УДК 524.7—33

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Т. Г. АРШАКЯН

Поступила 8 апреля 1991

Принята к печати 15 сентября 1991

Уравнения, описывающие пространственные модели некоторых аксиально-симметричных распределений, аналитически разрешены относительно неизвестных коэффициентов (т. е. получена линейная связь между параметрами модели). Это разрешение позволяет использовать метод наименьших квадратов, определить наилучшие параметры, описывающие данные модели. Этими моделями описывается широкий класс параметров астрономических объектов, имеющих анизотропное распределение в пространстве.

1. *Введение.* Во многих работах [1—4] при исследовании крупномасштабной анизотропии Метагалактики были предложены модели, для которых различными статистическими методами обрабатывались наблюдательные данные внегалактических объектов (галактик, радиогалактик и скоплений галактик). При этом применение метода проб и ошибок для некоторых математических моделей, параметры которых связаны нелинейным образом, дает возможность выбрать из многих направлений то, для которого параметры модели имеют наименьшие дисперсии. Параметры, определенные таким образом, могут отличаться от истинных значений, так как для системы нелинейных уравнений, при приближенной их линейризации, на отдельных участках возникают погрешности. Поэтому желательно представить уравнение модели в линейном виде. Это представление удобно тем, что позволяет получить линейную связь между параметрами модели.

В настоящей работе показана возможность аналитического разрешения параметров уравнений, задающих простые пространственные геометрические фигуры.

2. Уравнение гиперплоскости для некоторых аксиально-симметричных пространственных моделей. В этом параграфе мы будем рассматривать замкнутые аксиально-симметричные фигуры. В полярных координатах они описываются функциями, симметричными относительно полярной оси, с точкой отсчета наблюдателя, находящейся внутри фигуры на полярной оси (в дальнейшем вместо слов «точка отсчета наблюдателя» будем говорить «полюс» и вместо «фигура» — «модель»).

Уравнение, задающее пространственную модель, можно представить как функцию относительно двух переменных (полярный радиус ρ_i и полярный угол φ_i , $i = 1, \dots, N$, где N — некоторое число точек, принадлежащих кривой, описывающей модель). Пространственный вид модели дается вращением кривой функции относительно полярной оси, где последнее указывает направление пространственной ориентации (или же анизотропии) модели в выбранной системе координат.

Для определения наиболее вероятных параметров модели, уравнение, задающее модель, приводится к уравнению гиперплоскости (т. е. к уравнению поверхности многомерного пространства), после чего последнее, при числе наблюдательных данных большем, чем число неизвестных параметров, обрабатывается методом наименьших квадратов (м.н.к.).

Предположим, в сферической системе координат из наблюдений N объектов с координатами (l_i, b_i) получили некоторое пространственное распределение параметров (физических или геометрических) y_i , где $i = 1, \dots, N$.

Для описания распределения этих параметров выберем математическую модель, которая описывается в полярных координатах функцией, симметричной относительно полярной оси

$$y_i = T \cos \varphi_i + Z, \quad (1)$$

где φ_i — угол между осью анизотропии (полярной осью) и направлением наблюдаемых объектов. Неизвестными параметрами этой модели являются T , Z и направление анизотропии с координатами (l_0, b_0) .

Известно, что уравнение $y_i = T \cos \varphi_i$ (2) сводится к линейному виду [1] следующим образом. Косинус угла между осью анизотропии и направлением на наблюдаемые объекты представляется в виде

$$\begin{aligned} \cos \varphi_i = & \cos l_0 \cos b_0 \cos l_i \cos b_i + \sin l_0 \cos b_0 \sin l_i \cos b_i + \\ & + \sin b_0 \sin b_i. \end{aligned} \quad (2)$$

После подстановки этого выражения в (2) и применения обозначений

$$\begin{aligned} A_{1i} &= \cos l_i \cos b_i, & X_1 &= T \cos l_0 \cos b_0, \\ A_{2i} &= \sin l_i \cos b_i, & X_2 &= T \sin l_0 \cos b_0, \\ A_{3i} &= \sin b_i, & X_3 &= T \sin b_0 \end{aligned} \quad (3)$$

уравнение (2) переписется в виде $y_i = \sum_{k=1}^3 A_{ki} X_k$.

По аналогии с изложенным выше легко заметить, что уравнение (1) запишется в виде

$$y_i = \sum_{k=1}^3 A_{ki} X_k + Z. \quad (4)$$

Из этих N линейно-независимых уравнений, после применения м.н.к., получим систему нормальных уравнений, линейных относительно неизвестных коэффициентов (X_1, X_2, X_3, Z). Разрешив эти коэффициенты, определим параметры модели из соотношений (как это следует из (3))

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, & l_0 &= \arctg \left(\frac{X_2}{X_1} \right), \\ Z &= Z, & b_0 &= \arcsin \left(\frac{X_3}{T} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (1) является более общим, чем (2), поэтому оно более точно описывает форму возможной анизотропии. Модель, заданная уравнением (1), более подходящая для статистической обработки различных параметров, так как модель (2) принципиально неприемлема для таких наблюдаемых параметров, как, например, красные смещения и сжатия галактик.

При $T=Z$ уравнение (1) описывает фигуру вращения кардионды, при $T \neq Z$, фигуру вращения «улитки Паскаля». К уравнению (1) можно свести другие уравнения, задающие некоторые простые геометрические модели.

а) Модель сферы со смещенным полюсом на произвольном расстоянии от центра симметрии.

Запишем уравнение сферы радиуса R с полюсом, смещенным на расстояние ρ_0 от центра в полярных координатах, в виде

$$\rho_i^2 = 2\rho_i \rho_0 \cos \varphi_i + (R^2 - \rho_0^2), \quad (6)$$

где ρ_i — значения полярного радиуса.

Неизвестными параметрами модели являются $R, \rho_0, (l_0, b_0)$.

Нетрудно заметить, что при обозначениях

$$\rho_i^2 = y_i, \quad R^2 - \rho_0^2 = Z, \quad \rho_0 = T$$

уравнение (6) подобно (1). Поэтому уравнение гиперплоскости для (6) запишется в виде:

$$\rho_i^2 = 2 \sum_{k=1}^3 (\rho_i A_{ki}) X_k + Z.$$

Тогда наимвероятные параметры смещенной сферы R, ρ_0 и направление анизотропии (l_0, b_0) определяется из соотношений (5) и

$$\rho_0 = T, \quad R = \sqrt{Z + T^2}.$$

б) Модель вытянутого эллипсоида вращения с полюсом в фокусе.

Эта модель задается уравнением смещенного эллипса с большой a и малой b полуосями, где полюс—фокус эллипса, полярная ось—большая полуось эллипса, направление анизотропии совпадает с направлением наибольшего полярного радиуса

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{a}{b^2} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \cos \varphi_i. \quad (7)$$

Искомыми параметрами этой модели являются a, b и (l_0, b_0) .

При обозначениях

$$\frac{a}{b^2} = Z, \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} = T, \quad \frac{1}{\rho_i} = y_i$$

уравнение (7) идентично (1), следовательно

$$y_i = Z - \sum_{k=1}^3 A_{ki} X_k.$$

Тогда направление анизотропии определится из выражений (5), а большая и малая полуоси эллипсоида—из соотношений

$$a = \frac{Z}{Z^2 - T^2}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{Z^2 - T^2}}.$$

Зная величины полуосей, определим смещение полюса эллипсоида от центра

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

2. Рассмотрим математическую модель, которая задается уравнением более общего типа

$$f(y_i) = G(y_i) \cdot T \cos \varphi_i + Z, \quad (8)$$

где f и G —известные функции от наблюдаемого параметра.

В частности, при $f = y_i$, $G = 1$ уравнение (8) совпадает с уравнением (1), при $f = y_i^2$, $G = y_i$ —описывает модель сферы со смещенным полюсом на произвольном расстоянии от центра, при $f = \frac{1}{y_i}$, $G = 1$ —описывает модель вытянутого эллипсоида вращения с полюсом в фокусе.

Запишем уравнение (8) в линейном виде

$$f(y_i) = \sum_{k=1}^3 S_{ki} X_k + Z, \quad (9)$$

где $S_{ki} = G(y_i) \cdot A_{ki}$.

Имея конкретный вид функций f и G сможем определить искомые параметры модели, применив м.н.к. к уравнению (9).

В работе Андреасяна [1] величина наблюдаемого параметра состоит из композиции двух, ориентированных в различных направлениях, диполей. Там же показано, что уравнение, описывающее такое распределение, приводится к линейному виду. Здесь мы обобщим этот результат для уравнения общего типа (8).

Предположим, что функция $F(y_i)$ состоит из композиции d различных моделей, описываемых уравнением (8):

$$F(y_i) = \sum_{\alpha=1}^d f_{\alpha}(y_i), \quad (10)$$

где $f_{\alpha}(y_i) = G_{\alpha}(y_i) T_{\alpha} \cos \varphi_{i\alpha} + Z_{\alpha}$,

α —индекс для обозначения различных моделей.

Преобразуем уравнение (10) к линейному виду

$$F(y_i) = \sum_{\alpha=1}^d \left(\sum_{k=1}^3 G_{\alpha}(y_i) A_{ki} X_k + Z_{\alpha} \right).$$

Применяя к последнему м.н.к., находим неизвестные коэффициенты X_{11} , X_{21} , X_{31} , ..., X_{1d} , X_{2d} , X_{3d} , а затем из формул (5) находим наиболее вероятные параметры $(T_a, Z_a, (l_{0a}, b_{0a}))$ для каждой модели, соответственно.

В области астрономии эти модели могут применяться для описания анизотропных распределений Галактики и Метагалактики. Моделью (1) описываются: дипольная анизотропия микроволнового фона; крупномасштабная, оптическая и галактик IRAS дипольная анизотропия, образуемая разными выборками внегалактических объектов. Упрощенной моделью (10) в работе [1] описаны меры вращений, обусловленные магнитными полями Галактики и Метагалактики. Модель в подразделе (а) может применяться к отдельным скоплениям галактик и звезд.

Наличие анизотропной и изотропной составляющих в моделях (1), (8) и (10) дает возможность физически интерпретировать полученные результаты. Дисперсии параметров моделей могут служить критерием для выбора наиболее вероятной модели, если модель не выбрана заранее по каким-либо физическим соображениям.

Статистическая обработка некоторых наблюдательных данных по модели (1) проведена в работе [5].

Готовятся к публикации результаты, полученные по модели (4) о крупномасштабной пространственной ориентации больших осей протяженных двойных радиисточников типа FR II (по классификации Фонарова и Рили [6]).

Автор выражает благодарность Р. Р. Андреасяну, М. А. Мнацаканяну и А. А. Бегларяну за обсуждение результатов и полезные замечания.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PARAMETERS OF SOME MODELS OF AXIAL-SYMMETRIC DISTRIBUTION

D. G. ARSHAKYAN

In this article we have managed to solve analytically the equations, which produce some axial-symmetric spatial models, concerning the unknown coefficients (that is, we have managed to get the linear connection between parameters of the model). This solution gave us the possibility to calculate the most probable parameters of the given models with the help of the least squares fitting method. By these models a wide range of observed parameters or astronomical objects having the anisotropic distribution in the space is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Р. Андреасян, *Астрофизика*, 24, 363, 1986.
2. P. Birch, *Nature*, 298, 451, 1982.
3. D. G. Kendall, G. A. Young, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 207, 637, 1984.
4. А. В. Манджос, А. Я. Трезуб, И. Ю. Изотова, В. В. Тельнюк-Адамчук, *Астрофизика*, 26, 321, 1987
5. Р. Р. Андреасян, Т. Г. Аршакян, А. Н. Макаров, М. А. Мнацаканян, *Материалы VII Всесоюзной конференции по проблемам теории относительности и гравитации*, Ереван, 1988, 398—400
6. B. L. Fanaroff, J. M. Riley, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 167, 31, 1974..