АСТРОФИЗИКА

ТОМ 36 МАЙ, 1993 ВЫПУСК 2

УДК 524.3—54

К ТЕОРИИ ИЗОТРОПНОГО РАССЕЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛОЕ. МЕТОД РАЗДЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Х. ДАНИЕЛЯН

Поступила 22 июня 1992

Принята к печати 6 октября 1992

В одной из работ автора [1] были получены явные интегральные представления для основных характеристик поля диффузного излучения в слое конечной оптической толщины посредством неких функций $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$. В настоящей статье, явившейся логическим продолжением [1], показано, что для нахождения этих функций достаточно решить два раздельных, быстросходящихся, линейных интегральных уравнения с очень простой структурой ядра. Рассмотрены случаи изотропного монохроматического рассеяния и рассеяния с полным перераспределением по частоте в спектральной линии. Подробно рассмотрен случай консервативного рассеяния. Полученные аналитические результаты существенно упрощают анализ и численное решение задач теории переноса в конечном слое.

1. *Введение.* В работе автора [1] десятилетней давности был разработан относительно простой путь нахождения основных характеристик поля диффузного излучения при изотропном монохроматическом рассеянии в однородных, плоскопараллельных средах. Решения задач там сводились к осуществлению одной или двух поэтапных квадратур (в зависимости от искомой характеристики поля излучения) по угловой переменной и алгебраическим операциям. При этом, для среды конечной оптической толщины, предполагалось знание неких исходных вспомогательных функций $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$, а для полубесконечной среды— функции Амбарцумяна—$\varphi(\eta)$. Такое упрощение стало возможным благодаря факту разделения угловых переменных для некоторых характеристик поля излучения [2—10], а также использованию явных выражений резольвентных функций Соболева полубесконечной среды [11] и конечного слоя [12], позволяющих проводить интегрирования по оптической глубине аналитически.

Компактное выражение резольвентной функции конечного слоя посредством функций $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$ имеет вид:

$$\Phi(\tau, \tau_0) = CM\left(\tau, \tau_0, \frac{1}{k}\right) + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{M(\tau, \tau_0, \mu)}{\mu R(\mu)}\, d\mu, \tag{1}$$

где

$$M(\tau, \tau_0, \mu) = e^{-\frac{\tau}{\mu}} a(\mu, \tau_0) - e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\mu}} b(\mu, \tau_0), \tag{2}$$

$$R(\mu) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\mu \ln\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\pi\mu}{2}\right)^2; \quad C = \frac{k(1-k^2)}{k^2-1+\lambda}, \tag{3}$$

а k и λ—соответственно, корень характеристического уравнения $\dfrac{\lambda}{2k}\ln\dfrac{1+k}{1-k} = 1$ и вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния. Функции $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$ были определены в [1] посредством φ и ψ-функций Амбарцумяна следующим образом:

$$a(\eta, \tau) = 1 - \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 \frac{\varphi(\mu, \tau)}{\mu+\eta}\, d\mu \text{ и } b(\eta, \tau) = \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 \frac{\psi(\mu, \tau)}{\mu+\eta}\, d\mu. \tag{4}$$

Там же приводились и выражения, в известном смысле, обратные к (4).

$$\varphi(\eta, \tau) = 1 + CM_\varphi\left(\tau, \eta, \frac{1}{k}\right) + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{M_\varphi(\tau, \eta, \mu)}{\mu R(\mu)}\, d\mu \tag{5}$$

и

$$\psi(\eta, \tau) = e^{-\frac{\tau}{\eta}} + CM_\psi\left(\tau, \eta, \frac{1}{k}\right) + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{M_\psi(\tau, \eta, \mu)}{\mu R(\mu)}\, d\mu, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} M_\varphi(\tau, \eta, \mu) &= a(\mu, \tau) A(\tau, \eta, -\mu) e^{-\frac{\tau}{\mu}} - b(\mu, \tau) A(\tau, \eta, \mu), \\ M_\psi(\tau, \eta, \mu) &= a(\mu, \tau) A(\tau, \eta, \mu) - b(\mu, \tau) A(\tau, \eta, -\mu) e^{-\frac{\tau}{\mu}}, \end{aligned} \tag{7}$$

а

$$A(\tau, \eta, -\mu)\, e^{-\frac{\tau}{\mu}} = \frac{1 - e^{-\tau\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\eta}\right)}}{\mu + \eta}\, \eta\mu$$

и (8)

$$A(\tau, \eta, \mu) = \eta\mu\, \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}} - e^{-\frac{\tau}{\eta}}}{\mu - \eta}.$$

Из приведенных формул следует, что если за исходные брать φ и ψ-функции Амбарцумяна, то для вычисления $\Phi(\tau, \tau_0)$ необходимо проведение дополнительного интегрирования по формулам (4). Впрочем, это утверждение относится практически ко всем задачам о нахождении характеристик поля излучения, за исключением, пожалуй, задачи о диффузном отражении и пропускании конечным слоем, в которой искомые величины выражаются непосредственно через φ и ψ-функции. Для нахождения последних Амбарцумяном [2] была получена система нелинейных интегральных уравнений

$$\varphi(\eta, \tau) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta, \tau)\int_0^1 \frac{\varphi(\mu, \tau)}{\mu + \eta}\, d\mu - \frac{\lambda}{2}\eta\psi(\eta, \tau)\int_0^1 \frac{\psi(\mu, \tau)}{\mu + \eta}\, d\mu,$$

(9)

$$\psi(\eta, \tau) = e^{-\frac{\tau}{\eta}} + \frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta, \tau)\int_0^1 \frac{\psi(\mu, \tau)}{\mu - \eta}\, d\mu - \frac{\lambda}{2}\eta\psi(\eta, \tau)\int_0^1 \frac{\varphi(\mu, \tau)}{\mu - \eta}\, d\mu,$$

второе из которых, к сожалению, содержит интегралы типа Коши, что приводит к большим осложнениям при численном решении. Полученные впоследствии системы линейных интегральных [13] и интегро-дифференциальных (В. А. Амбарцумян, 1943; не опубликовано) [14] уравнений, в смысле их численной реализации, оказались нисколько не лучше (9).

Функции Амбарцумяна и функции $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$ тесно взаимосвязаны. Так, помимо связей (4), (5) и (6), из первого уравнения системы (9) следует, что

$$a(\eta, \tau)\varphi(\eta, \tau) + b(\eta, \tau)\psi(\eta, \tau) = 1. \tag{10}$$

В работе [1], в частности, предлагался способ нахождения этих четырех функций одновременно из (4), (5) и (6) методом последовательных приближений. Заметим, что в них отсутствуют реальные сингулярности. Впоследствии нами совместно с Г. А. Арутюняном были проведены вычисления на ЭВМ этим способом и получены неплохие результаты. К недостаткам этого способа можно отнести не очень быструю сходимость последовательных приближений, а также неизбежность расчета сразу четырех функций, в необходимости знания которых, при рассмотрении конкретных задач, часто не бывает необходимости.

Ввиду важной роли функций $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$ в теории переноса излучения в конечном слое (все характеристики поля излучения, в том числе φ и ψ-функции Амбарцумяна, явно выражаются через них) эффективный метод их нахождения, действительно, приведет к реальному упрощению расчетов задач указанного класса. Поиску такого метода и посвящена настоящая работа.

2. *Уравнения для* $a(\eta, \tau)$ *и* $b(\eta, \tau)$. Для получения искомых уравнений будем исходить из системы интегральных уравнений для φ и ψ-функций Амбарцумяна, полученной в [6]:

$$\varphi(\eta) = \varphi(\eta, \tau) + \int_0^1 Z(\tau, \eta, \mu)\psi(\mu, \tau)\,d\mu,$$

$$\frac{4\pi}{\lambda}P(\tau, \eta) = \psi(\eta, \tau) + \int_0^1 Z(\tau, \eta, \mu)\varphi(\mu, \tau)\,d\mu. \tag{11}$$

Здесь $\varphi(\eta, \tau)$ и $\psi(\eta, \tau)$—функции Амбарцумяна конечного слоя, $\varphi(\eta)$—для полубесконечной среды; $P(\tau, \eta)$—плотность вероятности выхода кванта с глубины τ в направлении $\arccos \eta$, а ядро Z имеет следующий вид:

$$Z(\tau, \eta, \mu) = \frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\frac{F(\tau, \eta) + \tilde{F}(\tau, \mu)}{\eta + \mu}, \tag{12}$$

где

$$F(\tau, \eta) = \frac{P(\tau, \eta)}{P(o, \eta)} \quad \text{и} \quad \tilde{F}(\tau, \mu) = \mu\varphi(\mu)\int_0^1 \frac{2\pi P(\tau, \zeta)}{\zeta + \mu}\,d\zeta. \tag{13}$$

Заметим, что из последнего соотношения (с учетом того, что $\tilde{F}(0, \mu) = \varphi(\mu) - 1$), как и из обоих уравнений (11) при $\tau = 0$, следует известное уравнение для φ-функции Амбарцумяна

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi(\mu)}{\mu+\eta}\,d\mu. \tag{14}$$

Если умножить оба уравнения системы (11) на $\frac{\lambda}{2}\frac{\zeta\,d\eta}{\eta+\zeta}$ и проинтегрировать от 0 до 1, то с учетом (4), (13), а также (14), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\zeta)-1}{\varphi(\zeta)} &= 1-a(\zeta,\tau)+\frac{\lambda}{2}\zeta\int_0^1 \psi(\mu,\tau)\,d\mu\int_0^1 \frac{Z(\tau,\eta,\mu)}{\eta+\zeta}\,d\eta, \\ \frac{\tilde{F}(\tau,\zeta)}{\varphi(\zeta)} &= b(\zeta,\tau)+\frac{\lambda}{2}\zeta\int_0^1 \varphi(\mu,\tau)\,d\mu\int_0^1 \frac{Z(\tau,\eta,\mu)}{\eta+\zeta}\,d\eta. \end{aligned} \tag{15}$$

Легко видеть, что внутренний интеграл в (15) можно преобразовать к виду

$$\varphi(r)\int_0^1 \frac{Z(\tau,\eta,\mu)}{\eta+\zeta}\,d\eta = \frac{\tilde{F}(\tau,\zeta)-\tilde{F}(\tau,\mu)}{\varphi(\zeta)(\zeta-\mu)}. \tag{16}$$

Для этого достаточно воспользоваться выражением (12), с учетом (13), (14), а также того, что $P(0,\eta)=\frac{\lambda}{4\pi}\varphi(\eta)$.

Для функции F известно [9, 15] также явное интегральное представление посредством функции $\varphi(\eta)$:

$$\tilde{F}(\tau,\zeta) = \frac{Ce^{-k\tau}\zeta}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)(1+k\zeta)} + \frac{\lambda}{2}\zeta\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}\,d\mu}{R(\mu)\varphi(\mu)(\mu+\zeta)}. \tag{17}$$

С учетом последнего нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{F}(\tau,\zeta)-\tilde{F}(\tau,\mu)}{\zeta-\mu} &= \frac{Ce^{-k\tau}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)(1+k\zeta)(1+k\mu)} + \\ &+ \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{\nu}}\,\nu\,d\nu}{R(\nu)\varphi(\nu)(\nu+\zeta)(\nu+\mu)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Теперь подставляя (18) в (16) и далее в (15), после небольших преобразований, получим следующие два выражения:

$$\varphi(\eta)\, a(\eta, \tau) = 1 + \frac{Ce^{-k\tau}\eta}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)(1+k\eta)}\, b\left(\frac{1}{k}, \tau\right) + \frac{\lambda}{2}\eta \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}\, b(\mu, \tau)\, d\mu}{R(\mu)\, \varphi(\mu)\, (\mu+\eta)}, \tag{19}$$

$$\varphi(\eta)\, b(\eta, \tau) = \frac{Ce^{-k\tau}\eta}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)(1+k\eta)}\, a\left(\frac{1}{k}, \tau\right) + \frac{\lambda}{2}\eta \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}\, a(\mu, \tau)\, d\mu}{R(\mu)\, \varphi(\mu)\, (\mu+\eta)}, \tag{20}$$

являющиеся основой для нахождения функций $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$.

3. *Решение основных уравнений*. Рассматривая выражения (19) и (20) как систему уравнений, можно попытаться сразу заняться ее численным решением методом последовательных приближений, что, в принципе, возможно, однако этот прямолинейный способ, по многим причинам, является далеко не лучшим путем нахождения функций $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$.

Другая возможность состоит в получении раздельных уравнений путем подстановки одного уравнения в другое. Получаемые при этом линейные интегральные уравнения являются весьма громоздкими, хотя ядро этих уравнений и удается сильно упростить (получается ядро со структурой левой части выражения (18)). К тому же в свободных членах присутствуют сразу два слагаемых, содержащих неизвестные множители $a\left(\frac{1}{k}, \tau\right)$ и $b\left(\frac{1}{k}, \tau\right)$, что сильно осложняет дело. По-видимому, лучший способ нахождения искомых функций состоит в следующем.

Составим сумму и разность этих функций и обозначим их через:

$$S(\eta, \tau) = a(\eta, \tau) + b(\eta, \tau) \quad \text{и} \quad H(\eta, \tau) = a(\eta, \tau) - b(\eta, \tau). \tag{21}$$

Далее, складывая и вычитая (19) и (20), для введенных сумм и разностей получим следующие раздельные линейные интегральные уравнения:

$$\varphi(\eta) S(\eta, \tau) = 1 + \frac{Ce^{-k\tau}\eta}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)(1 + k\eta)} S\left(\frac{1}{k}, \tau\right) + \frac{\lambda}{2}\eta \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}} S(\mu, \tau)\, d\mu}{R(\mu)\varphi(\mu)(\mu + \eta)} \tag{22}$$

и

$$\varphi(\eta) H(\eta, \tau) = 1 - \frac{Ce^{-k\tau}\eta}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)(1 + k\eta)} H\left(\frac{1}{k}, \tau\right) - \frac{\lambda}{2}\eta \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}} H(\mu, \tau)\, d\mu}{R(\mu)\varphi(\mu)(\mu + \eta)}. \tag{23}$$

На первый взгляд может показаться, что присутствие в правых частях величин $S\left(\frac{1}{k}, \tau\right)$ и $H\left(\frac{1}{k}, \tau\right)$ является серьезным препятствием при их решении, однако, как мы увидим, его удается легко устранить. Действительно, в силу линейности уравнений (22) и (23) их решения можно сразу записать в следующем виде:

$$\varphi(\eta) S(\eta, \tau) = u^{+}(\eta) + \frac{Ce^{-k\tau}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)} S\left(\frac{1}{k}, \tau\right) v^{+}(\eta) \tag{24}$$

и

$$\varphi(\eta) H(\eta, \tau) = u^{-}(\eta) - \frac{Ce^{-k\tau}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)} H\left(\frac{1}{k}, \tau\right) v^{-}(\eta), \tag{25}$$

где функции $u^{\pm}(\eta)$ и $v^{\pm}(\eta)$ (они, конечно же, зависят и от τ, но для удобства явную зависимость от этого аргумента будем опускать) удовлетворяют следующим линейным интегральным уравнениям:

$$u^{+}(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta \int_0^1 \frac{g(\mu) u^{+}(\mu)}{\mu + \eta} d\mu, \quad u^{-}(\eta) = 1 - \frac{\lambda}{2}\eta \int_0^1 \frac{g(\mu) u^{-}(\mu)}{\mu + \eta} d\mu \tag{26}$$

и

$$v^{+}(\eta)=\frac{\eta}{1+k\eta}+\frac{\lambda}{2}\eta\int_{0}^{1}\frac{g(\mu)\,v^{+}(\mu)}{\mu+\eta}\,d\mu,$$

$$v^{-}(\eta)=\frac{\eta}{1+k\eta}-\frac{\lambda}{2}\eta\int_{0}^{1}\frac{g(\mu)\,v^{-}(\mu)}{\mu+\eta}\,d\mu, \tag{27}$$

в которых «весовая» функция равна

$$g(\mu)=\frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{R(\mu)\,\varphi^{2}(\mu)}. \tag{28}$$

Проблема множителей $S\left(\frac{1}{k},\tau\right)$ и $H\left(\frac{1}{k},\tau\right)$ разрешается подстановкой в (24) и (25) $\eta=\frac{1}{k}$. В результате этого получим:

$$S\left(\frac{1}{k},\tau\right)=\frac{u^{+}\left(\frac{1}{k}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{Ce^{-k\tau}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}v^{+}\left(\frac{1}{k}\right)} \tag{29}$$

и

$$H\left(\frac{1}{k},\tau\right)=\frac{u^{-}\left(\frac{1}{k}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{Ce^{-k\tau}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}v^{-}\left(\frac{1}{k}\right)}. \tag{30}$$

Далее, складывая и вычитая выражения (24) и (25), получим окончательные выражения:

$$\varphi(\eta)\,a(\eta,\tau)=\frac{u^{+}(\eta)+u^{-}(\eta)}{2}+$$

$$+\frac{Ce^{-k\tau}}{2\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}\left[S\left(\frac{1}{k},\tau\right)v^{+}(\eta)-H\left(\frac{1}{k},\tau\right)v^{-}(\eta)\right] \tag{31}$$

и

$$\tau(\eta)\, b(\eta, \tau) = \frac{u^{+}(\eta) - u^{-}(\eta)}{2} +$$

$$+ \frac{Ce^{-k\tau}}{2\varphi\left(\frac{1}{k}\right)} \left[S\left(\frac{1}{k}, \tau\right) v^{+}(\eta) + H\left(\frac{1}{k}, \tau\right) v^{-}(\eta) \right]. \tag{32}$$

4. *О конкретной реализации полученных результатов*. В полученных выше формулах молчаливо предполагалось, что $\lambda \neq 1$ $(k \neq 0)$. Случай чистого рассеяния $(\lambda = 1,\ k = 0)$ будет рассмотрен ниже, а пока, считая что $\lambda \neq 1$, посмотрим, что дают нам полученные формулы.

Вычисления по формулам (29) и (30) предполагают знание величин $u^{\pm}\left(\frac{1}{k}\right)$ и $v^{\pm}\left(\frac{1}{k}\right)$. Их следует вычислять по формулам:

$$u^{+}\left(\frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{g(\mu)\, u^{+}(\mu)}{1 + k\mu}\, d\mu,$$

$$u^{-}\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{g(\mu)\, u^{-}(\mu)}{1 + k\mu}\, d\mu \tag{33}$$

и

$$v^{+}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k} + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{g(\mu)\, v^{+}(\mu)}{1 + k\mu}\, d\mu,$$

$$v^{-}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k} - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{g(\mu)\, v^{-}(\mu)}{1 + k\mu}\, d\mu, \tag{34}$$

т. е. достаточно знания этих функций лишь на интервале $0 \leqslant \eta < 1$.

Для нахождения функций $u^{\pm}(\eta)$ и $v^{\pm}(\eta)$ выпишем ряды Неймана, соответствующих им интегральных уравнений (26) и (27). Тогда:

$$u^{+}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\eta), \quad u^{-}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(\eta) \tag{35}$$

и

$$v^{+}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\eta), \quad v^{-}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v_n(\eta). \tag{36}$$

Заметим, что из (35) для величин, входящих в окончательные формулы (31) и (32), имеют место следующие равенства:

$$\frac{u^+(\eta)+u^-(\eta)}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}u_{2n}(\eta),\qquad \frac{u^+(\eta)-u^-(\eta)}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}u_{2n+1}(\eta). \tag{37}$$

Величины, как $u_n(\eta)$, так и $v_n(\eta)$, входящие в эти функциональные ряды, очевидно, можно находить из одной и той же интегральной рекурренты, но с разными начальными условиями

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}(\eta)=\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{g(\mu)\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}(\mu)}{\mu+\eta}d\mu, \tag{38}$$

$$u_0(\eta)=1,\quad v_0(\eta)=\frac{\eta}{1+k\eta}. \tag{39}$$

Ряды (35)—(37) сходятся чрезвычайно быстро, поскольку с ростом n величины u_n и v_n очень быстро стремятся к нулю. Это с очевидностью следует из (28) и (38), если только учесть лишь то, что при $\mu\in[0;1]$; $1\leqslant R(\mu)<\infty$ и $\varphi(\mu)\geqslant 1$.

Вычисления по формуле (38) не представляют никаких затруднений и после нахождения первых нескольких (в зависимости от требуемой точности) величин $u_n(\eta)$ и $v_n(\eta)$ на интервале $\eta\in[0;1]$ и в точке $\eta=\frac{1}{k}$ и соответствующих суммирований по формулам (35)—(37) следуют элементарные вычисления по формулам (31) и (32).

В заключение настоящего раздела отметим также, что при наличии истинного поглощения функции $v^+(\eta)$ и $v^-(\eta)$ можно явным образом выразить посредством функций $u^+(\eta)$ и $u^-(\eta)$. Однако вычислять их таким образом не очень выгодно, поскольку при этом, помимо некоторой громоздкости, возникает необходимость вычисления некоторых (четырех) интегралов (другое дело—случай чистого рассения, когда, как мы увидим ниже, эта связь, до тривиальности, простая). Эта возможность носит скорее всего принципиальный характер.

Из сказанного следует, что для полного аналитического решения проблемы переноса излучения в конечном слое (как это имеет место для полубесконечной среды) необходимо решить в явном виде лишь уравнения (26).

5. *Консервативное рассеяние.* Для астрофизических приложений наибольший интерес представляет случай консервативного или чистого рас-

сеяния. При этом для получения аналогичных результатов следует в полученных выше формулах совершить предельные переходы $\lambda \to 1 (k \to 0)$.

Функции $S\left(\frac{1}{k}, \tau\right)$ и $H\left(\frac{1}{k}, \tau\right)$, входящие в окончательные выражения (31) и (32), согласно определению (4) и (21), равны:

$$S\left(\frac{1}{k}, \tau\right) = 1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\mu, \tau)}{1 + k\mu} d\mu + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\psi(\mu, \tau)}{1 + k\mu} d\mu \tag{40}$$

и

$$H\left(\frac{1}{k}, \tau\right) = 1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\mu, \tau)}{1 + k\mu} d\mu - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\psi(\mu, \tau)}{1 + k\mu} d\mu. \tag{41}$$

Полагая в них $k=0$, $\lambda=1$, получим

$$\lim_{k \to 0} S\left(\frac{1}{k}, \tau\right) = \psi_0(\tau), \quad \lim_{k \to 0} H\left(\frac{1}{k}, \tau\right) = 0, \tag{42}$$

поскольку известно, что при чистом рассеянии $\varphi_0(\tau) + \psi_0(\tau) = 1$. Здесь φ_0 и ψ_0—нулевые моменты φ- и ψ-функций Амбарцумяна.

С учетом (42) выражения (31) и (32) запишутся в виде:

$$\varphi(\eta)\, a(\eta, \tau) = \frac{u^+(\eta) + u^-(\eta)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_0(\tau)\, v^+(\eta), \tag{43}$$

$$\varphi(\eta)\, b(\eta, \tau) = \frac{u^+(\eta) - u^-(\eta)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_0(\tau)\, v^+(\eta). \tag{44}$$

Здесь мы воспользовались также известным результатом

$$\lim_{\lambda \to 1} C/\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \sqrt{3}.$$

Функции $u^\pm(\eta)$ и $v^\pm(\eta)$ в рассматриваемом случае удовлетворяют следующим уравнениям:

$$u^+(\eta) = 1 + \frac{\eta}{2} \int_0^1 \frac{g(\mu)\, u^+(\mu)}{\mu + \eta} d\mu, \quad u^-(\eta) = 1 - \frac{\eta}{2} \int_0^1 \frac{g(\mu)\, u^-(\mu)}{\mu + \eta} d\mu \tag{45}$$

и

$$v^{+}(\eta)=\eta+\frac{\eta}{2}\int_{0}^{1}\frac{g(\mu)\,v^{+}(\mu)}{\mu+\eta}\,d\mu,\quad v^{-}(\eta)=\eta-\frac{\eta}{2}\int_{0}^{1}\frac{g(\mu)\,v^{-}(\mu)}{\mu+\eta}\,d\mu, \tag{46}$$

причем они связаны друг с другом следующим образом:

$$v^{+}(\eta)=\eta\frac{u^{-}(\eta)}{u^{-}(\infty)},\qquad v^{-}(\eta)=\eta\frac{u^{+}(\eta)}{u^{+}(\infty)}. \tag{47}$$

В этих выражениях:

$$u^{+}(\infty)=1+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}g(\mu)\,u^{+}(\mu)\,d\mu,$$

$$u^{-}(\infty)=1-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}g(\mu)\,u^{-}(\mu)\,d\mu. \tag{48}$$

Получение результата (47) тривиально и сводится к применению следующего стандартного приема: к множителю η в (45) прибавляется и отнимается величина μ, затем, после почленного деления на $\mu+\eta$ и умножения на η, получившиеся уравнения сравниваются с (46).

Вычисления по формулам (43) и (44) подразумевают и знание нулевого момента ψ-функции Амбарцумяна. Для ее нахождения обратимся к формуле (29), откуда, с учетом (42), следует

$$\psi_0(\tau)=u^{+}(\infty)/X, \tag{49}$$

где $u^{+}(\infty)$ дается первой из формул (48), а через X обозначено

$$X=\lim_{k\to 0}\left[\varphi\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{Ce^{-k\tau}}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}\,v^{+}\left(\frac{1}{k}\right)\right]. \tag{50}$$

Для нахождения этого предела воспользуемся уравнением для функции Амбарцумяна, полученным в [16], которое, кстати, следует и из (22) при $\tau=0$ (для чистого рассеяния оно было найдено В. Г. Буславским [17])

$$\varphi(\eta)=1+\frac{C\eta}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)\left(1+k\eta\right)}+\frac{\lambda}{2}\eta\int\limits_0^1\frac{d\mu}{R(\mu)\,\varphi(\mu)\,(\mu+\eta)}. \tag{51}$$

Полагая в нем $\eta=\frac{1}{k}$ и устремив $k\to 0$ легко видеть, что

$$\lim\left[\varphi\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{Ce^{-k\tau}}{2k\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}\right]=1+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{d\mu}{R(\mu)\,\varphi(\mu)}. \tag{52}$$

Кроме того, воспользовавшись разложениями (при малых k) $e^{-k\tau}=1-$ $-k\tau+\ldots$ и

$$v^+\left(\frac{1}{k}\right)\approx\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 g(\mu)\,v^+(\mu)\,d\mu-\frac{k}{2}\int\limits_0^1\ldots\;, \tag{53}$$

следующим из (33), а также известным из теории результатом

$$1+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{d\mu}{R(\mu)\,\varphi(\mu)}=\sqrt{3}\,q(\infty), \tag{54}$$

после небольших выкладок, получим

$$X=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[2q(\infty)+\tau-2I(\tau)\right]. \tag{55}$$

Здесь $q(\infty)$—значение функции Хопфа на бесконечности, а через $I(\tau)$ обозначено интегральное слагаемое правой части (53), которое, в силу (47), можно записать посредством функции $u^-(\eta)$ в виде

$$I(\tau)=\frac{1}{2u^-(\infty)}\int\limits_0^1 g(\mu)\,\mu u^-(\mu)\,d\mu, \tag{56}$$

а окончательное выражение для $\psi_0(\tau)$ будет выглядеть так:

$$\psi_0(\tau)=\frac{2u^+(\infty)}{\sqrt{3}\left[2q(\infty)+\tau-2I(\tau)\right]}. \tag{57}$$

Любопытно сравнить полученное точное выражение для $\psi_0(\tau)$ с ее известным асимптотическим выражением (для оптически толстого слоя)

$$\psi_0^{as}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{3}\,[2q(\infty) + \tau]}.$$

Такое сравнение дает возможность как для оценки точности асимптотических формул, так и для получения тонких критериев для области их применения.

Таким образом, в случае чистого рассеяния, поэтапное нахождение функций $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$ сводится к следующей процедуре. Вначале находятся несколько (в зависимости от требуемой точности) величин u_n из интегральной рекурренты

$$u_{n+1}(\eta) = \frac{1}{2}\,\eta \int\limits_0^1 \frac{g(\mu)\,u_n(\mu)}{\mu + \eta}\,d\mu \tag{58}$$

с начальным условием $u_0(\eta) = 1$. Далее, строятся функциональные ряды:

$$u^+(\eta) = 1 + u_1(\eta) + u_2(\eta) + \ldots, \quad u^-(\eta) = 1 - u_1(\eta) + u_2(\eta) - \ldots \tag{59}$$

$$\begin{aligned} \frac{u^+(\eta) + u^-(\eta)}{2} &= 1 + u_2(\eta) + u_4(\eta) + \ldots, \\ \frac{u^+(\eta) - u^-(\eta)}{2} &= u_1(\eta) + u_3(\eta) + u_5(\eta) + \ldots \end{aligned} \tag{60}$$

и после вычисления интегралов по формулам (48) и (56) находятся величины $u^{\pm}(\infty)$ и $I(\tau)$, а величина $v^{\pm}(\eta)$ из (47). В конце, после построения величины $\psi_0(\tau)$ по формуле (57), следуют вычисления по формулам (43) и (44).

Следует отметить, что при чистом рассеянии сходимость функциональных рядов (59), (60) примерно такая же, как и в случае рассеяния с истинным поглощением, ибо малая норма ядер интегральных уравнений (26), (27), (45), (46) (или рекуррент (38), (58)) обусловлена отнюдь не величиной λ, а прежде всего весовой функцией $g(\mu)$.

6. *Изотропное рассеяние с учетом частотного перераспределения.* Случай рассеяния монохроматического излучения, с точки зрения астрофизических приложений, представляет ограниченный интерес. При исследовании таких актуальных для астрофизики задач, как образование

спектральных линий, очевидно, необходимо учитывать частотное перераспределение. Полученные выше результаты легко распространяются на, так называемый, случай полного перераспределения по частоте (ППЧ). Этого, разумеется, следовало ожидать, поскольку почти все результаты, полученные для монохроматического рассеяния, имеют свои аналоги для (ППЧ) (см. работы В. В. Иванова [18, 19]).

В рассматриваемом случае явное выражение резольвентной функции конечного слоя имеет вид

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{e^{-\frac{\tau}{z}} a(z, \tau) - e^{-\frac{\tau_0-\tau}{z}} b(z, \tau)}{zR(z)} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) dz, \qquad (6.1)$$

в котором:

$$a(z, \tau) = 1 - \frac{\lambda}{2} z \int\limits_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{X(z', \tau)}{z'+z} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) dz',$$

$$b(z, \tau) = \frac{\lambda}{2} z \int\limits_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{Y(z', \tau)}{z'+z} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) dz', \qquad (6.2)$$

$R(z) = T^2(z, \beta) + \left[\frac{\lambda\pi z}{2} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right)\right]^2$, остальные обозначения идентичны обозначениям в [18]. Интегральное представление (6.1) можно получить разными способами, например, решив основное интегральное уравнение теории переноса для резольвентной функции конечного слоя методом, развитым в [12] (кстати, этот метод уже нами применялся в аналогичной задаче при анизотропном рассеянии [20]), однако проще всего воспользоваться явным выражением $\Phi^{\infty}(\tau)$—резольвентной функции бесконечной среды, полученной Д. И. Нагирнером [21] и, подставив в выражение, связывающее $\Phi^{\infty}(\tau)$ с $\Phi(\tau, \tau_0)$ (см. [18, 19]), провести интегрирование по оптической глубине аналитически.

Функции $a(z, \tau)$ и $b(z, \tau)$, посредством которых явно выражаются не только $\Phi(\tau, \tau_0)$, но любая характеристика поля излучения, можно найти изложенным выше методом, руководствуясь, при этом вероятностным толкованием характеристик поля излучения, выявленным В. В. Ивановым в [19].

Ниже мы приведем лишь узловые формулы без их выводов (совершенно идентичных таковым для монохроматического рассеяния):

$$H(z) = X(z, \tau) + \int_0^{\frac{1}{\beta}} Z(\tau, z, z')\, Y(z', \tau)\, G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) dz',$$

$$\frac{4\pi}{\lambda} P(\tau, z) = Y(z, \tau) + \int_0^{\frac{1}{\beta}} Z(\tau, z, z')\, X(z', \tau)\, G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) dz'. \tag{6.3}$$

Здесь

$$Z(\tau, z, z') = z\,\frac{2\pi P(\tau, z) + \frac{\lambda}{2} H(z)\,\tilde{F}(\tau, z')}{z+z'},$$

$$\tilde{F}(\tau, z) = zH(z)\int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{2\pi P(\tau, z')}{z'+z}\, G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) dz'. \tag{6.4}$$

Явное выражение $\tilde{F}$ посредством H-функции имеет вид:

$$\tilde{F}(\tau, z) = \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{e^{-\frac{\tau}{z'}} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right)}{R(z')\, H(z')\,(z+z')}\, dz'. \tag{6.5}$$

С использованием (6.3)—(6.5) получаются следующие основные выражения для функций $a(z, \tau)$ и $b(z, \tau)$:

$$H(z)\, a(z, \tau) = 1 + \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{e^{-\frac{\tau}{y}}\, b(y, \tau)\, G\left(\frac{y}{1-\beta y}\right)}{R(y)\, H(y)\,(y+z)}\, dy \tag{6.6}$$

и

$$H(z)\, b(z, \tau) = \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{e^{-\frac{\tau}{y}}\, a(y, \tau)\, G\left(\frac{y}{1-\beta y}\right)}{R(y)\, H(y)\,(y+z)}\, dy. \tag{6.7}$$

Введем обозначения

$$H(z)\,[a(z,\tau)+b(z,\tau)]=u^{+}(z),\quad H(z)\,[a(z,\tau)-b(z,\tau)]=u^{-}(z) \tag{6.8}$$

и

$$g(y)=\frac{e^{-\frac{\tau}{y}}\,G\left(\frac{1}{1-\beta y}\right)}{R(y)\,H^{2}(y)}. \tag{6.9}$$

Величины $u^{+}(z)$ и $u^{-}(z)$ (они, как и весовая функция $g(y)$, конечно же зависят от оптической толщины, однако явную зависимость от нее будем опускать), как это следует из (6.6) и (6.7), должны удовлетворять следующим раздельным линейным интегральным уравнениям:

$$u^{+}(z)=1+\frac{\lambda}{2}z\int\limits_{0}^{\frac{1}{\beta}}\frac{u^{+}(y)\,g(y)}{y+z}\,dy \tag{6.10}$$

и

$$u^{-}(z)=1-\frac{\lambda}{2}z\int\limits_{0}^{\frac{1}{\beta}}\frac{u^{-}(y)\,g(y)}{y+z}\,dy. \tag{6.11}$$

Выписав ряды Неймана этих уравнений замечаем, что в окончательные выражения искомых функций будут входить лишь последовательные приближения уравнения (6.10).

$$\begin{aligned} a(z,\tau)&=\frac{1}{H(z)}\,[1+u_{2}(z)+u_{4}(z)+\ldots],\\ b(z,\tau)&=\frac{1}{H(z)}\,[u_{1}(z)+u_{3}(z)+u_{5}(z)+\ldots]. \end{aligned} \tag{6.12}$$

соответственно, четные и нечетные члены ряда. Другими словами, для нахождения функций $a(z,\tau)$ и $b(z,\tau)$ нет необходимости в нахождении двух функций $u^{+}(z)$ и $u^{-}(z)$, а достаточно лишь найти величины $u_{n}(z)$ с помощью интегральной рекурренты

$$u_{n+1}(z)=\frac{\lambda}{2}z\int\limits_{0}^{\frac{1}{\beta}}\frac{u_{n}(y)\,g(y)}{y+z}\,dy. \tag{6.13}$$

с начальным условием $u_{0}(z)=1$.

Как видим, формулы, полученные с учетом частотного перераспределения, формально выглядят проще, по сравнению с таковыми при монохроматическом рассеянии. Очевидно, что это вызвано отсутствием полюсных членов в явных выражениях резольвентных функций, т. к. при частотном перераспределении характеристическая функция $T\left(\frac{1}{s}, \beta\right)$ не имеет корней в комплексной плоскости (Д. И. Нагирнер, 1966; не опубликовано) [18, 22].

7. *Заключение*. Результаты, полученные выше, в совокупности с полученными нами ранее в [1], позволяют довольно простыми средствами находить характеристики поля излучения в среде конечной оптической толщины. Это стало возможным, в первую очередь, благодаря введению функций $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$ и выявлению их роли в теории переноса излучения, а также получению для сопутствующих им функций u^+ и u^- раздельных, линейных, быстросходящихся интегральных уравнений.

Методика, предлагаемая нами для решения задач переноса излучения в конечном слое, состоит из трех этапов. Вначале вычисляется функция Амбарцумяна (или ее обобщения) для полубесконечной среды. На втором этапе, изложенным выше методом, находятся функции $a(\eta, \tau)$ и $b(\eta, \tau)$ для слоя толщины τ. И, наконец, с помощью явных выражений [1], путем осуществления одной или двух квадратур по угловой переменной, находятся искомые величины. Для аналогичных задач рассеяния в полубесконечной среде второй этап выпадает (точнее, совпадает с первым).

В настоящее время вычисление функции Амбарцумяна не является проблемой, поскольку для нее известны явное интегральное представление [23], четыре качественно различных уравнения [2, 16, 24, 25], не считая их модификаций. Вопрос состоит лишь в выборе способа, позволяющего находить ее значения быстро и с большой точностью, поскольку она, будучи исходной, участвует в дальнейших интегрированиях. Видимо, выяснению этого вопроса следует посвятить отдельное исследование.

Что касается расширения круга задач с привлечением для их решения методики, разработанной в [1] и в настоящей статье, то нам оно видится для случаев анизотропного рассеяния и с частичным перераспределением по частоте в спектральной линии.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность О. В. Пикичяну за переработку первоначального варианта статьи и неоднократные обсуждения по существу.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

ON THE STUDY OF ISOTROPIC SCATERING IN THE PLANE SLAB. THE METHOD OF SEPARATED LINEAR INTEGRAL EQUATIONS

E. KN. DANIELIAN

In one of the author's papers [1] exact integral representations for the basic characteristics of the field of diffuse radiation in the slab with finite optical thickness have been obtained by means of some functions $a(\eta, \tau)$ and $b(\eta, \tau)$. In the present paper, which is the logical continuation of [1] it has been shown that for the determination of these functions it is sufficient to solve only two separated, fast-convergent, linear integral equations with very simple structure of the kernel.

The case of isotropic, monochromatic scattering, as well as of complete redistibution one over the frequency in the spectral line are considered. The case of conservative scattering is considered in detail. The obtained analytical results considerably simplify the analysis and the numerical solution of the problems of transfer theory in the finite slab.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Х. Дниелян*, Астрофизика, 19, 335, 1983.
2. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, Ереван, 1960.
3. *С. Д. Гутшабаш*, Вестн. ЛГУ, № 1, 158, 1957.
4. *T. W. Mullikin*, Proc. Interdisciplinary Conference Electromagnetic Scattering, Univ. Massachusets, 1965, p. 697.
5. *H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba*, Astrophys. J., 147, 301, 1967.
6. *Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюракан. обсерв., 46, 101, 1975.
7. *Э. Х. Даниелян*, Астрофизика, 12, 579, 1976.
8. *Э. Г. Яновицкий*, Докл. АН СССР, 227, 1319, 1976.
9. *Э. Х. Даниелян, О. В. Пикичян*, Астрофизика, 13, 275, 1977.
10. *О. В. Пикичян*, Астрофизика, 14, 169, 1978.
11. *И. Н. Минин*, Докл. АН СССР, 120, 63, 1958.
12. *Н. Н. Роговцов, А. М. Самсон*, Ж. прикладн. спектроскоп., 25, 512, 1976.
13. *В. В. Соболев*, Докл. АН СССР, 69, № 3, 353, 1949.
14. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
15. *Р. Р. Андреасян*, Сообщ. Бюракан. обсерв., 50, 79, 1978.
16. *Р. Р. Андреасян, Э. Х. Даниелян*, Сообщ. Бюракан. обсерв., 50, 114, 1978.
17. *В. Г. Буславский*, Изв. Крым. обсерв., 35, 81, 1966.
18. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
19. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 41, 44, 1964.

20. *Э. Х. Даниелян*, Астрофизика, 19, 711, 1983.

21. *Д. И. Нагирнер*, Астрон. ж., 41, 669, 1964.

22. *Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович*, Астрофизика, 3, 459, 1967.

23. *В. А. Фок*, Матем. сб., 14, 1—2, 3, 1944.

24. *В. В. Соболев*, Докл. АН СССР, 61, № 5, 803, 1948.

25. *К. М. Кейз, П. Ф. Цвайфель*, Линейная теория переноса. Мир, М., 1972.