производную по r. Пусть фоновая метрика γ_{ik} получается из метрики $\bar{\gamma}_{ik} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -\bar{r}^2, -\bar{r}^2\sin^2\bar{\vartheta})$ преобразованием координат

$$\bar{t} = T(t, r), \quad \bar{r} = R(t, r), \quad \bar{\vartheta} = \vartheta, \quad \bar{\varphi} = \varphi. \tag{8}$$

Она имеет вид

$$\gamma_{ik} = T_{,i} T_{,k} - R_{,i} R_{,k}, \quad i, k = 0, 1, \tag{9}$$

$$\gamma_{22} = -R^2, \quad \gamma_{33} = -R^2\sin^2\vartheta,$$

остальные компоненты равны нулю. Обратная метрика определяется из $\gamma^{lm}\gamma_{mk} = \delta^l_k$ и равна

$$\gamma^{00} = -\gamma_{11}/A^2, \quad \gamma^{11} = -\gamma_{00}/A^2, \quad \gamma^{01} = \gamma_{01}/A^2,$$

$$\gamma^{22} = -1/R^2, \quad \gamma^{33} = -1/R^2\sin^2\vartheta,$$

$$A \equiv (\gamma_{01}^2 - \gamma_{00}\gamma_{11})^{1/2} = T_{,0} R_{,1} - T_{,1} R_{,0}.$$

Для этих γ_{ik}, с учетом (6), уравнение (5б) принимает вид

$$\breve{w}^0_{,0} + \breve{w}^1_{,1} + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' + \lambda'}{2}\right)\breve{w}^1 + \frac{\dot{\nu} + \dot{\lambda}}{2}\breve{w}^0 =$$

$$= \frac{2\cdot e^{-\lambda}}{r}\left(\nu' + \frac{1}{r}\right) + \frac{2}{r^2}, \tag{10}$$

где

$$A\breve{w}^0 = e^{-\lambda}(T'R'' - T''R') +$$
$$+ e^{-\nu}\left(\dot{T}'\dot{R} - \dot{T}\dot{R}' - \frac{2\dot{R}}{R}A\right) - \frac{2}{r^2}RT',$$

$$A\breve{w}^1 = e^{-\nu}(\dot{T}\ddot{R} - \ddot{T}\dot{R}) +$$
$$+ e^{-\lambda}\left(\dot{T}'R' - T'\dot{R}' + \frac{2R'}{R}A\right) + \frac{2}{r^2}R\dot{T},$$

а точка означает производную по времени. Прежде всего заметим, что уравнение (10) имеет вакуумное решение

$$T(t, r) = t, \quad R(t, r) = r. \tag{11}$$

В этом нетрудно убедиться, имея в виду, что в вакууме $\nu' + \lambda' = 0$. Таким образом, уравнения БСТТ имеют частные сферически-симметричные вакуумные решения

$$\begin{gathered} \gamma_{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -r^2, -r^2\sin^2\vartheta), \quad \varphi = \varphi_0 = \mathrm{const} \\ g_{ik} = \mathrm{diag}\left(1 - \frac{r_g}{r}, -\frac{1}{1 - r_g/r}, -r^2, -r^2\sin^2\vartheta\right). \end{gathered} \tag{12}$$

Для нахождения частных решений (10) в области, занятой материей, можно зафиксировать функцию $R(t, r) = r$. В этом случае для $T(t, r)$ получим уравнение

$$\frac{\dot{T}''}{\dot{T}'} + \frac{\dot{T}'}{\dot{T}}\left[\frac{2}{r}(e^{\lambda} - 1) + \frac{\lambda' - \nu'}{2}\right] - \frac{T''}{\dot{T}}\left(\frac{\dot{\lambda} - \dot{\nu}}{2} + \frac{\ddot{T}}{\dot{T}}\right) -$$
$$- \frac{2e^{\lambda}}{r}\frac{T'}{\dot{T}}\left(\frac{\ddot{T}}{\dot{T}} - \frac{\dot{\nu} + \dot{\lambda}}{2}\right) = \frac{\lambda' + \nu'}{r}(e^{\lambda} - 1).$$

В статическом случае оно имеет частное решение $T = tF(r)$, где

$$\begin{gathered} 2\frac{F'}{F} = -\frac{\lambda' - \nu'}{2} - \frac{2}{r}(e^{\lambda} - 1) \pm \left\{\left[\frac{\lambda' - \nu'}{2} + \frac{2}{r}(e^{\lambda} - 1)\right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{4(\lambda' + \nu')}{r}(e^{\lambda} - 1)\right\}^{1/2}. \end{gathered} \tag{13}$$

Заметим, что вследствие (7) подкоренное выражение всегда положительно. В вакууме, наряду с $F=\mathrm{const}$ (верхний знак, см. (12)), получим также решение $F=\mathrm{const}/(1-r_g/r)$. Таким образом, мы показали, что уравнения БСТТ имеют сферически-симметричные решения

$$
\begin{gathered}
g_{00}=e^{\nu},\quad g_{11}=-e^{\lambda},\quad g_{22}=\gamma_{22}=-r^2,\quad g_{33}=\gamma_{33}=-r^2\sin^2\vartheta \\
\gamma_{00}=F^2,\quad \gamma_{01}=tFF',\quad \gamma_{11}=-1+t^2F'^2,\qquad \varphi=\mathrm{const},
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где F определяется из (13), а $\nu=\nu(r)$ и $\lambda=\lambda(r)$ являются решениями уравнений Эйнштейна. Отметим, что помимо решений (14) БСТТ имеет также сферически-симметричное решение с $\varphi\neq\mathrm{const}$ [2], т. е., в отличие от ОТО, здесь теорема Биркгоффа (см., например, [6]), неверна.

Автор выражает благодарность Л. Ш. Григоряну за ценные обсуждения и поддержку.

Институт прикладных проблем физики
АН Республики Армения

SPHERICAL-SYMMETRIC SOLUTIONS OF GR ARE PARTIAL SOLUTIONS OF BSTT

A. A. SAHAKIAN

It is shown that the equations of the Bimetric Scalar-Tensor Theory of Gravitation (BSTT) have spherical-symmetric solutions with constant scalar field which determine the same geometry of the curved space-time as in GR. The metric tensor of the background (flat) space-time is also found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Саарян, Л. Ш. Григорян,* Астрофизика, 32, 491, 1990.
2. *L. Sh. Grigorian, A. A. Saharian,* Astrophys. and Space Sci., 167, 271, 1991.
3. *М. Р. Аваккн, Л. Ш. Григорян, А. А. Саарян,* Астрофизика, 34, 265, 1991.
4. *А. А. Саарян, Л. Ш. Григорян,* Тр. IV семинара „Гравитационная энергия и гравитационные волны", Дубна, 1992, стр. 193.
5. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц,* Теория поля, Наука. М., 1973.
6. *С. Вейнберг,* Гравитация и космология, Мир. М, 1975.