АСТРОФИЗИКА

ТОМ 35 ОКТЯБРЬ—ДЕКАБРЬ, 1991 ВЫПУСК 2, 3

УДК 524.728

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗВЕЗДНЫХ ДИСКОВ

II. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С КВАДРАТИЧНЫМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г. С. БИСНОВАТЫЙ-КОГАН

Поступила 2 июля 1991

Исследована устойчивость эллиптических галактических дисков в двойных системах и в однородном гало. Рассматривалось распределение плотности, дающее квадратичный гравитационный потенциал. При учете приливных сил в паре и в однородном гало квадратичность остается. Рассматривались квадрупольные и дипольные возмущения. Получено, что в эллипсоидальном гало возможна дипольная неустойчивость. В паре эллиптические диски могут быть сжатыми и вытянутыми относительно компаньона. Квадрупольные возмущения дисков в паре с компаньоном малой массы устойчивы при медленном вращении в вытянутых, при быстром вращении в сжатых эллипсах. Для квадрупольных возмущений дисков в двойных системах и в сфероидальном гало построены области различных типов неустойчивости для разных масс, расстояний между компаньонами и отношений полуосей диска.

1. *Введение*. Решения для эллиптических звездных дисков с квадратичным гравитационным потенциалом (КГП), полученные в [1], были обобщены в приливном приближении на случай двойных систем, а также на случай однородного гало эллипсоидальной формы [2, 3]. Было показано, что в двойных системах возможно существование вытянутых и сжатых дисков вдоль оси, соединяющей центры галактик. Аналогичные фигуры возникают в модели Роша из несжимаемой жидкости при наличии внутренних движений [4]. Устойчивость одиночных эллиптических дисков была исследована в работе [5] методом, предложенным в [6]. В статье [7], являющейся первой частью данной работы, исследована устойчивость уравновешенных эллиптических дисков в двойных системах и при наличии сфероидального гало. При этом использовался метод работы [8] (см. также [9]). В уравновешенных дисках по одной из осей центробежная сила уравновешивает суммарную силу гравитации.

В настоящей работе исследуется устойчивость относительно дипольных и квадрупольных возмущений КГП дисков в двойных системах и при наличии сфероидального гало в общем случае. Небольшая часть результатов исследования устойчивости общих КГП дисков в двойных системах опубликована в [10].

2. *Равновесные решения.* Рассматриваются диски с распределением поверхностной плотности

$$\sigma_d = \sigma_0[1-(x^2/\alpha^2)-(y^2/\beta^2)]^{1/2}. \quad \alpha > \beta \tag{2.1}$$

Собственный гравитационный потенциал такого диска есть

$$\Phi_d = a_0x^2 + b_0y^2 - 1.5(a_0\alpha^2 + b_0\beta^2), \tag{2.2}$$

где [1]

$$a_0 = 1.5GM[F(k) - E(k)]/[\alpha(\alpha^2-\beta^2)],$$

$$b_0 = 1.5\,\alpha\,GM[E(k) - (1-k^2)F(k)]/[\beta^2(\alpha^2-\beta^2)],$$

$$k^2 = 1-(\beta^2/\alpha^2), \quad M = 2/3\pi\sigma_0\alpha\beta, \tag{2.3}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi, \quad F(k) = \int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,d\varphi.$$

Если диск погружен в однородное эллипсоидальное гало, то суммарный гравитационный потенциал примет вид

$$\Phi_0 = \Phi_d + h_xx^2 + h_yy^2. \tag{2.4}$$

Для сфероидального гало имеем $h_x = h_y$. В двойной системе, состоящей из диска массы M и галактики—компаньона массы M_2, равновесная скорость вращения в первом приближении равна кеплеровской

$$\Omega = [G(M+M_2)/r_{12}^3]^{1/2} \equiv \Omega_k. \tag{2.5}$$

Гравитационный потенциал диска в двойной системе с учетом приливных сил без учета нормировки есть

$$\Phi_0 = ax^2 + by^2, \tag{2.6}$$

где [2, 3]

$$a = a_0 + 1/2GM_2/r_{12}^3, \quad b = b_0 - GM_2/r_{12}^3 \tag{2.7}$$

для сжатого диска,

$$a = a_0 - GM_2/r_{12}^3, \quad b = b_0 + 1/2GM_2/r_{12}^3 \tag{2.8}$$

для вытянутого диска. Решение, описывающее равновесие КГП диска имеет вид [1—3] (см. также [11])

$$f_0 = (\sigma_0 \alpha\beta/2\pi\sqrt{A})\,[(2a-\Omega^2)(2b-\Omega^2)]^{1/2}\{A\,[1-(x^2/\alpha^2)- (y^2/\beta^2)] - (2b-\Omega^2)\,\beta^2(v_x+2\Omega d_2 y/\beta^2)^2 - (2a-\Omega^2)\,\alpha^2(v_y - 2\Omega d_2 x/\alpha^2)^2\}^{-1/2}, \tag{2.9}$$

где

$$d_2 = -1/2\,[\alpha^2(2a-\Omega^2) - \beta^2(2b-\Omega^2)]/(a-b), \tag{2.10}$$

$$A = (2a-\Omega^2)\,(2b-\Omega^2)\,\{\alpha^2\beta^2 - \Omega^2(\alpha^2-\beta^2)\,[\alpha^2(2a-\Omega^2) - \beta^2(2b-\Omega^2)]/(a-b)^2\}.$$

Функция распределения f_0 в (2.9) равна нулю при отрицательных значениях под корнем и имеет нормировку

$$\int f dv = \sigma_d = \sigma_0[1-(x^2/\alpha^2)-(y^2/\beta^2)]^{1/2}. \tag{2.11}$$

Решение (2.9) имеет смысл при выполнении неравенств

$$\Omega^2 \leqslant 2a, \quad \Omega^2 \leqslant 2b; \qquad A \geqslant 0, \text{ т. е.}$$

$$\alpha^2\beta^2 - \Omega^2(\alpha^2-\beta^2)\,[\alpha^2(2a-\Omega^2) - \beta^2(2b-\Omega^2)]/(a-b)^2 \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Кроме того, необходимым является условие применимости приливного приближения

$$\alpha \ll r_{12}. \tag{2.13}$$

Учет влияния приливных сил на угловую скорость вращения галактик в паре рассмотрен в [12, 13].

3. *Кинетическое уравнение для возмущений и невозмущенные траектории.* Следуя [8], представим возмущенную функцию в виде

$$f = (\sigma_0\alpha\beta/2\pi\sqrt{A})\,[(2a-\Omega^2)(2b-\Omega^2)]^{1/2}\{A\,[1-(x^2/\alpha^2)-(y^2/\beta^2)] - (2b-\Omega^2)\,\beta^2\cdot(v_x+2\Omega d_2 y/\beta^2)^2 - (2a-\Omega^2)\,\alpha^2(v_y - 2\Omega d_2 x/\alpha^2)^2 - \chi\}^{-1/2}\,\theta\,\{A\,[1-(x^2/\alpha^2)-(y^2/\beta^2)] - (2b - \Omega^2)\,\beta^2(v_x+2\Omega d_2 y/\beta^2)^2 - (2a-\Omega^2)\,\alpha^2(v_y-2\Omega d_2 x/\alpha^2)^2 - \chi\},$$

$$\theta(x) = 1 \quad \text{при} \quad x > 0, \qquad = 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \tag{3.1}$$

Кинетическое уравнение для возмущенной функции f имеет вид

$$\partial f/\partial t + v_x \partial f/\partial x + v_y \partial f/\partial y + (\Omega^2 x + 2\Omega v_y - \partial\tilde{\Phi}/\partial x)\, \partial f/\partial v_x +$$

$$+ (\Omega^2 y - 2\Omega v_x - \partial\tilde{\Phi}/\partial y)\cdot \partial f/\partial v_y = 0. \tag{3.2}$$

Возмущенный потенциал

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 + \Phi. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.1) в (3.2), получаем уравнение для возмущения χ

$$\partial\chi/\partial t + v_x \partial\chi/\partial x + v_y \partial\chi/\partial y + (\Omega^2 x + 2\Omega v_y - 2ax)\, \partial\chi/\partial v_x +$$
$$+ (\Omega^2 y - 2\Omega v_x - 2by)\partial\chi/\partial v_y = 2(2b - \Omega^2)\beta^2 (v_x + 2\Omega d_2 y/\beta^2)\, \partial\Phi/\partial x +$$
$$+ 2(2a - \Omega^2)\alpha^2 (v_y - 2\Omega d_2 x/\alpha^2)\, \partial\Phi/\partial y. \tag{3.4}$$

Возмущение гравитационного потенциала диска Φ связано с возмущением его поверхностной плотности σ уравнением Пуассона

$$\Delta\Phi = 4\pi G\sigma\delta(z). \tag{3.5}$$

При рассмотрении дипольных возмущений необходим также учет возмущений приливного потенциала. Возмущение поверхностной плотности, связанное с (3.1), имеет вид

$$\sigma = \int (f - f_0)\, dv_x dv_y. \tag{3.6}$$

Обозначая

$$w_x = (2b - \Omega^2)^{1/2}\beta\, (v_x + 2\Omega d_2 y/\beta^2), \quad w_y = (2a - \Omega^2)^{1/2}\alpha\, (v_y -$$

$$- 2\Omega d_2 x/\alpha^2), \quad \chi^{(0)} = \chi\,(w_x = w_y = 0), \quad \chi^{(1)} = \chi - \chi^{(0)}, \tag{3.7}$$

получим из (3.6)

$$\sigma = (\sigma_0/2\pi\sqrt{A}) \int \{A\,[1 - (x^2/\alpha^2) - (y^2/\beta^2)] - w_x^2 - w_y^2 - \chi^{(1)} -$$

$$- \chi^{(0)}\}^{-1/2} \cdot \theta\, \{A\,[1 - (x^2/\alpha^2) - (y^2/\beta^2)] - w_x^2 - w_y^2 - \chi^{(1)} - \tag{3.8}$$

$$- \chi^{(0)}\}\, dw_x\, dw_y - \sigma_0\, [1 - (x^2/\alpha^2) - (y^2/\beta^2)]^{1/2}.$$

После перехода к полярным координатам (w, φ) в пространстве (w_x, w_y) и введения величины w_1^2 по соотношениям

$$w_1^2 = w^2 + \chi^{(1)}, \quad dw^2 = dw_1^2 - [\partial \chi^{(1)}/\partial w]\, dw, \tag{3.9}$$

получаем из (3.8)

$$\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)},$$

$$\sigma^{(1)} = -(\sigma_0/4\pi\sqrt{A}) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\{A[1-(x^2/\alpha^2)-(y^2/\beta^2)]\}^{1/2}} \{A[1-(x^2/\alpha^2)-(y^2/\beta^2)] - w^2\}^{-1/2} [\partial \chi^{(1)}/\partial w]\, dw$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(2)} = \sigma_0 \{[1-(x^2/\alpha^2)-(y^2/\beta^2)-(\chi^{(0)}/A)]^{1/2} - [1-(x^2/\alpha^2) - \\ -(y^2/\beta^2)]^{1/2}\} = -0.5[\sigma_0 \chi^{(0)}/A][1-(x^2/\alpha^2)-(y^2/\beta^2)]^{-1/2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Решение уравнения (3.4) ищем с помощью метода «интегрирования по траекториям» [14], см. также [15]. Фазовые траектории звезд в невозмущенном потенциале определяются решением характеристической системы уравнения (3.4), имеющей вид

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \tag{3.11}$$
$$d^2x/dt^2 = \Omega^2 x + 2\Omega\,(dy/dt) - 2ax, \quad d^2y/dt^2 = \Omega^2 y - 2\Omega\,(dx/dt) - 2by.$$

Ищем решение (3.11) в виде

$$x = A \cdot \cos(\omega t), \quad y = B \cdot \sin(\omega t). \tag{3.12}$$

Тогда получаем, что решение существует, если ω удовлетворяет уравнению

$$\omega^4 - 2\,(\Omega^2 + a + b)\,\omega^2 - 2(a+b)\,\Omega^2 + 4ab + \Omega^4 = 0, \tag{3.13}$$

корни которого имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \{\Omega^2 + a + b - [4(a+b)\,\Omega^2 + (a-b)^2]^{1/2}\}^{1/2}, \\ \omega_2 &= -\{\Omega^2 + a + b + [4(a+b)\,\Omega^2 + a - b)^2 \}^{1/2}, \\ \omega_3 &= -\omega_2, \quad \omega_4 = -\omega_1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Соотношения между коэффициентами в (3.10), соответствующие этим собственным частотам, имеют вид

$$B_1=\delta_1A_1,\quad B_2=\delta_2A_2,\quad B_3=-\delta_2A_3,\quad B_4=-\delta_1A_4, \tag{3.15}$$

где

$$\delta_1=[(2a-\Omega^2-\omega_1^2)/(2b-\Omega^2-\omega_1^2)]^{1/2},$$

$$\delta_2=[(2a-\Omega^2-\omega_2^2)/(2b-\Omega^2-\omega_2^2)]^{1/2}. \tag{3.16}$$

С учетом (3.12)—(3.16) общее решение системы (3.11) имеет вид

$$\begin{aligned}
x'&=A_1\cdot\cos(\omega_1t'+\varphi_1)+A_2\cdot\cos(\omega_2t'+\varphi_2),\\
y'&=\delta_1A_1\cdot\sin(\omega_1t'+\varphi_1)+\delta_2A_2\cdot\sin(\omega_2t'+\varphi_2),\\
v_x'&=-\omega_1A_1\cdot\sin(\omega_1t'+\varphi_1)-\omega_2A_2\cdot\sin(\omega_2t'+\varphi_2),\\
v_y'&=\delta_1\omega_1A_1\cdot\cos(\omega_1t'+\varphi_1)+\delta_2\omega_2A_2\cdot\cos(\omega_2t'+\varphi_2).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Величины в момент t' в зависимости от их значений в момент t выражаются в виде

$$\begin{aligned}
x'&=(x/\Delta_2)\{\delta_2\omega_2\cdot\cos[\omega_1(t'-t)]-\delta_1\omega_1\cdot\cos[\omega_2(t'-t)]\}-\\
&-(y/\Delta_1)\{\omega_2\cdot\sin[\omega_1(t'-t)]-\omega_1\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\}-\\
&-(v_x/\Delta_1)\{\delta_2\cdot\sin[\omega_1(t'-t)]-\delta_1\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\}-\\
&-(v_y/\Delta_2)\{\cos[\omega_1(t'-t)]-\cos[\omega_2(t'-t)]\},\\
y'&=(x\delta_1\delta_2/\Delta_2)\{\omega_2\cdot\sin[\omega_1(t'-t)]-\omega_1\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\}+\\
&+(y/\Delta_1)\{\delta_1\omega_2\cdot\cos[\omega_1(t'-t)]-\delta_2\omega_1\cdot\cos[\omega_2(t'-t)]\}+\\
&+(v_x\delta_1\delta_2/\Delta_1)\{\cos[\omega_1(t'-t)]-\cos[\omega_2(t'-t)]\}-\\
&-(v_y/\Delta_2)\{\delta_1\cdot\sin[\omega_1(t'-t)]-\delta_2\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\},\\
v_x'&=-(x\omega_1\omega_2/\Delta_2)\{\delta_2\cdot\sin[\omega_1(t'-t)]-\delta_1\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\}-\\
&-(y\omega_1\omega_2/\Delta_1)\{\cos[\omega_1(t'-t)]-\cos[\omega_2(t'-t)]\}-\\
&-(v_x/\Delta_1)\{\delta_2\omega_1\cdot\cos[\omega_1(t'-t)]-\delta_1\omega_2\cdot\cos[\omega_2(t'-t)]\}+\\
&+(v_y/\Delta_2)\{\omega_1\cdot\sin[\omega_1(t'-t)]-\omega_2\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\},\\
v_y'&=(x\delta_1\delta_2\omega_1\omega_2/\Delta_2)\{\cos[\omega_1(t'-t)]-\cos[\omega_2(t'-t)]\}-\\
&-(y\omega_1\omega_2/\Delta_1)\{\delta_1\cdot\sin[\omega_1(t'-t)]-\delta_2\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\}-\\
&-(v_x\delta_1\delta_2/\Delta_1)\{\omega_1\cdot\sin[\omega_1(t'-t)]-\omega_2\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\}-\\
&-(v_y/\Delta_2)\{\delta_1\omega_1\cdot\cos[\omega_1(t'-t)]-\delta_2\omega_2\cdot\cos[\omega_2(t'-t)]\}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Входящие сюда величины связаны соотношениями

$$\Delta_1 = \delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1, \quad \Delta_2 = \delta_2\omega_2 - \delta_1\omega_1, \quad \Delta_1 = \delta_1\delta_2\Delta_2,$$

$$\omega_1^2\omega_2^2 = (2a - \Omega^2)(2b - \Omega^2), \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2(a + b + \Omega^2),$$

$$\delta_1\delta_2\omega_1\omega_2 = -(2a - \Omega^2), \quad \omega_1\omega_2/(\delta_1\delta_2) = -(2b - \Omega^2),$$

$$\delta_1^2\delta_2^2 = (2a - \Omega^2)/(2b - \Omega^2),$$

$$\Delta_2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)/2\Omega, \quad \Delta_1 = (\omega_1\omega_2/2\Omega)(\omega_2^2 - \omega_1^2)/(2b - \Omega^2), \tag{3.19}$$

$$\delta_1\delta_2 = -\omega_1\omega_2/(2b - \Omega^2) = -(2a - \Omega^2)/\omega_1\omega_2,$$

$$\delta_1 = 2\Omega\omega_1/(2b - \Omega^2 - \omega_1^2) = (2a - \Omega^2 - \omega_1^2)/2\Omega\omega_1,$$

$$\delta_2 = 2\Omega\omega_2/(2b - \Omega^2 - \omega_2^2) = (2a - \Omega^2 - \omega_2^2)/2\Omega\omega_2,$$

$$(2b - \Omega^2 - \omega_2^2)\cdot(2b - \Omega^2 - \omega_1^2) = -4\Omega^2(2b - \Omega^2),$$

$$(2a - \Omega^2 - \omega_2^2)\cdot(2a - \Omega^2 - \omega_1^2) = -4\Omega^2(2a - \Omega^2).$$

4. *Дисперсионное уравнение для дипольных возмущений.* Левая часть уравнения (3.4) является полной производной $d\chi/dt$ по времени вдоль траекторий (3.18). Решение (3.4) записывается в виде

$$\chi = 2\int_{-\infty}^{t} [2b - \Omega^2)\beta^2(v_x' + 2\Omega d_2 y'/\beta^2)(\partial\Phi/\partial x') +$$
$$+ (2a - \Omega^2)\alpha^2(v_y' - 2\Omega d_2 x'/\alpha^2)(\partial\Phi/\partial y')]\,dt'. \tag{4.1}$$

Как показано в [6, 8], для КГП дисков, а также КГП цилиндров, шаров, эллипсоидов, возмущенный гравитационный потенциал Φ имеет вид конечного полинома от координат. Степень полинома зависит от моды возмущений. Дипольному возмущению соответствует возмущение потенциала Φ_1 в виде полинома первой степени

$$\Phi_1 = g_{11}x + g_{12}y, \tag{4.2}$$

Физический смысл этого возмущения состоит в смещении диска, как целого, на вектор $\delta r_1 = (\delta_x, \delta_y)$ при сохранении формы и распределения плотности в диске.

а) *Двойные системы.* В двойной системе рассмотрим возмущения, сохраняющие полный момент количества движения, когда соседняя галактика смещается на вектор $\delta r_2 = \delta r_1$, а расстояния между галактиками и их взаимная ориентация не меняются. В исходной системе координат это смещение можно рассматривать как возмущение, приводящее к возмущению полного потенциала (включая приливный) в виде

$$\Phi_1 = a(x+\delta x)^2 + b(y+\delta y)^2 - \Phi_0 = 2(ax\delta x + by\delta y). \quad (4.3)$$

Из сравнения (4.2) и (4.3) получаем

$$\delta x = g_{11}/2a, \quad \delta y = g_{12}/2b, \quad (4.4)$$

Дипольное возмущение смещает центр тяжести диска и является единственным, при котором, наряду с гравитационным потенциалом, возмущается и приливный потенциал. В соотношение (4.1) входит возмущение полного потенциала, а в уравнение Пуассона (3.5) входит только возмущение гравитационного потенциала диска $\Phi_1^{(d)}$, равное

$$\Phi_1^{(d)} = 2a_0\delta x\cdot x + 2b_0\delta y\cdot y = g_{11}a_0x/a + g_{12}b_0y/b = \\ = g_{11}^{(d)}x + g_{12}^{(d)}y. \quad (4.5)$$

Если возмущение потенциала определяется полиномом степени $n \geqslant 2$, то центры тяжести галактик остаются неизменными, поэтому возмущения приливного потенциала отсутствуют.

Из-за вращения системы координат смещенная картина, возникающая при дипольном возмущении в паре, вращается, поэтому собственная частота дипольного возмущения равна $\omega = \pm\Omega$. Получим этот результат с помощью решения возмущенных уравнений. Вводим величины

$$u_x = v_x + 2\Omega d_2 y/\beta^2, \quad u_x = v_y - 2\Omega d_2 x/\alpha^2. \quad (4.6)$$

Формулы (3.18) с использованием (4.6) примут вид

$$x' = -(1/\Delta_1)\{(\delta_2 u_x + k_2 y)\cdot\sin[\omega_1(t'-t)] - (\delta_1 u_x + \\ k_1 y)\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\} - (1/\Delta_2)(\{(u_y - k_4 x)\cdot\cos[\omega_1(t'-t)] - \\ -(u_y - k_3 x)\cdot\cos[\omega_2(t'-t)]\},$$

$$y' = (1/\Delta_1)\{\delta_1(\delta_2 u_x + k_2 y)\cdot\cos[\omega_1(t'-t)] - \delta_2(\delta_1 u_x + \\ + k_1 y)\cdot\cos[\omega_2(t'-t)]\} - (1/\Delta_2)\{\delta_1(u_y - k_4 x)\cdot\sin[\omega_1(t' - \\ - t)] - \delta_2(u_y - k_3 x)\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\}, \quad (4.7)$$

$$u'_x = -(1/\Delta_1)\{k_1(\delta_2 u_x + k_2 y)\cdot\cos[\omega_1(t'-t)] - k_2(\delta_1 u_x + \\ k_1 y)\cdot\cos[\omega_2(t'-t)]\} + (1/\Delta_2)\{k_1(u_y - k_4 x)\cdot\sin[\omega_1(t'-t)] - \\ - k_2(u_y - k_3 x)\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\},$$

$$u_y' = -(1/\Delta_1)\{k_3(\delta_2 u_x + k_2 y)\cdot\sin[\omega_1(t'-t)] - k_4(\delta_1 u_x + k_1 y)\cdot\sin[\omega_2(t'-t)]\} - (1/\Delta_2)\{k_3(u_y - k_4 x)\cdot\cos[\omega_1(t'-t)] - k_4(u_y - k_3 x)\cdot\cos[\omega_2(t'-t)]\}.$$

Здесь введены величины, связанные соотношениями

$$\begin{aligned}
&k_1 = \omega_1 - 2\Omega d_2\delta_1/\beta^2, \quad k_2 = \omega_2 - 2\Omega d_2\delta_2/\beta^2,\\
&k_3 = \omega_1\delta_1 - 2\Omega d_2/\alpha^2, \quad k_4 = \omega_2\delta_2 - 2\Omega d_2/\alpha^2,\\
&k_1k_4 = -A/[\alpha^2\beta^2\delta_1(2b-\Omega^2)] = -A\delta_1\delta_2^2/[\alpha^2\beta^2(2a-\Omega^2)],\\
&k_2k_3 = -A/[\alpha^2\beta^2\delta_2(2b-\Omega^2)] = -A\delta_2\delta_1^2/[\alpha^2\beta^2(2a-\Omega^2)],\\
&k_1k_2 = -A\delta_1\delta_2/[\beta^4(2b-\Omega^2)] = -A\delta_1^3\delta_2^3/[\beta^4(2a-\Omega^2)], \qquad (4.8)\\
&k_3k_4 = -A/[\alpha^4\delta_1^2\delta_2^2(2b-\Omega^2)] = -A/[\alpha^4(2a-\Omega^2)],\\
&k_3 = \beta^2k_1/(\alpha^2\delta_1\delta_2^2), \quad k_4 = \beta^2k_2/(\alpha^2\delta_2\delta_1^2),\\
&k_3k_4 = \beta^4k_1k_2/(\alpha^4\delta_1^3\delta_2^3).
\end{aligned}$$

Подставляя (4.2) в (4.1), имеем

$$\chi = 2\int_{-\infty}^{t}[g_{11}(2b-\Omega^2)\beta^2u_x' + g_{12}(2a-\Omega^2)\alpha^2u_y']\exp[-i(t'-t)]dt'. \qquad (4.9)$$

Зависимость всех величин от времени можно считать экспоненциальной $f \sim \exp(-i\omega\tau)$, при расчетах возникают интегралы

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0}\exp(-i\omega\tau)\,d\tau = -1/(i\omega),\\
&\int_{-\infty}^{0}\cos(\omega_1\tau)\cdot\exp(-i\omega\tau)\,d\tau = -i\omega/(\omega_1^2-\omega^2), \qquad (4.10)\\
&\int_{-\infty}^{0}\sin(\omega_1\tau)\cdot\exp(-i\omega\tau)\,d\tau = -\omega_1/(\omega_1^2-\omega^2), \quad \tau = t'-t.
\end{aligned}$$

С учетом (4.7), (4.9) из (3.10) получаем $\sigma^{(1)}=0$. Величина $\chi^{(0)}$ получается в виде

$$\chi^{(0)} = -2A\{(x/\alpha^2)[g_{11}(\omega^2-2b+\Omega^2)+2i\omega\Omega g_{12}] + (y/\beta^2)[g_{12}(\omega^2-2a+\Omega^2)-2i\omega\Omega g_{11}]\}/[(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)]. \qquad (4.11)$$

Если возмущенная плотность записана в виде

$$\sigma = \sigma_0[1-(x^2/\alpha^2)-(y^2/\beta^2)]^{-1/2}(f_{11}x+f_{12}y), \qquad (4.12)$$

то, как следует из теории потенциала [5] (см. также [16]), коэффициенты в (4.5) связан с f_{11} и f_{12} соотношениями

$$g_{11}^{(d)} = -2\alpha^2 a_0 f_{11}, \quad g_{12}^{(d)} = -2\beta^2 b_0 f_{12}. \tag{4.13}$$

Отсюда, используя (4.5), (3.10), (4.11), получаем систему относительно g_{11} и g_{12}, приводящую к следующему дисперсионному уравнению:

$$\omega^4 - 2\Omega^2\omega^2 + \Omega^4 = 0, \quad \omega = \pm\Omega, \tag{4.14}$$

что совпадает с результатом, полученным выше из физических соображений. Тот же результат имеет место и для одиночного диска [5].

б) *Диск, погруженный в однородное гало.* Если центр тяжести гало при возмущении сдвигается вместе с диском, так что не меняется их взаимная ориентация, то остается справедливым дисперсионное уравнение (4.14). В другом предельном случае дипольного возмущения гало остается неподвижным, а диск сдвигается, как желток в яйце относительно белка. В этом случае $\Phi_1 = \Phi_1^{(d)}$, и дисперсионное уравнение при наличии гало с потенциалом (2.4) примет вид

$$\omega^4 - 2(\Omega^2 + h_x + h_y)\omega^2 + \Omega^4 - 2\Omega^2(h_x + h_y) + 4h_x h_y = 0. \tag{4.15}$$

Решение этого уравнения

$$\omega_\pm^2 = \Omega^2 + h_x + h_y \pm [(h_x - h_y)^2 + 4\Omega^2(h_x + h_y)]^{1/2} \tag{4.16}$$

дает устойчивые корни при $2h_x < \Omega^2 < 2h_y$, $(h_x < h_y)$. В граничных точках имеют место решения

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= 2h_x, \quad \omega = 0; \quad \pm[2(3h_x + h_y)]^{1/2}, \\ \Omega^2 &= 2h_y, \quad \omega = 0; \quad \pm[2(h_x + 3h_y)]^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Граничные частоты вращения соответствуют резонансам, т. к. они равны частотам колебаний материальной точки по оси x или y в гравитационном поле гало.

В сфероидальном гало решение (4.16) примет вид

$$\omega = \pm(\Omega \pm \sqrt{2h}). \tag{4.18}$$

Неустойчивости здесь отсутствуют, резонанс имеет место при $\Omega = \sqrt{2h}$. Очевидно, что скорость вращения сфероидального гало может отличаться от скорости вращения диска Ω, но для эллипсоидального гало с $h_x \neq h_y$ их угловые скорости совпадают. Неустойчивости, содержащиеся в (4.16), соответствуют, видимо, изменению ориентации диска относительно гало под действием асимметричной силы тяготения гало.

5. *Дисперсионное уравнение для бароподобных (квадрупольных) возмущений.* Возмущение потенциала

$$\Phi = g_{21}x^2 + g_{22}y^2 + ig_{23}xy. \tag{5.1}$$

После подстановки в (4.1) приводит, с учетом (4.10), к следующему выражению для возмущенной функции:

$$\chi = 2\int_{-\infty}^{t}[(2b - \Omega^2)\beta^2(2g_{21}x'u'_x + ig_{23}y'u'_x) + (2a - \Omega^2)\alpha^2\cdot$$
$$\cdot(2g_{22}y'u'_y + ig_{23}x'u'_y)]\exp[-i(t' - t)]\,dt', \tag{5.2}$$

После громоздких вычислений с учетом формул (3.18), (5.2) получаем из (3.10) возмущенную поверхностную плотность в виде

$$\sigma = -(\sigma_0/2\delta_1\delta_2\Delta_2^2)[1 - (x^2/\alpha^2) - (y^2/\beta^2)]^{-1/2}\cdot\{(x^2/\alpha^2)\cdot$$
$$\cdot\{2[k_1\delta_2 - \delta_1\delta_2(k_3 + k_4)][2g_{21}\omega_1/\delta_1) - 2g_{22}\omega_1\delta_1 + \omega g_{23}]/(4\omega_1^2 - \omega^2) +$$
$$+ 2[k_2\delta_1 - \delta_1\delta_2(k_3 + k_4)][(2g_{21}\omega_2/\delta_2) - 2g_{22}\omega_2\delta_2 + \omega g_{23}]/(4\omega_2^2 - \omega^2) -$$
$$- [k_1 + k_2 - 2(k_3\delta_2 + k_4\delta_1)][2g_{21}(\omega_1 + \omega_2) - 2g_{22}(\omega_1 + \omega_2)\delta_1\delta_2 +$$
$$+ \omega(\delta_1 + \delta_2)g_{23}]/[(\omega_1 + \omega_2)^2 - \omega^2] +$$
$$+ [k_1 - k_2 + 2(k_3\delta_2 - k_4\delta_1)][2g_{21}(\omega_1 - \omega_2) + 2g_{22}(\omega_1 - \omega_2)\delta_1\delta_2 +$$
$$+ \omega(\delta_1 - \delta_2)g_{23}]/[(\omega_1 - \omega_2)^2 - \omega^2]\} + (y^2/\beta^2)\cdot\{2(k_2\delta_1 + k_1\delta_2 -$$
$$- \delta_1\delta_2k_3)[(2g_{21}\omega_1/\delta_1) - 2g_{22}\omega_1\delta_1 + \omega g_{23}]/(4\omega_1^2 - \omega^2) +$$
$$+ 2(k_2\delta_1 + k_1\delta_2 - \delta_1\delta_2k_4)[(2g_{21}\omega_2/\delta_2) - 2g_{22}\omega_2\delta_2 + \omega g_{23}]/(4\omega_2^2 - \omega^2) -$$
$$- [2(k_1 + k_2) - k_3\delta_2 - k_4\delta_1][2g_{21}(\omega_1 + \omega_2) - 2g_{22}(\omega_1 + \omega_2)\delta_1\delta_2 +$$
$$+ \omega(\delta_1 + \delta_2)g_{23}]/[(\omega_1 + \omega_2)^2 - \omega^2] +$$
$$+ [2(k_1 - k_2) + k_3\delta_2 - k_4\delta_1][2g_{21}(\omega_1 - \omega_2) + 2g_{22}(\omega_1 - \omega_2)\delta_1\delta_2 +$$
$$+ \omega(\delta_1 - \delta_2)g_{23}]/[(\omega_1 - \omega_2)^2 - \omega^2]\} - (ixy/\alpha^2)\cdot \tag{5.3}$$
$$\cdot\{2k_2[(2g_{21}\omega/\delta_1) - 2g_{22}\omega\delta_1 + 4\omega_1g_{23}]/(4\omega_1^2 - \omega^2) +$$
$$+ 2k_1[(2g_{21}\omega/\delta_2) - 2g_{22}\omega\delta_2 + 4\omega_2g_{23}]/(4\omega_2^2 - \omega^2) -$$
$$- (k_1 + k_2)(\delta_1 + \delta_2)[2g_{21}\omega - 2g_{22}\omega\delta_1\delta_2 + g_{23}(\delta_1 + \delta_2)(\omega_1 + \omega_2)] -$$
$$- (k_1 - k_2)(\delta_1 - \delta_2)[2g_{21}\omega + 2g_{22}\omega\delta_1\delta_2 + g_{23}(\delta_1 - \delta_2)(\omega_1 - \omega_2)]\} =$$
$$= \sigma_0[1 - (x^2/\alpha^2) - (y^2/\beta^2)]^{-1/2}(f_{21}x^2 + f_{22}y^2 + if_{23}xy).$$

Из теории потенциала [5, 16] следует связь коэффициентов $g_{\alpha\beta}$ и $f_{\alpha\beta}$, при возмущении приливного потенциала, равном нулю

$$-(\alpha^2-\beta^2)\,g_{21}=\alpha^2\,(2a_0\alpha^2-a_0\beta^2-b_0\beta^2)\,f_{21}+\beta^2\,(b_0\beta^2-a_0\alpha^2)\,f_{22},$$
$$-(\alpha^2-\beta^2)\,g_{22}=\alpha^2\,(b_0\beta^2-a_0\alpha^2)\,f_{21}+\beta^2\,(a_0\alpha^2+b_0\alpha^2-2b_0\beta^2)\,f_{22},$$
$$(\alpha^2-\beta^2)\,g_{23}=2\alpha^2\beta^2\,(a_0-b_0)\,f_{23}. \tag{5.4}$$

С учетом (5.3) система (5.4) сводится к виду

$$[(2\omega_1A_1/\delta_1\Omega_1)+(2\omega_2A_2/\delta_2\Omega_2)-(\omega_1+\omega_2)\,A_3/\Omega_3+(\omega_1-\omega_2)\,A_4/\Omega_4-$$
$$-\delta_1\delta_2\Delta_2^2]\,g_{21}+$$
$$+[-2\omega_1\delta_1A_1/\Omega_1-2\omega_2\delta_2A_2/\Omega_2+(\omega_1+\omega_2)\,\delta_1\delta_2A_3/\Omega_3+(\omega_1-$$
$$-\omega_2)\,\delta_1\delta_2A_4/\Omega_4]g_{22}+[A_1/\Omega_1+A_2/\Omega_2-0.5\,(\delta_1+\delta_2)\,A_3/\Omega_3+0.5\,(\delta_1-$$
$$\delta_2)\,A_4/\Omega_4]\,\omega g_{23}=0.$$

$$[(2\omega_1B_1/\delta_1\Omega_1)+(2\omega_2B_2/\delta_2\Omega_2)-(\omega_1+\omega_2)\,B_3/\Omega_3+(\omega_1-\omega_2)\,B_4/\Omega_4]\,g_{21}+$$
$$+[-2\omega_1\delta_1B_1/\Omega_1-2\omega_2\delta_2B_2/\Omega_2+(\omega_1+\omega_2)\,\delta_1\delta_2B_3/\Omega_3+(\omega_1-$$
$$-\omega_2)\,\delta_1\delta_2B_4/\Omega_4-\delta_1\delta_2\Delta_2^2]\,g_{22}+[B_1/\Omega_1+B_2/\Omega_2-0.5\,(\delta_1+ \tag{5.5}$$
$$+\delta_2)\,B_3/\Omega_3+0.5\,(\delta_1-\delta_2)\,B_4/\Omega_4]\,\omega g_{23}=0.$$

$$[(4k_2/\delta_1\Omega_1)+(4k_1/\delta_2\Omega_2)-2\,(k_1+k_2)\,(\delta_1+\delta_2)/(\delta_1\delta_2\Omega_3)-2\,(k_1-$$
$$-k_2)\,(\delta_1-\delta_2)/(\delta_1\delta_2\Omega_4)]\,\omega g_{21}+[-4k_2\delta_1/\Omega_1-4k_1\delta_2/\Omega_2+2\,(k_1+$$
$$+k_2)\,(\delta_1+\delta_2)/\Omega_3-2\,(k_1-k_2)\,(\delta_1-\delta_2)/\Omega_4]\,\omega g_{22}+$$
$$+\{8k_2\omega_1/\Omega_1+8k_1\omega_2/\Omega_2-(k_1+k_2)\,(\delta_1+\delta_2)^2\,(\omega_1+\omega_2)/(\delta_1\delta_2\Omega_3)-$$
$$-(k_1-k_2)\,(\delta_1-\delta_2)^2\,(\omega_1-\omega_2)/(\delta_1\delta_2\Omega_4)-(\alpha^2-\beta^2)\,\delta_1\delta_2\Delta_2^2/[\beta^2\,(a-b)]\}\,g_{23}=0$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\Omega_1=4\,\omega_1^2-\omega^2,\;\;\Omega_2=4\omega_2^2-\omega^2,\;\;\Omega_3=(\omega_1+\omega_2)^2-\omega^2,$$
$$\Omega_4=(\omega_1-\omega_2)^2-\omega^2),$$
$$A_1=a_0\,\{k_1\,[\delta_2-(\beta^2/\delta_2\alpha^2)]-(k_2\beta^2/\delta_1\alpha^2)\}-(a_0\alpha^2-b_0\beta^2)\,k_2\,[\delta_1+$$
$$+(\beta^2/\delta_1\alpha^2)]/(\alpha^2-\beta^2),$$
$$A_2=a_0\,\{k_2\,[\delta_1-(\beta^2/\delta_1\alpha^2)]-(k_1\beta^2/\delta_2\alpha^2)\}-(a_0\alpha^2-b_0\beta^2)\,k_1\,[\delta_2+$$
$$+(\beta^2/\delta_2\alpha^2)]/(\alpha^2-\beta^2),$$

$$A_3 = (k_1 + k_2)\{a_0[1 - (2\beta^2/\delta_1\delta_2\alpha^2)] - $$
$$- (a_0\alpha^2 - b_0\beta^2)[1 + (\beta^2/\delta_1\delta_2\alpha^2)]/(\alpha^2 - \beta^2)\},$$
$$A_4 = (k_1 - k_2)\{a_0[1 + (2\beta^2/\delta_1\delta_2\alpha^2)] - $$
$$- (a_0\alpha^2 - b_0\beta^2)[1 - (\beta^2/\delta_1\delta_2\alpha^2)]/(\alpha^2 - \beta^2)\},$$
$$B_1 = b_0\{k_1[\delta_2 - (\beta^2/\delta_2\alpha^2)] + k_2\delta_1\} + (a_0\alpha^2 - b_0\beta^2)k_2[\delta_1 + $$
$$+ (\beta^2/\delta_1\alpha^2)]/(\alpha^2 - \beta^2),$$
$$B_2 = b_0\{k_2[\delta_1 - (\beta^2/\delta_1\alpha^2)] + k_1\delta_2\} - (a_0\alpha^2 - b_0\beta^2)k_1[\delta_2 + $$
$$+ (\beta^2/\delta_2\alpha^2)]/(\alpha^2 - \beta^2),$$
$$B_3 = (k_1 + k_2)\{b_0[2 - (\beta^2/\delta_1\delta_2\alpha^2)] + (a_0\alpha^2 - b_0\beta^2)[1 + $$
$$+ (\beta^2/\delta_1\delta_2\alpha^2)]/(\alpha^2 - \beta^2)\},$$
$$B_4 = (k_1 - k_2)\{b_0[2 + (\beta^2/\delta_1\delta_2\alpha^2)] + (a_0\alpha^2 - b_0\beta^2)[1 - $$
$$- (\beta^2/\delta_1\delta_2\alpha^2)]/(\alpha^2 - \beta^2)\}.$$

Приравнивая нулю определитель системы (5.5), получаем дисперсионное уравнение, которое после громоздких преобразований сводится к уравнению четвертой степени относительно ω^2

$$\delta_1\delta_2\Delta_2[(a_0 - b_0)/(a - b) - 1]\cdot\{4(a - b)A_{12}\Omega_3\Omega_4/\Omega + $$
$$+ 2\omega_1(1 - \delta_1\delta_2)A_{13}\Omega_2\Omega_4 - 2\omega_1(1 + \delta_1\delta_2)A_{14}\Omega_2\Omega_3 - $$
$$- 2\omega_2(1 - \delta_1\delta_2)A_{23}\Omega_1\Omega_4 - 2\omega_2(1 + \delta_1\delta_2)A_{24}\Omega_1\Omega_3 - 4\Omega\delta_1\delta_2A_{34}\Omega_1\Omega_2 + $$
$$+ \delta_1\delta_2\Delta_2\{2\omega_1[\delta_1B_1 - (A_1/\delta_1)]\Omega_2\Omega_3\Omega_4 + 2\omega_2[\delta_2B_2 - (A_2/\delta_2)]\Omega_1\Omega_3\Omega_4 - $$
$$- (\omega_1 + \omega_2)(\delta_1\delta_2B_3 - A_3)\Omega_1\Omega_2\Omega_4 - (\omega_1 - \omega_2)(\delta_1\delta_2B_4 + A_4)\Omega_1\Omega_2\Omega_3\} + $$
$$+ \delta_1^2\delta_2^2\Delta_2^3\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4\} + \omega^2\beta^2(a_0 - b_0)/(\alpha^2 - \beta^2)\cdot\{4\times$$
$$\times\{[k_2A_{23}/\omega_1 - k_1A_{13}/\omega_2 + (k_1 + k_2)(\delta_1 + \delta_2)A_{12}/\delta_1\delta_2(\omega_1 + \omega_2))](\delta_1 - \delta_2)\Omega_4 + $$
$$+ [k_1A_{14}/\omega_2 - k_2A_{24}/\omega_1 + (k_1 - k_2)(\delta_1 - \delta_2)A_{12}/(\delta_1\delta_2(\omega_1 - \omega_2))](\delta_1 + \delta_2)\Omega_3 + $$
$$+ [k_2\delta_1\delta_2A_{34}/\omega_1 - (k_1 + k_2)(\delta_1 + \delta_2)A_{14}/(\omega_1 + \omega_2) - (k_1 - k_2)(\delta_1 - $$
$$- \delta_2)A_{13}/(\omega_1 - \omega_2)]\Omega_2 + [-k_1\delta_1\delta_2A_{34}/\omega_2 + $$
$$+ (k_1 + k_2)(\delta_1 + \delta_2)A_{24}/(\omega_1 + \omega_2) + (k_1 - k_2)(\delta_1 - \qquad (5.7)$$
$$- \delta_2)A_{23}/(\omega_1 - \omega_2)]\Omega_1\} + 2\delta_1\delta_2\Delta_2\cdot\{[-2k_2(A_2 - B_2)/\omega_1 + $$
$$+ 2k_1(A_1 - B_1)/\omega_2]\Omega_3\Omega_4 + [k_2(A_3\delta_2 - B_3\delta_1)/\omega_1 - $$
$$- (k_1 + k_2)(\delta_1 + \delta_2)(A_1\delta_2 - B_1\delta_1)/(\delta_1\delta_2(\omega_1 + \omega_2))]\Omega_2\Omega_4 + $$
$$+ [k_2(A_4\delta_2 + B_4\delta_1)/\omega_1 + (k_1 - k_2)(\delta_1 - \delta_2)(A_1\delta_2 + B_1\delta_1)/(\delta_1\delta_2(\omega_1 - $$

$$
\begin{aligned}
&-\omega_2))]\,\Omega_2\Omega_3+[-k_1(A_3\delta_1-B_3\delta_2)/\omega_2+(k_1+k_2)(\delta_1+\delta_2)(A_2\delta_1-\\
&-B_2\delta_2)/(\delta_1\delta_2(\omega_1+\omega_2))]\,\Omega_1\Omega_4+[k_1(A_4\delta_1+B_4\delta_2)/\omega_2+\\
&+(k_1-k_2)(\delta_1-\delta_2)(A_2\delta_1+B_2\delta_2)/(\delta_1\delta_2(\omega_1-\omega_2))]\,\Omega_1\Omega_3-\\
&-[(k_1+k_2)(\delta_1+\delta_2)(A_4+B_4)/(\omega_1+\omega_2)+\\
&+(k_1-k_2)(\delta_1-\delta_2)(A_3+B_3)/(\omega_1-\omega_2)]\,\Omega_1\Omega_2\}+\delta_1^2\delta_2^2\Delta_2^2\times\\
&\times[2k_2\Omega_2\Omega_3\Omega_4/\omega_1+2k_1\Omega_1\Omega_3\Omega_4/\omega_2-(k_1+k_2)(\delta_1+\delta_2)^2\,\Omega_1\Omega_2\Omega_4/\\
&/(\delta_1\delta_2(\omega_1+\omega_2))-(k_1-k_2)(\delta_1-\delta_2)^2\Omega_1\Omega_2\Omega_3/(\delta_1\delta_2(\omega_1-\omega_2))]\}=0.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&A_{12}=A_1B_2-A_2B_1,\ A_{13}=A_1B_3-A_3B_1,\ A_{14}=A_1B_4-A_4B_1,\\
&A_{23}=A_2B_3-A_3B_2,\ A_{24}=A_2B_4-A_4B_2,\ A_{34}=A_3B_4-A_4B_3.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Для одиночного диска, а также для сфероидального гало с $h_x=h_y=h$ коэффициент при первой фигурной скобке в (5.7) обращается в нуль и дисперсионное уравнение становится бикубичным. Записанное в виде исходного определителя, оно использовалось для анализа устойчивости одиночного эллиптического диска в [5]. Уравнение (5.7) имеет четвертый порядок по ω^2 и, соответственно, восемь корней для ω. Классификация типов неустойчивостей по числу действительных корней и их знакам представлена в табл. 1 из [7].

6. *Устойчивость вытянутых дисков в двойных системах.* Введем следующие безразмерные параметры:

$$
\begin{aligned}
&l=\beta/a,\quad m=M/M_2,\quad \tilde{b}_0=b_0/a_0,\quad \tilde{a}=a/a_0,\\
&\tilde{b}=b/a_0,\quad f=GM_2/(r_{12}^3a_0).
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Результаты решения дисперсионного уравнения (5.7) с параметрами (2.8) для вытянутых дисков представлены на рис. 1—5. Область существования решений для вытянутых дисков при выполнении условий (2.12) с учетом (2.5), (2.7) определяется соотношениями

$$
\begin{aligned}
&0\leqslant l\leqslant 1,\quad 0\leqslant f\leqslant 2/(3+m)=f_{\lim},\\
&\Omega^2=a_0f(1+m)\leqslant 2a_0(1+m)/(3+m)\approx 2a_0(1-(2/m))\\
&\qquad\text{при } m\to\infty
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

На рис. 1 приведены области устойчивости и неустойчивости для $m=10^5$, когда масса компаньона много меньше массы исследуемой галактики. Практически этот случай не отличается от случая одиночного эллиптического диска, исследованного в [5].

Штрих-пунктирные линии на рис. 1—5 соответствуют изотропным решениям. Кривая изотропных решений удовлетворяет условию $d_2 = 0$ в функции распределения (3.1). С учетом безразмерных параметров (6.1), опуская знак ~, кривая изотропных состояний, получаемая при учете (2.10), имеет вид

$$
\begin{aligned}
&f = 2(1 - l^2 b_0)/(3 + m - l^2 m),\\
&f/f_{\lim} = (1 - l^2 b_0)(3 + m)/(3 + m - l^2 m).
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

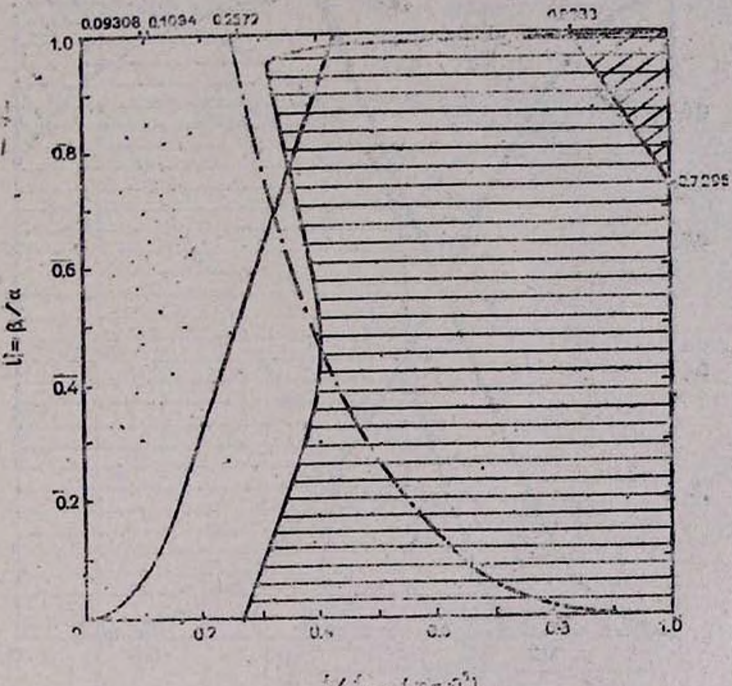


Рис. 1. Картина устойчивости вытянутого диска в паре на плоскости $l = \beta/\alpha$, $f/f_{\lim}$ (см. (6.1), (6.2)) с отношением массы диска к массе спутника $m = 10^5$. Горизонтальной штриховкой отмечена область апериодической неустойчивости (№ 2 в табл. 1), косой штриховкой—область колебательной неустойчивости (№ 5 в табл. 1), в области пересечения горизонтальной и косой штриховок имеют место обе неустойчивости (№ 7 в табл. 1); не заштрихована область устойчивости (№ 1 в табл. 1). Сплошная линия, не являющаяся границей между областями разной устойчивости, отделяет область применимости приливного приближения (слева от линии) от области его нарушения (справа от линии). Штрих-пунктирной линией указаны изотропные решения (2.9), соответствующие $d_2 = 0$ в (2.10).

Для дисков, близких к круговым, из (6.3) при $l \to 1$ получаем

$$f/f_{\lim} \simeq 0.25\,(1-l^2)\,(3+m)/[3+(1-l^2)\,m]. \qquad (6.4)$$

При этом учтено разложение величины (2.8), с учетом (6.3) вокруг кругового диска из [17] (b_0—безразмерно).

$$a_0 \simeq (3\pi/8)\,(GM/a^3)\,(1+3k^2/8), \quad b_0 \simeq 1+3k^2/4,$$
$$\text{при } k \to 0, \quad l^2 = 1-k^2 \to 1. \qquad (6.4a)$$

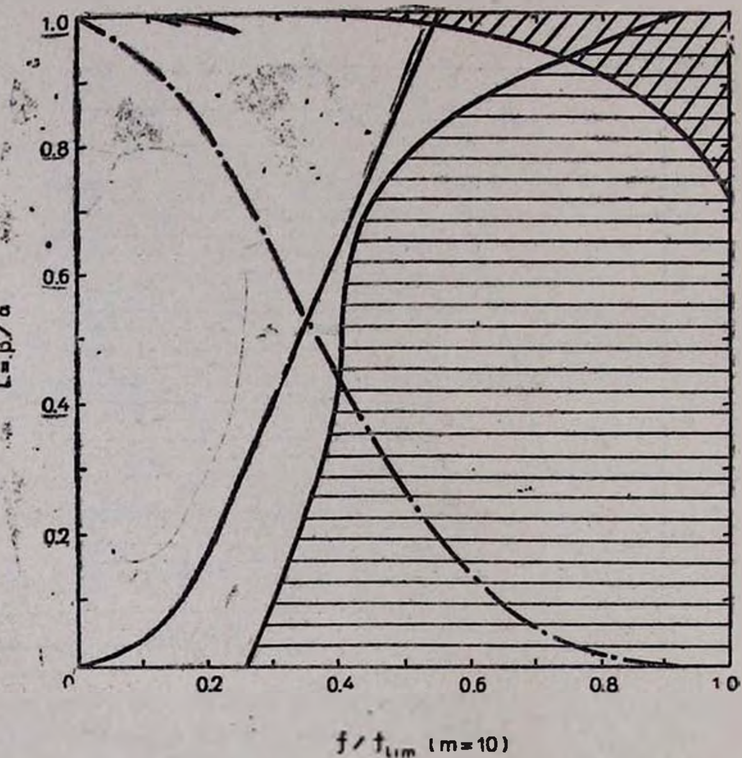


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для $m = 10$. Два «языка» в левом верхнем углу колебательно неустойчивы.

Предельное значение $f/f_{\lim}$ из (6.4) при $m \to \infty$, $l \to 1$ зависит от порядка стремления к пределу параметров m и l. Для круговых дисков $l = 1$, $b_0 = 1$, при любом фиксированном m имеем из (6.4) $f = 0$, т. е. изотропные решения выходят из точки $f = 0$, $l = 1$, определяющей невращающиеся диски. При $m \to \infty$ и фиксированном l имеем из (6.4) $f/f_{\lim} \simeq 0.25$. Неоднозначный предел $f/f_{\lim}$ при $m \to \infty$, $l \to 1$ связан с наличием особенности в (6.3), (6.4) и приводит к тому, что при больших m (рис. 1), выходя из точки $f=0$, $l=1$, линия изотропных решений идет практически горизонтально до $f/f_{\text{IIm}}=0.25$. Это соответствует тому, что (см. Прилож. 1) при предельном переходе сначала $l \to 1$ для $m=\text{const}$, а затем $m \to \infty$, реализуется решение в системе координат, вращающейся со скоростью Ω_1 ($d_2=-1$), где изотропным может быть только невращающийся диск, а любой некруговой дик стационарен в системе координат, вращающейся со скоростью Ω_r ($d_2 = \varkappa^2 (1 - 2(\Omega^2 / a_0))/3$ в пределе одиночного кругового диска). При $m \to \infty$ область перехода от Ω_r к Ω_1 становится все тоньше и на рис. 1 практически сливается в линию.

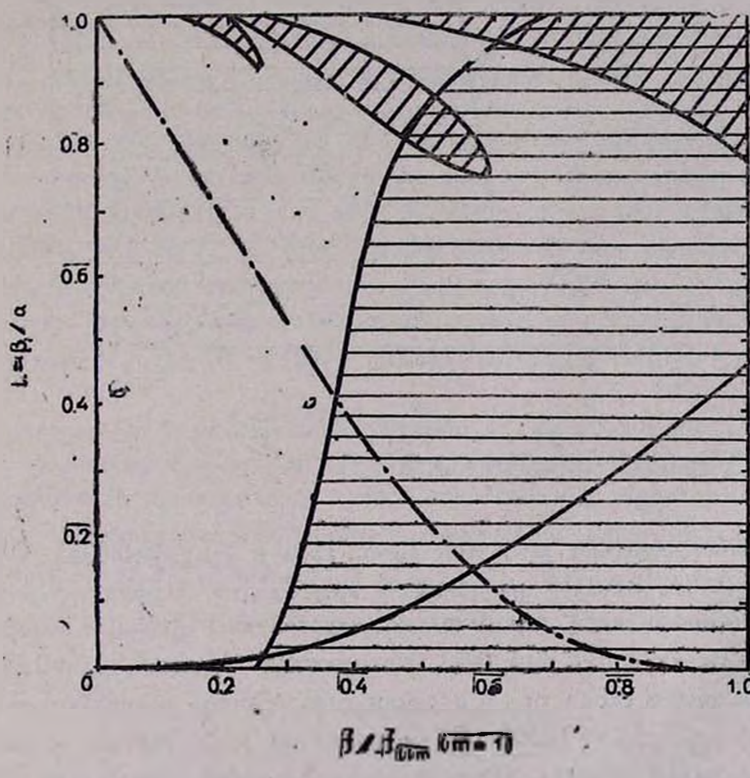


Рис. 3. То же, что на рис. 1, для $m=1$.

Характерные значения f, отмеченные на рис. 1 для кругового диска, соответствуют наличию кратных и нулевых корней дисперсионного уравнения для предела одиночного кругового диска, исследованных в Прилож. 1. Наличие компаньона, проявляется в существовании обширной области с апериодической неустойчивостью (заштрихована горизонтально). При $m \to \infty$ инкремент этой неустойчивости стремится к нулю, но размер области остается большим.

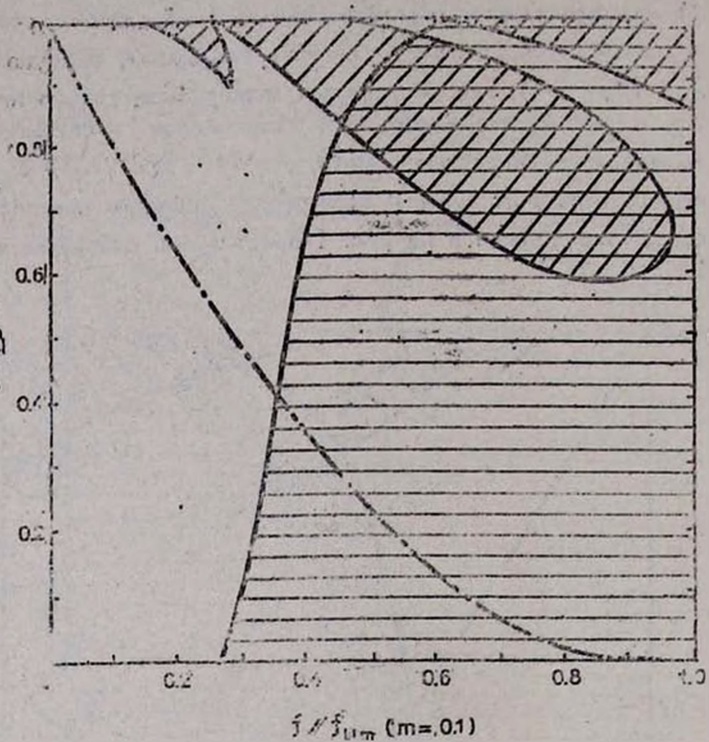


Рис. 4. То же, что на рис. 1, для $m=0.1$.

В правом верхнем углу при $l>0.7296$ и $f/f_{\text{lim}}>0.8333$, $\Omega^2/2a_0>(1-2/m)\cdot 0.8333\approx 0.8333$ расположен треугольник, совпадающий с [5], внутри которого диск колебательно неустойчив. Граница области неустойчивости на оси f при $l=1$ соответствует $f_{k1}=f/f_{\text{lim}}=0.2572$, но из-за перехода к скорости Ω_r в узком слое граница неустойчивости смещается к $f_{rk1}=5/6=0.8333$. С уменьшением m и ростом массы спутника переходная область расширяется и уже при $m=10$ (рис. 2) область неустойчивости плавно прилегает к оси $l=1$. При дальнейшем росте массы спутника область колебательной неустойчивости в правом верхнем углу немного изменяется, ее граница на оси $l=1$ сдвигается к f $=0.639$ для $m=10^{-6}$, рис. 5).

Столь же плавными с уменьшением m оказываются изменения кривой изотропных моделей (штрих-пунктир) и области апериодической неустойчивости. Кривая изотропных состояний уже при $m=10$ плавно выходит из точки $f/f_{\text{lim}}=0$, $l=1$ и столь же плавно приходит в точку $f/f_{\text{lim}}=1$, $l=0$. Такое поведение сохраняется и для всех меньших m (рис. 2—5). При больших m кривая границы апериодической неустойчивости выходит из точки $l=1$, $f/f_{\text{lim}}=1$, где для предела одиночного диска имеется кратный нулевой корень при $\Omega=\Omega_{k5}$ (см. Прилож. 1). При уменьшении m граница апериодической неустойчивости на оси $l=1$ сдвигается влево и достигает $f/f_{\text{lim}}=0.594$ для $m=10^{-6}$ (рис. 5). Размер и форма области при этом меняются не очень значительно.

Наиболее заметны изменения областей устойчивости, вызванные наличием кратных корней кругового одиночного диска при $\Omega=\Omega_{k2}$ ($f/f_{\text{lim}}=0.1094$) и $\Omega=\Omega_{k4}$ ($f/f_{\text{lim}}=0.09308$) в Приложении 1 и на рис. 1. С ростом массы спутника и уменьшением m эти «точки» превращаются в области колебательной неустойчивости, размер которых сильно возрастает с уменьшением m. Уже при $m=1$ правый «язык» области колебательной неустойчивости входит в область апериодической неустойчивости (рис. 3), а при $m=10^{-6}$ этот язык уже примыкает к границе $f/f_{\text{lim}}=1$ (рис. 5). Ввиду роста областей неустойчивости, круговой диск в двойной системе в поле массивного компаньона устойчив относительно бароподобных возмущений только в небольших интервалах величины f/f_{lim}: (0—0.160), (0.261—0.276), (0.548—0.594), см. рис. 5.

Выходящая из нуля одиночная сплошная линия на рис 1—3 соответствует равенству $\alpha=r_{12}$ (см. 2.13)) и определяет границу применимости приливного приближения, которое справедливо выше этой линии. Уравнение, описывающее эту кривую на плоскости (α/β, f/f_{lim}, с учетом (2.3), (6.1), (6.2), (6.4a) и [17]

$$a_0 \simeq (3GM/2\alpha^3)\ln(4\alpha/\beta),\quad b_0 \simeq 3GM/2\alpha\beta^2 \quad \text{при } k\to 1,\ l\to 0 \tag{6.4b}$$

запишется в виде

$$\begin{aligned} l = r_{12}^3/\alpha^3 &= (f_{\text{lim}}/f)\,(GM_2/\alpha^3 a_0)\,(3+m)/2 \\ &= (f_{\text{lim}}/f)\,(1/\ln(4\alpha/\beta))\,(3+m)/3m \quad \text{при } \beta/\alpha\to 0 \\ &= 4(f_{\text{lim}}/f)\,(3+m)/(3\pi m) \quad \text{при } \alpha=\beta. \end{aligned} \tag{6.5}$$

В предельных случаях имеем решение

$$(f/f_{\text{llm}}) = (1/\ln(4\alpha/\beta))(3+m)/3m \qquad \text{при} \quad \beta/\alpha \to 0 \quad \text{(a)}$$
$$(f/f_{\text{llm}}) = 4(3+m)/3\pi m \qquad \text{при} \quad \alpha = \beta \quad \text{(b)} \qquad (6.6)$$

Из (6.6а) следует асимптотика кривой в нуле

$$\beta/\alpha = 4 \cdot \exp(-(f_{\text{llm}}/f)(3+m)/3m) \qquad (6.7)$$

т. е. $\beta/\alpha \to 0$ при $(f/f_{\text{llm}}) \to 0$. Из (6.6b) находится точка пересечения с осью $\beta/\alpha = 1$ при больших m (см. рис. 1)

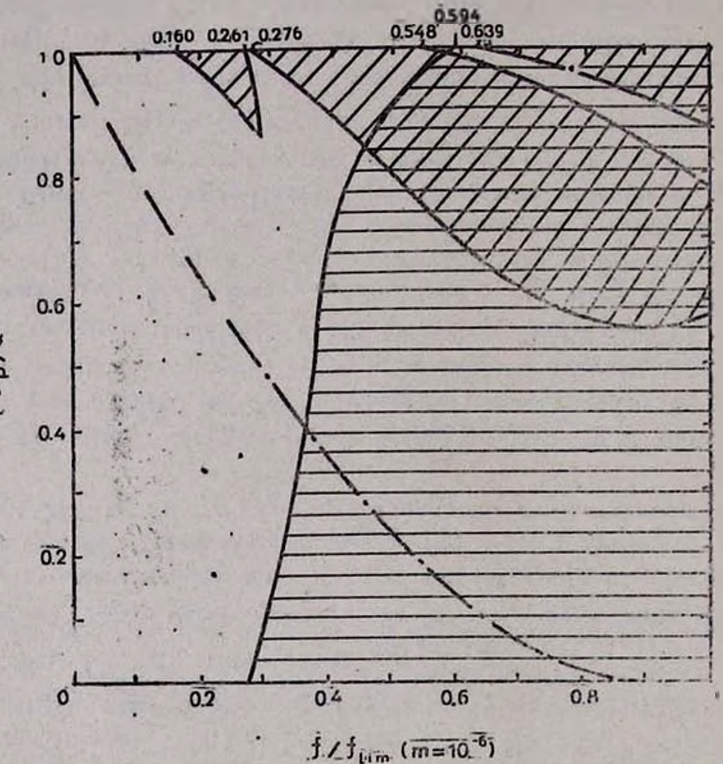


Рис. 5. То же, что на рис. 1, для $m = 10^{-6}$.

$$(f/f_{\text{llm}}) \simeq 4/3\pi \simeq 0.424 \qquad \text{при} \quad m \to \infty. \qquad (6.8)$$

Приравнивая правую часть (6.6b) к 1, получаем значение m, для которого кривая (6.5), выходя из левого нижнего угла, приходит в правый верхний

$$m = 12/(3\pi - 4) \simeq 2.212. \qquad (6.9)$$

При $m < 2.212$, приравнивая к 1 правую часть (6.5), получаем точки пересечения разделительной кривой с осью $(f/f_{\mathrm{lim}}) = 1$ для разных масс. Для малых m (массивных спутников) пересечение с этой осью происходит при малых β/α, так что из (6.7) получаем

$$(\beta/\alpha)|_{m\to 0} = 4\cdot\exp(-1/m). \tag{6.10}$$

Таким образом, при $m \ll 1$ приливное приближение применимо практически везде, за исключением узкой полосы у оси $\beta/\alpha = 0$, поэтому на рис. 4, 5 при $m \leqslant 0.1$ эта линия отсутствует.

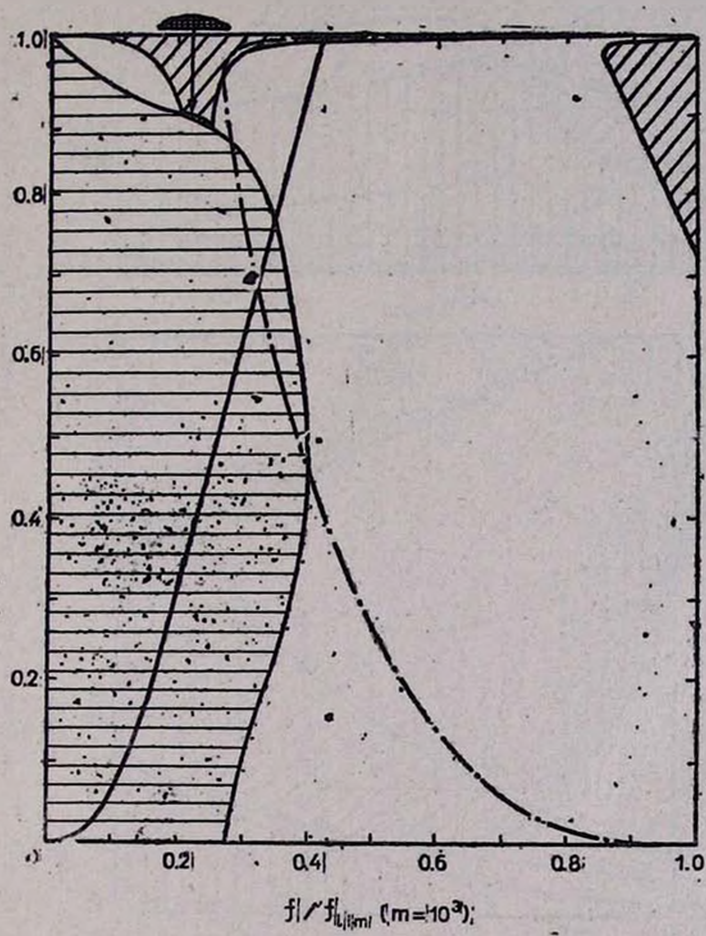


Рис. 6. То же, что на рис. 1. для сжатого диска с $m = 10^3$. Область с горизонтальной и вертикальной штриховками (указана стрелкой) соответствует двухкратной апериодической неустойчивости (№ 3 в табл. 1).

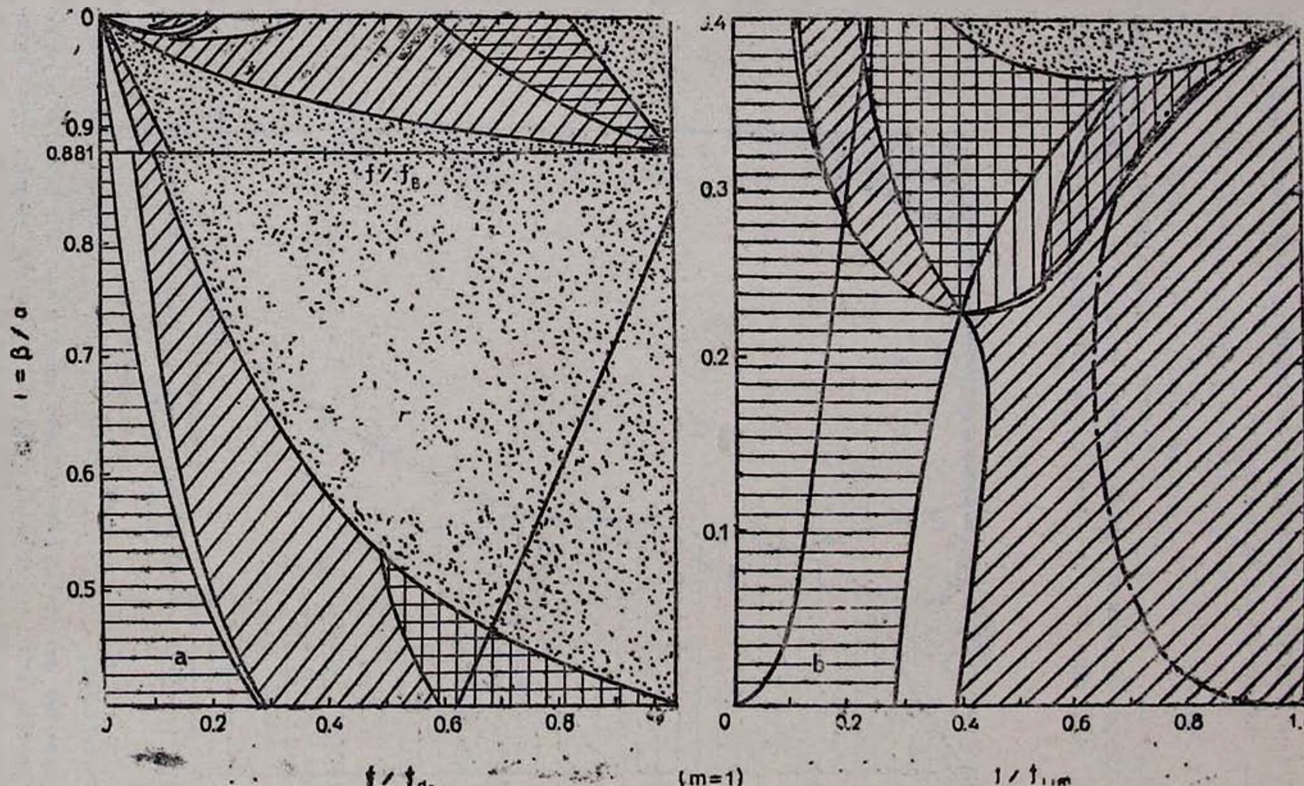
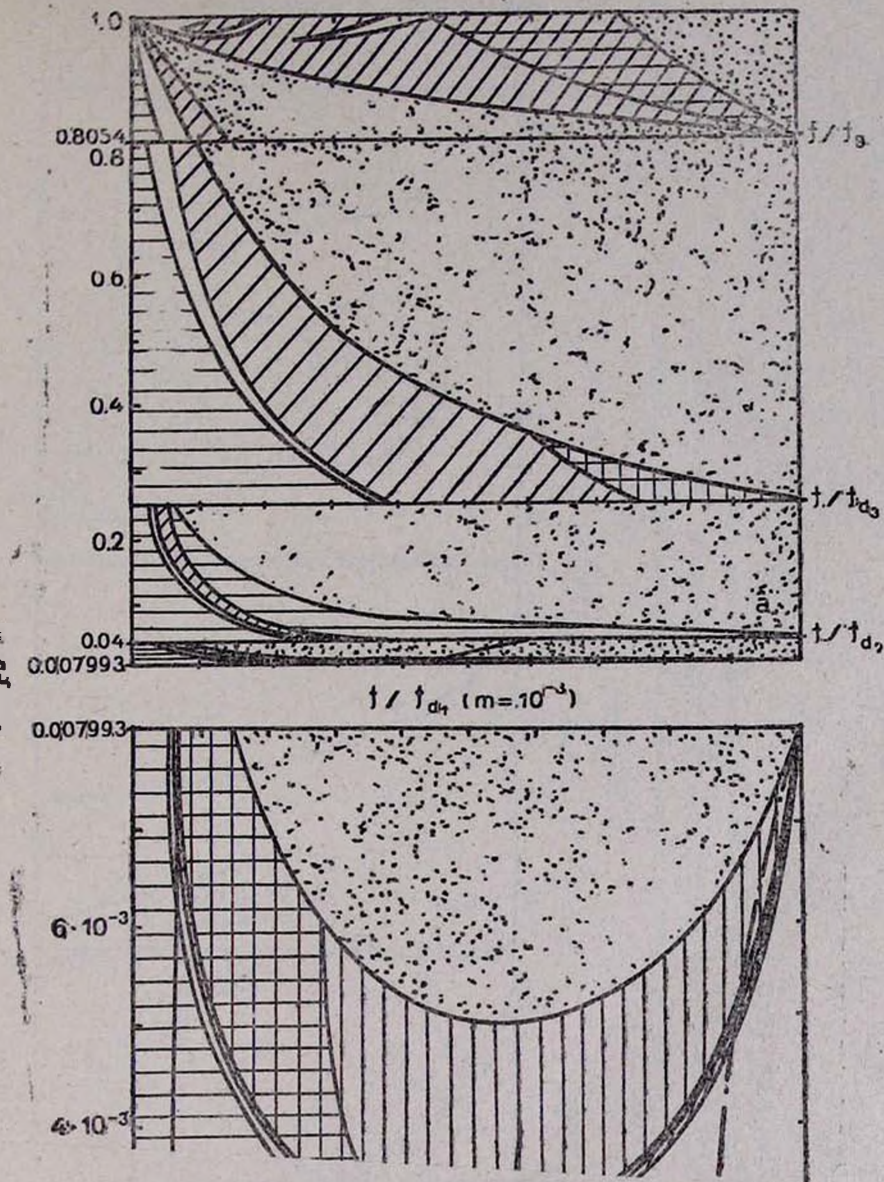


Рис. 7. То же, что на рис. 6, для $m=1$, зачернены области отсутствия равновесных решений.

а) диски с $i > i_d$ (см. раздел 6б, табл. 2 и рис. 10); в качестве горизонтальных масштабов здесь использованы f и f_{d1} из табл. 2;

б) диски с $i < i_d$. Область вертикальной штриховки, как и горизонтальной, соответствует апериодической неустойчивости. (№ 2 в табл. 1).


1.0
0.8054
0.8
0.6
0.4
0.2
0.04
0.007993
t/t_a
t/t_{d_3}
t/t_{d_2}
a
t/t_{d_4} (m=.10^{-3})
$\iota = \beta/\beta$
0.007993
$6 \cdot 10^{-3}$
$4 \cdot 10^{-3}$

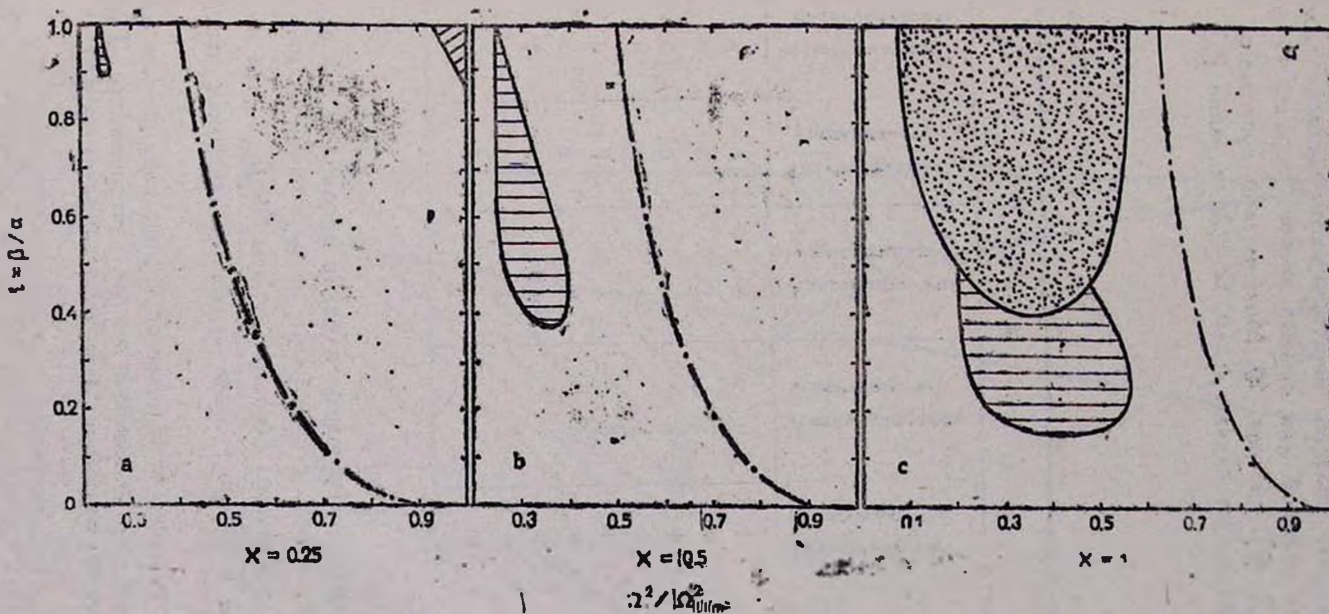


Рис. 9. Картина устойчивости эллиптических дисков в однородном сфероидальном гало на плоскости $l=\alpha/\beta$, Ω^2/Ω^2_{IIm} (см. (8.3)). Штриховка областей различной устойчивости и значения различных линий соответствуют рис. 1.

а) $\chi=0.25$ (см. (8.1)),

б) $\chi=0.5$,

в) $\chi=1$,

7. *Устойчивость сжатых дисков в двойных системах.* Результаты решения (5.7) для сжатых дисков с учетом (2.7) представлены на рис. 6—8 с классификацией областей неустойчивости, согласно табл. 1. Область существования решений для сжатых дисков гораздо сложнее, чем для вытянутых [3, 17], см. рис. 10. Максимально допустимое значение f из (6.1) соответствует случаю $b>a$, $\Omega^2=2a$ и равно [3]

$$f_{\lim}=2/m. \tag{7.1}$$

Таблица 1

No.	Действительные корни (5.7) для ω^2. Число корней со знаком +, 0	−	Моды: Гармонические колебания	Апериодическая устойчивость	Апериодическая неустойчивость	Колебательная устойчивость	Колебательная неустойчивость
1	4	0	8	0	0	0	0
2	3	1	6	1	1	0	0
3	2	2	4	2	2	0	0
4	1	3	2	3	3	0	0
5	0	4	0	4	4	0	0
6	2	0	4	0	0	2	2
7	1	1	2	1	1	2	2
8	0	2	0	2	2	2	2
9	0	0	0	0	0	4	4

В этом случае за счет стабилизирующего влияния приливных сил вдоль большой оси сжатый диск может существовать на расстоянии от массивного компаньона, гораздо меньшем (отрезок de, где $f=f_{\lim}$), чем вытянутый диск. Предельное значение f здесь связано с действием центробежных сил инерции.

Когда форма сжатого диска приближается к круговой, разрыв приливными силами по малой оси становится важнее центробежного. Тогда предельное значение f достигается при $\Omega^2=2b$, $a>b$ и равно [3]

$$f_{\lim}=2b_0/(3+m). \tag{7.2}$$

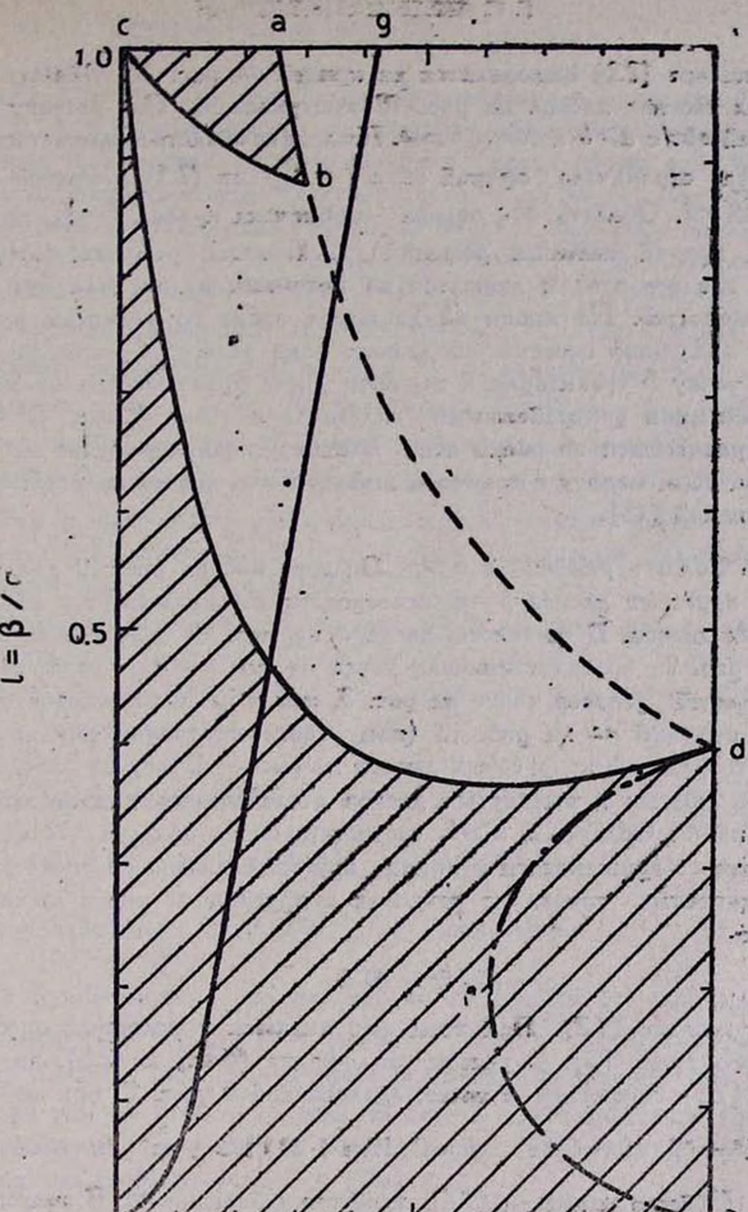


Рис. 10. Область существования сжатых дисков (заштрихованы) в паре на плоскости $i=\beta/a$, f из (6.1) для $m=1$. Сплошная и штрихпунктирная линия соответствуют рис. 1; штриховая линия проведена в области отсутствия решений: формально на ней выполняется $\Omega^2=2a$, но $A<0$ из (2.10). Точки b и d даны в табл. 2.

Соотношение (7.2) выполняется на кривой ab рис. 10. Область существования сжатых дисков на рис. 10 заштрихована. Она состоит из двух областей abc с $a>b$ и $cdeo$ с $b>a$. Последняя область прилегает к оси $f=0$, а справа ограничена прямой ed с $f=f_{\mathrm{II}m}$ из (7.1) и кривой пылевых решений cd. Область abc справа ограничена кривой $f=f_{b1}$ из (7.2) и другой кривой пылевых решений bc. Пылевое решение соответствует диску, где все звезды движутся по подобным эллипсам и нет хаотических скоростей. На линии cb движение звезд по эллипсам противоположно вращению системы координат, а на линии cd—совпадает с ним.

В точку b гравитация в пылевом диске уравновешена по малой оси приливными и центробежными силами, а в точке d, где $\Omega^2=2a=2b$ диск уравновешен по обеим осям. В этих условиях решение не является однозначным, наряду с пылевым диском здесь возможно множество других решений [18].

а) *Область решений с* $a>b$. Область abc на рис. 10 для $m=1$ по линии круговых дисков $\beta=\alpha$ непосредственно примыкает к области вытянутых дисков. В частности, точка a на рис. 10 (или соответствующая ей на рис. 7а правая граничная точка на оси $\beta=\alpha$) тождественна правой верхней угловой точке на рис. 3, как и целиком отрезок существования решений ac на рис. 10 (или соответствующий ему на рис. 7а) тождественен линии круговых дисков на рис. 3. В других случаях устойчивость сжатых и вытянутых дисков исследовалась для несовпадающих значений m. Область с $a>b$, соответствующая области abc на рис. 10, с ростом m прижимается к линии круговых дисков. В точке b рис. 10 и аналогичных точках на рисунках с другими m имеет место [3] равенство

$$a=(4\alpha^2/\beta^2-3)\,b \tag{7.3}$$

и соотношение (7.2). При этом выполняются и условия существования пылевого диска [3]. С учетом разложения (6.4а) и (2.8), получаем из (7.2), (7.3) параметры в точке, аналогичной b рис. 10 при малых k:

$$k^2=12/(19m+32),\quad f=2\,(19m+41)/[(3+m)\,(19m+32)]. \tag{7.4}$$

Чтобы k^2 было малым, в (7.4), требуются большие m. В пределе $m\to\infty$

$$k^2\simeq 12\,(1-32/19m)/19m,\quad f\simeq 2\,(1-48/19m)/m. \tag{7.5}$$

Таким образом, при $m\to\infty$ область с $a>b$ сжимается в полосу, прижатую к оси $l=1$, поэтому на рис. 6 с $m=10^3$ эта область не указана. При $m\to\infty$ узкая полоса с $a>b$ отделена от области решений с $b>a$ полосой, в которую превращается при $m\to\infty$ область, где решения отсутствуют, справа от ломаной $abcd$ на рис. 10. Устойчивость моделей:

в областях с $a>b$ дана на рис. 7а, 8а. Из сравнения с рисунками 2, 3, 4 для $m=10$, 1, 0.1 видно полное соответствие областей устойчивости. С уменьшением m, с правой стороны рисунков (линия ab на рис. 10) растет область апериодической неустойчивости. При $m\to\infty$ эта область мала и прижата к линии, аналогичной ab на рис. 10. Кроме того, большая часть этой области колебательно неустойчива, за исключением небольших областей в левом верхнем углу рисунков. Критические точки кругового «почти» одиночного диска с $\Omega=\Omega_{k2}$, Ω_{k4}, из которых появляются языки неустойчивости на рис. 1—5, влияют на устойчивость сжатых дисков с $a>b$ (рис. 7а, 8а). Точка $\Omega=\Omega_{k4}$, $f/f_{\rm llm}=0.09308$ с уменьшением m дает начало языку колебательной неустойчивости, а из точки $\Omega=\Omega_{k2}$, $f/f_{\rm llm}=0.1093$ выходит область колебательной неустойчивости в виде перемычки—продолжения «языка» неустойчивости вытянутого диска, соединяющей этот «язык» с областью колебательной неустойчивости сжатого диска с $a>b$.

Одиночная сплошная линия на рис. 6—8, не являющаяся границей областей различной неустойчивости, как и на рис. 1—4, отделяет области его нарушения. Аналогично (6.5), уравнение этой линии для сжатых дисков имеет вид с $f_{\rm llm}$ из (7.1)

$$
\begin{aligned}
l = r_{1}^{3}/x^{3} &= 0.5\,(f_{\rm llm}/f)\,(GM/a^{3}a_{0})\\
&= (1/3)\,(f_{\rm llm}/f)/\ln(4\alpha/\beta) \qquad \text{при } \beta/\alpha\to 0 \qquad (7.6)\\
&= (4/3\pi)\,(f_{\rm llm}/f)=0.424\,(f_{\rm llm}/f) \quad \text{при } \alpha=\beta.
\end{aligned}
$$

В отличие от вытянутого диска, кривая применимости для сжатого диска в переменных ($f/f_{\rm llm}$, β/α) является универсальной для всех m. Если $f/f_{\rm llm}$ в точке, аналогичной точке b на рис. 10, меньше, чем $f/f_{\rm llm}$ из (7.6) при том же β/α, то во всей области с $a>b$ приливное приближение оказывается применимым. Приближенно, используя разложение (6. 4а) для малых k, получаем из (7.6)

$$f/f_{\rm llm}=(4/3\pi)(1-3k^{2}/8), \tag{7.7}$$

тогда с учетом (7.4), (2.8) получаем уравнение для m, при котором точка, аналогичная b на рис. 10, лежит на кривой применимости

$$
\begin{aligned}
&19\,(1-4/3\pi)\,m^{2}+(91/2-356/3\pi)\,m-128/\pi=0,\\
&m^{2}+0.7066m-3.7256=0.
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Решение (7.8) с учетом (7.4) дает

$$m \simeq 1.61, \quad k^2 \simeq 0.19, \quad l^2 \simeq 0.81, \quad l \simeq 0.9. \tag{7.9}$$

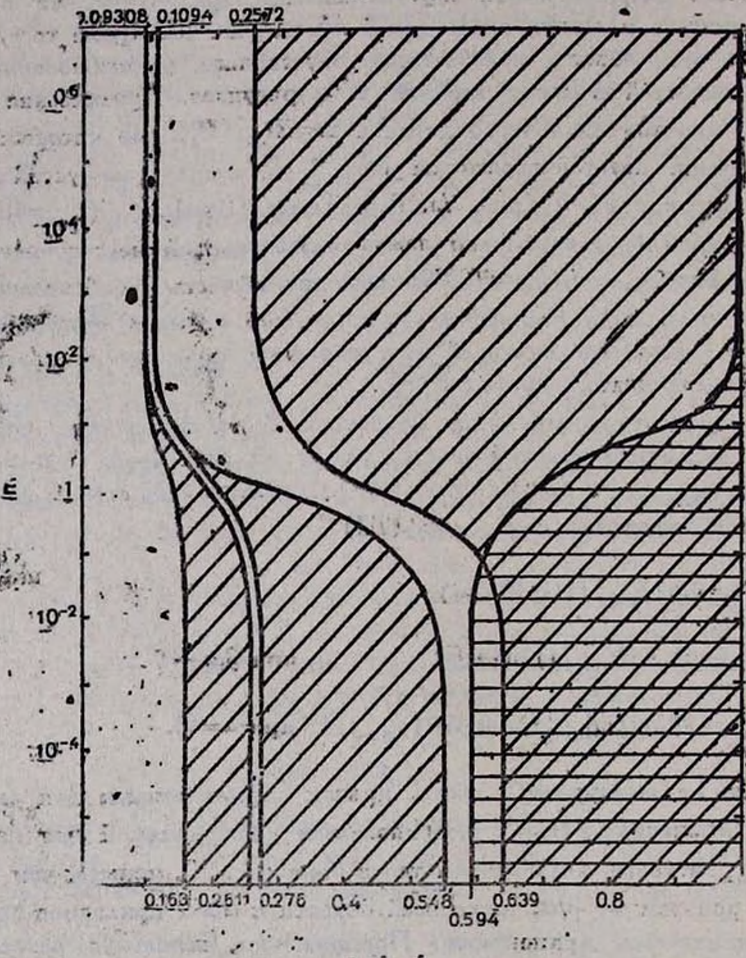


Рис. 11. Картина устойчивости круговых дисков в паре на плоскости m, $f/f_{\lim}$. Штриховка областей различной устойчивости соответствует рис. 1, 6, 7.

Таким образом, при $m<1.61$ во всей области с $a>b$ применимо используемое приливное приближение. Отметим, что в области сжатых дисков с $a>b$ отсутствуют изотропные решения.

б) *Область решений при* $b>a$. Границы устойчивости сжатых дисков в области, где $b>a$, гораздо более сложны, и топология областей неустойчивости существенно меняется с изменением m. В области существования решений для сжатых дисков можно выделить несколько характерных точек, параметры которых для различных m приведены в табл. 2. Здесь точки b и d соответствуют точкам на рис. 10. Точка d_1 лежит на прямой, выходящей параллельно оси f из точки d на пересечении ее с линией cd; точка d_m соответствует минимуму кривой cd. Точки d_2 и d_3, указанные в табл. 2 для $m=10^{-3}$, определяют масштабы на рис.8а и не имеют особого физического смысла.

Если обратиться к рис. 6 для $m=10^{-3}$, то можно заметить общие черты с рис. 1 для $m=10^5$ вытянутого диска. На обоих графиках виден треугольник в правом верхнем углу, где модели колебательно неустойчивы; почти совпадают кривые границы применимости и кривые изотропных состояний. хотя в верхней части графика, последняя кривая поворачивает налево для вытянутых дисков (рис. 1) и направо для сжатых (рис. 6). Кривая, отделяющая области устойчивости и апериодической неустойчивости также совпадают везде, кроме верхней части графика. Однако области эти меняются местами: при медленном вращении (левая часть графика) устойчивы вытянутые диски, а при быстром (правая часть) устойчивы сжатые диски. В верхней части графика на рис. 6 видно сложное образование, отсутствующее на рис. 1. Размер этой области, где различия между сжатым и вытянутым дисками велики, уменьшается с ростом m и в пределе $m\to\infty$ можно ожидать, что единственным отличием между соответствующими графиками будет перемена местами областей апериодической неустойчивости и устойчивости.

Кривая изотропных решений (штрих-пунктир), указанная на рис. 6, 7b, 8b, выходит из правого нижнего угла и заворачивает в точку. аналогичную d на рис. 10. Кривая изотропных решений для сжатых дисков, соответствующая $d_2=0$ в (2.9) с учетом (2.10), имеет вид в безразмерных переменных (6.1), опуская знак «$\sim$»

$$\begin{aligned} f&=2(1-l^2b_0)/[m-l^2(3+m)],\\ f/f_{\lim}&=m(1-l^2b_0)/[m-l^2(3+m)] \end{aligned} \tag{7.10}$$

для $f_{\lim}$ из (7.1). Для дисков, близких к круговым, с учетом (6.4а) имеем из (7.10)

$$f/f_{\lim}\simeq 0.25mk^2/[(3+m)k^2-3]. \tag{7.11}$$

Это выражение положительно только если $(3+m)\,k^2>3$, т. е. близкие к круговым диски могут быть изотропными только для больших m. Как

Таблица 2

ХАРАКТЕРНЫЕ ТОЧКИ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СЖАТОГО ДИСКА

m	f_b	$f_b/f_{\lim}$	l_b	f_{d_1}	$f_{d_1}/f_{\lim}$	$l_d = l_{d_1}$	f_{dm}	$f_{dm}/f_{\lim}$	l_{dm}	$f_{\lim}$
10^3	1.99426E−3	0.99713	0.999685	7.203E−4	0.36015	0.998005	1.125E−3	0.5625	0.997756	2E−3
10	0.1603	0.8015	0.9730	7.375E−2	0.36875	0.8396	0.1162	0.581	0.8223	0.2
1	0.6047	0.30235	0.8801	0.7455	0.37275	0.3999	1.25	0.625	0.3639	2
0.1	0.8735	4.3675E−2	0.8171	5.777	0.28885	0.1104	12.19	0.6095	8.883E−2	20
10^{-3}	0.9221	4.6105E−4	0.8054	3.017E2	0.15085	7.993E−3	1.109E3	0.5545	5.075E−3	2E3

$f_{d_2} = 20.75$; $f_{d_2}/f_{\lim} = 1.0375\text{E}-2$; $l_{d_2} = 0.04$,

$f_{d_3} = 1.436$; $f_{d_3}/f_{\lim} = 7.18\text{E}-3$; $l_{d_3} = 0.25$.

и в (6.4), при $m\to\infty$ и малом фиксированном k из (7.11), имеем $f/f_{\text{IIr}}=0.25$. В другом пределе (большое m фиксировано, $k\to 0$) из (7.11) получаем

$$f/f_{\text{IIm}} = 1 \quad \text{при } k^2 = 3/(3+0.75m) \simeq 4/m, \tag{7.12}$$

т. е. кривая изотропных состояний не достигает кругового диска, а заворачивает направо и упирается в ось $f/f_{\text{IIm}}=1$ при конечном k (см. рис. 6), в отличие от (6.4), рис. 1. Из рис. 6, 7b—8b видно, что кривая изотропных дисков входит в точку, аналогичную d на рис. 10. Действительно, в точке d имеем $\Omega^2=2a=2b$ (уравновешенный по обеим осям диск), что сводится с учетом (2.7) к соотношениям

$$f(1+m)-2+f=2b_0-2f, \quad f=2/m=2/(b_0-1). \tag{7.13}$$

Для больших m точка, аналогичная d на рис. 10 соответствует почти круговым дискам и с учетом (6.4а) имеем из (7.13) соотношение $k^2=4/m$, совпадающее с (7.12). Т. е. изотропное решение для сжатого диска действительно входит в точку d.

Общей чертой всех моделей сжатых дисков при $b>a$ на рис. 6—8 является апериодическая неустойчивость моделей, примыкающих к оси $f=0$, т. е. к линии одиночных дисков. Инкремент этой неустойчивости стремится к нулю при $f\to 0$ или $m\to\infty$. Наряду с этой областью из точки $f=0$, $l=1$ выходит область устойчивых решений. Эта область заметна на рисунках при $l>l_d$ из-за большого масштаба, где она имеет вид полосы, выходящей из левой верхней точки графика и примыкающей к области апериодической неустойчивости. В области $l<l_d$ эта область входит сверху в виде полосы, а затем топология ее зависит от m. Для малых m область устойчивости сильно расширяется и в нижней части графика на рис. 8b для $m=10^{-3}$ простирается вплоть до оси $f/f_{\text{IIm}}=1$ и точки, аналогичной d на рис. 10. Для $m=1$ полоса устойчивости заканчивается в центральной узловой точке (рис. 7b), где пересекаются границы многих областей. Ниже этой точки расположена область устойчивости, доходящая до оси $l=0$. На рис. 7b справа от центральной узловой точки видна входящая в нее малая область устойчивости. При переходе от $m=1$ к $m=10$ эта небольшая на рис. 7b область устойчивости сливается с областью устойчивости ниже узловой точки на рис. 7b и вырастает до больших размеров, оставляя справа область колебательной неустойчивости, а слева гранична с несколькими различными областями. При дальнейшем росте m (рис. 6, $m=10^3$) эта область занимает уже большую часть графика, примыкая к оси $f/f_{\text{IIm}}=1$. Первая область устойчивости при $m>1$ кончается в точке, где сливаются 4 различных области: справа колебательная неустойчивость, слева апериодическая (АН); дважды апериодическая неустойчивость (ДАН) в области, состоящей из двух дуг на рис. 6, $m=10^3$, в ДАН области дисперсионное уравнение (5.7) имеет два отрицательных корня ω^2. Отметим, что в узловой точке на рис. 7b при $m=1$ сходятся 8 различных областей: 3 устойчивых, 2 колебательно неустойчивых, 2 АН и 1 ДАН.

Проследим теперь за изменением области колебательной неустойчивости. При $m=10^3$ (рис. 6) в правом верхнем углу имеется треугольник колебательной неустойчивости, аналогичный соответствующей области вытянутого диска с большим m (рис. 1) и одиночного диска [5]. Кроме того, колебательная неустойчивость имеет место в узкой полосе, выходящей из правого верхнего угла, которая расширяется слева в интервале, расположенном над областью ДАН, а затем снова сужается, входя в правый верхний угол. Эта последняя область сверху ограничена кривой пылевых решений, а снизу—областью устойчивости и областью ДАН.

При $m=10$ правый «треугольник» спускается вниз, достигая оси $l=0$, сужаясь вверху и расширяясь снизу. Верхняя область колебательной неустойчивости расщепляется на две части областью ДАН. Левая часть продолжает выходить из левого верхнего угла, а правая—из правого верхнего. Обе части при этом сильно увеличиваются в размерах. При переходе от $m=10$ к $m=1$ происходит слияние двух областей, выходящих из правого верхнего угла (рис. 7b). Отметим, что в процессе слияния этих областей сначала происходит их перекрытие, а затем часть слева как бы вытесняет правую, оккупируя всю правую область на рис. 7b для $m=1$. В области «перекрытия» для небольшого интервала масс внутри отрезка $m=(1, 10)$ появляется область двойной колебательной неустойчивости (№ 9 в табл. 1), которая была обнаружена в [7] при исследовании устойчивости уравновешенных дисков. В данной работе примеры таких областей отсутствуют.

Левая часть при $m=1$ остается отделенной от двух слившихся областей узловой точкой (рис. 7b). При $m=0.1$ в результате расщепления этой узловой точки происходит слияние всех областей колебательной неустойчивости в одну, которая выходит из левой верхней точки и занимает всю правую ось. Часть этой области оказывается также апериодически неустойчивой (рис. 7b). При малом $m=10^{-3}$ (рис. 8b) эта область резко уменьшается, занимая узкую полосу, выходящую из точки $l=1$ $f=0$ и непрерывно следующую в правую верхнюю точку, аналогичную d на рис. 10. Эта полоса внизу граничит с областью устойчивости, а вверху с кривой пылевых решений и с областью ДАН. Последняя проходит в область с $l>l_d$, но не доходит до точки $l=1$, $f=0$ и заканчивается при $l\simeq 0.35$, $f/f_{lim}\simeq 0.6$ на рис. 8а, $m=10^{-3}$.

Характерным для дисков в двойных системах является наличие областей АН, отсутствующих у одиночных дисков, причем для сжатых дисков, в отличие от вытянутых, имеются и области ДАН. При больших $m=10^3$ левая область АН, обсуждавшаяся выше, имеет небольшую «нашлепку» ДАН, отмеченную стрелкой на рис. 6. При $m=10$ область ДАН сильно деформируется: из нее вытягивается «язык», разделяющий область АН на две части и доходящий до линии нулевых решений типа cd на рис. 10. Кроме того, остается очень маленькая область ДАН внутри криволинейного треугольника. При $m=1$ треугольник с ДАН исчезает, но другая область ДАН значительно увеличивается, причем при $m=1$ правая часть области ДАН становится областью АН из-за перехода одного корня ω^2 уравнения (5.7) в положительную сторону. Структура этих областей ДАН и АН не меняется при переходе к $m=0.1$ и далее к $m=10^{-3}$ (рис. 8b): слева область ДАН, справа АН, но в правой части рис. 8b ДАН область переходит в узкую полосу, идущую в точку, аналогичную b, рис. 10.

Если ограничиться рассмотрением областей, в которых применимо приливное приближение, то там устойчивость относительно квадрупольных возмущений имеет место только в сравнительно узкой полосе, выходящей из точки $l=1$, $f=0$ [10].

8. *Устойчивость дисков в сфероидальном гало.* Используем безразмерные переменные (6.1), но вместо m и f, учитывая $h_x=h_y=h$, введем

$$\tilde{\Omega}'=\Omega/\sqrt{a_0},\quad \chi=h/a_0. \tag{8.1}$$

Для сферического гало массы M_h и радиуса α имеем $h=GM_h/(2\alpha^3)$. Учтя a_0 из (6.4а) для кругового диска того же радиуса, получим, что в этом случае величина χ есть

$$\chi=h/a_0=4M_h/(3\pi M). \tag{8.1a}$$

Опуская знак «$\sim$», имеем из (2.4)

$$a=1+\chi,\quad b=b_0+\chi,\quad b>a. \tag{8.2}$$

Предельное значение Ω достигается при $\Omega^2=2a$ и в безразмерных единицах равно

$$\Omega^{2\prime}_{lim}=2(1+\chi). \tag{8.3}$$

Как показано в [3], на плоскости $(l,\ \Omega^2/\Omega^2_{lim})$ область существования решений (2.9) занимает всю плоскость при $\chi<1/2$, а при $\chi>1/2$ появляется кривая пылевых решений $A=0$ из (2.10), выше которой решения отсутствуют в силу $A<0$ (см. рис. 9с). С учетом (2.10), (6.1), (8.1), (8.2) кривая пылевых решений $A=0$ примет вид (в безразмерном виде) [17].

$$\Omega^2=\chi+(1-l^2b_0)/(1-l^2)\pm\{[(1+\chi)^2-\\-l^2(b_0+\chi)^2]/(1-l^2)\}^{1/2}. \tag{8.4}$$

Кривая (8.4) пересекает ось $l=1$ в точках

$$\Omega^2=\chi+1/4\pm[(\chi+1/4)^2-9/16]^{1/2}, \tag{8.5}$$

при этом учтено (6.4а). Граница существования пылевых решений по параметру χ следует из равенства нулю корня в (8.5)

$$\chi=1/2. \tag{8.6}$$

Кривая $l^2\Omega^2)$ имеет минимум при равенстве нулю корня в (8.4), т. е. при [17]

$$\begin{gathered} l^2=(1+\chi)^2/(b_0+\chi)^2, \\ \Omega^2=[(b_0+\chi)^2-b_0(1+\chi)^2]/[(b_0+\chi)^2-(1+\chi)^2]. \end{gathered} \tag{8.7}$$

Как следует из (8.5), (8.3), при $\chi=1/2$ пылевые решения возникают в точке

$$\Omega^2=\chi+1/4=3/4, \quad \Omega^2/\Omega^2_{\lim}=1/4. \tag{8.8}$$

Кривая изотропных решений (штрихпунктирная линия на рис. 9) следует из условия $d_2=0$ в (2.9), (2.10) и уравнение для нее, с учетом (8.2), (6.4а, б), запишется в виде [17]

$$\begin{aligned} \Omega^2&=2\chi+2(1-b_0l^2)/(1-l^2)=1/2+2\chi \quad \text{при} \quad l=1,\\ &=2+2\chi \quad \text{при} \quad l=0. \end{aligned} \tag{8.9}$$

С учетом (8.3) получаем

$$\begin{aligned} \Omega^2/\Omega^2_{\lim}&=(1/4+\chi) \quad \text{при} \quad l=1,\\ &=1 \quad \text{при} \quad l=0. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Т. о., кривая изотропных решений выходит из правого нижнего угла на рис. 9 и приходит на ось $l=1$ при значении $\Omega^2/\Omega_{\lim}>0$.

Картина устойчивости дисков в сфероидальном гало значительно проще, чем для дисков в парах. Гало оказывает стабилизирующее воздействие и при $\chi = \chi_0 = 1/2$ приводит к исчезновению колебательной неустойчивости в правом верхнем углу. Между $0 < \chi < 1/2$ размер области неустойчивости монотонно уменьшается (см. рис. 9 и рис. 1). Исчезновение колебательной неустойчивости дисков при увеличении гало исследовано в [7] для наиболее неустойчивых уравновешенных дисков. С учетом (8.1а) исчезновение колебательной неустойчивости для самых нестабильных, круговых дисков наступает [7] при $M_n = 3\pi\chi_0 M/4 = 3\pi M/8 = 1.18M$.

Наличие гало приводит к появлению области апериодической неустойчивости, начинающейся в кратной точке кругового диска. Решение (2.9) в пределе кругового одиночного диска без гало имеет однозначный предел при d_2 из (2.10), равном $(h \to 0)$:

$$d_2 = \alpha^2 (1 - 2\Omega^2/a_0)/3 + 4\alpha^2 h/3a_0, \tag{8.11}$$

в отличие от диска в паре, где предел зависит от порядка стремления к нулю m и k (см. Прилож. 1). Выражение (8.11) верно для кругового диска с произвольным h. Скорость вращения системы координат в пределе кругового одиночного диска соответствует Ω_r из Прилож. 1, а дисперсионное уравнение имеет вид (П24). При $\Omega^2 = 5/12$ уравнение (П24) имеет кратный нулевой корень, который является источником появления апериодической неустойчивости для некруговых дисков в гало. Отметим, что круговые диски в гало всегда являются апериодически устойчивыми и имеют только кратный нулевой корень, положение которого перемещается от $\Omega^2 = 5/12$ для $\chi = 0$ до $\Omega^2 = 3/4$ для $\chi = 1/2$. Это соответствует

$$\begin{aligned} \Omega^2/\Omega^2_{lim} &= 5/24 \quad \text{для} \quad \chi = 0, \\ \Omega^2/\Omega^2_{lim} &= 1/4 \quad \text{для} \quad \chi = 1/2, \end{aligned} \tag{8.12}$$

с учетом (8.3). В точке кратного нулевого корня начинаются пылевые решения при $\chi = 1/2$. При $\chi > 1/2$ появляется кривая пылевых решений, в нижнюю часть которой перемещается область апериодической неустойчивости.

Отметим, что в системе координат, соответствующей $d_2 = -1$, скорость вращения кругового диска в точке кратных корней (8.12) соответствует (см. (П25))

$$\begin{aligned} &\Omega_1^2 = \Omega_r^2 (5 - 4\Omega_r^2)^2/9 = 5^3/3^5, \\ &\Omega_r^2 = 5/12, \quad \Omega_1^2/\Omega^2_{lim} = 5^3/(2 \cdot 3^5) = 0.2572. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Данная скорость вращения соответствует Ω_{k1} из (П12), являющейся границей колебательной неустойчивости дисков в паре (см. рис. 1).

9. *Выводы.* а) Показана возможность существования устойчивых сжатых галактических дисков в сильном приливном поле гигантских галактик. Вытянутые диски в таком сильном поле неустойчивы. Форма спутников гигантской эллиптической галактики NGC 4406 (M86) в скоплении галактик Дева, наблюдаемых в виде сжатых эллипсов, может быть объяснена данной моделью. Метод проверки реальности такого сжатия и его отличия от эффекта проекции рассмотрен в [19].

б) Сфероидальное гало стабилизирует колебательную неустойчивость эллиптических дисков. При этом оно приводит к появлению апериодической неустойчивости диска, занимающей ограниченную область параметров.

в) Показано, что в эллипсоидальном гало эллиптический диск может быть неустойчив относительно дипольных возмущений, при которых центр тяжести диска, не меняющего свою форму, сдвигается относительно неподвижного центра гало, как желток в белке.

г) Прослежена картина изменения устойчивости эллиптических дисков галактик относительно квадрупольных возмущений в приливном поле двойных галактик для широкого диапазона отношений масс галактик, их взаимных расстояний и отношений полуосей дисков. Наиболее сложной является изменение картины устойчивости сжатых эллиптических дисков

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ПЕРЕХОД ДЛЯ КРУГОВОГО ДИСКА ($\alpha=\beta$) ОТ ПАРЫ К ОДИНОЧНОМУ ПРЕДЕЛУ ПРИ $m\to\infty$

Используем обозначения

$$f_{\text{IIm}}=2/(3+m),\quad \tilde{f}=f/f_{\text{IIm}},\quad \tilde{\Omega}=\Omega/\sqrt{a_0}, \tag{П1}$$

где m и f определены в (6.1). При равновесии кругового диска безразмерная угловая скорость $\tilde{\Omega}$ есть

$$\tilde{\Omega}^2=f(1+m)=2\tilde{f}(1+m)/(3+m)\to 2\tilde{f}\quad \text{при } m\to\infty. \tag{П2}$$

Наряду с безразмерными величинами в (П1), (П2), (6.1) введем дополнительно

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\omega} = \omega/\sqrt{a_0},\\
&\tilde{d}_2 = d_2/a^2 \quad \text{из} \quad (2.10),\\
&\tilde{\omega}_1 = \omega_1/\sqrt{a_0} \quad \text{из} \quad (3.14),\\
&\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1/\sqrt{a_0}, \quad \tilde{\Delta}_2 = \Delta_2/\sqrt{a_0} \quad \text{из} \quad (3.19),\\
&\tilde{k}_1 = k_1/\sqrt{a_0}, \quad \text{из} \quad (4.8),\\
&\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1/a_0, \quad \tilde{A}_1 = A_1/(a_0\sqrt{a_0}), \quad \tilde{B}_1 = B_1/(a_0\sqrt{a_0}) \quad \text{из} \quad (5.6),\\
&\tilde{A}_{ik} = A_{ik}/a_0^3 \quad \text{из} \quad (5.8), \quad i,\ k = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
\tag{П3}
$$

В дальнейшем изложении знак «~» везде опускается, т. к. используются только безразмерные величины. Для одиночного предела $m \to \infty$ кругового диска имеем

$$
\begin{aligned}
&a = b = 1 \quad (\text{из } (6.1));\\
&d_2 = -1;\\
&\omega_1 = \sqrt{2} - \Omega, \quad \omega_2 = -\sqrt{2} - \Omega;\\
&\delta_1 = \delta_2 = 1 \quad (\text{из } (3.16));\\
&\Delta_1 = \Delta_2 = \omega_2 - \omega_1 = -2\sqrt{2};\\
&k_1 = k_3 = -\omega_2, \quad k_2 = k_4 = -\omega_1;\\
&A_1 = 3\omega_1/2, \quad A_2 = 3\omega_2/2, \quad A_3 = 3(\omega_1 + \omega_2)/2, \quad A_4 = 3(\omega_1 - \omega_2);\\
&B_1 = -3\omega_1/2, \quad B_2 = -3\omega_2/2, \quad B_3 = -3(\omega_1 + \omega_2)/2, \quad B_4 = 3(\omega_1 - \omega_2);\\
&A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0, \quad A_{14} = 9\omega_1(\omega_1 - \omega_2), \quad A_{24} = 9\omega_2(\omega_1 - \omega_2),\\
&A_{34} = 9(\omega_1^2 - \omega_2^2) = -36\Omega\sqrt{2}.
\end{aligned}
\tag{П4}
$$

Переходя к пределу $m \to \infty$ в дисперсионном уравнении (5.7), получаем с учетом (П2)—(П4) дисперсионное уравнение для квадрупольных колебаний одиночного кругового диска, разбивающееся на две части, (П5) и (П6):

$$\omega^2 - 2 = 0, \tag{П5}$$

$$\omega^6 - (10 + 12\Omega^2)\omega^4 + (48\Omega^4 + 72\Omega^2 + 75)\omega^2 - 64\Omega(2 - \Omega^2)^2 = 0. \tag{П6}$$

Представив (П6) в виде

$$[\omega^3 - (5 - 12\Omega^2)\,\omega]^2 = [6\omega\Omega^2 - 8\Omega\,(2 - \Omega^2)]^2, \tag{П7}$$

и извлекая корень из обеих частей (П7), получаем два уравнения

$$\omega^3 - (5 - 12\Omega^2)\,\omega \pm [6\omega\Omega^2 - 8\Omega\,(2 - \Omega^2)] = 0. \tag{П8}$$

Заменой

$$\omega = \omega' \mp 2\Omega, \tag{П9}$$

получаем из (П8)

$$\omega'^3 - 5\omega' \mp 6\Omega = 0. \tag{П10}$$

Это совпадает с соответствующим уравнением для одиночного диска из [9], где использовалось изотропное равновесное решение, следующее из (3.1) при $d_2=0$. Отметим, что для одиночного кругового диска с решением, следующим из (3.1), предельным переходом, всегда имеется угловая скорость вращения системы координат, в которой решение является изотропным. Найдем характерные значения Ω для дисперсионного уравнения (П5), (П6).

а) Кратные корни в (П8), (П10) при одном и том же знаке, $\Omega=\Omega_{k1}$. Воспользуемся (П10), которое в этом случае представимо в виде

$$(\omega' - \alpha)^2 (\omega' - \beta) = \omega'^3 - 5\omega' \mp 6\Omega_{k1} = 0. \tag{П11}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} &2\alpha + \beta = 0, \quad \beta = -2\alpha; \\ &\alpha^2 + 2\alpha\beta = -5, \quad \alpha^2 = 5/3, \quad \alpha = \mp (5/3)^{1/2}, \quad \beta = \pm 2\,(5/3)^{1/2}, \\ &\alpha^2\beta = +6\Omega_{k1}, \quad \Omega_{k1} = \pm (1/3)\,(5/3)^{3/2}; \\ &\alpha^2\beta = -6\Omega_{k1}, \quad \Omega_{k1} = \mp (1/3)\,(5/3)^{3/2}; \\ &\Omega_{k1}^2 = 5^3/3^5. \end{aligned} \tag{П12}$$

Соответствующее значение f из (П2) есть

$$f_{k1} = \Omega_{k1}^2/2 = 125/486 = 0.2572 \tag{П13}$$

б) Равенство корней в уравнениях (П8), (П10) с различными знаками $\Omega=\Omega_{k2}$.

В этом случае одинаковые корни имеют уравнения

$$\begin{aligned} &\omega^3 - (5 - 12\Omega_{k2}^2)\,\omega + 6\Omega_{k2}\,\omega^2 - 8\Omega_{k2}\,(2 - \Omega_{k2}^2) = 0, \\ &\omega^3 - (5 - 12\Omega_{k2}^2)\,\omega - 6\Omega_{k2}\,\omega^2 + 8\Omega_{k2}\,(2 - \Omega_{k2}^2) = 0. \end{aligned} \tag{П14}$$

Отсюда

$$\omega^2 = 5 - 12\,\Omega_{k2}^2 = (4/3)\,(2 - \Omega_{k2}^2). \tag{П15}$$

Решение (П15) относительно Ω_{k2} дает

$$\Omega_{k2}^2 = 7/32, \quad f_{k2} = 7/64 = 0.109375. \tag{П16}$$

в) Кратные корни в двойной системе, $\Omega = \Omega_p$, $P = k3,\ k4$.
Если значение $\omega = \pm\sqrt{2}$ является корнем одного из уравнений (П8), то возникает кратность с (П5), связанная с наличием второго компаньона. Подставляя $\omega = \pm\sqrt{2}$ в (П8), имеем

$$\begin{gathered}\pm 2\sqrt{2} \mp (5 - 12\Omega_p^2)\sqrt{2} + [12\Omega_p - 8\Omega_p(2 - \Omega_p^2)] = 0,\\ \pm 2\sqrt{2} \mp (5 - 12\Omega_p^2)\sqrt{2} + [12\Omega_p + 8\,\Omega_p(2 - \Omega_p^2)] = 0,\end{gathered} \tag{П17}$$

что сводится к двум уравнениям

$$8\Omega_{k3}^3 + 12\sqrt{2}\,\Omega_{k3}^2 - 4\,\Omega_{k3} - 3\sqrt{2} = 0, \tag{П18}$$

$$8\Omega_{k4}^3 - 12\sqrt{2}\Omega_{k4}^2 - 4\Omega_{k4} + 3\sqrt{2} = 0. \tag{П.19}$$

Действительные решения (П18), (П19), соответственно, равны

$$\Omega_{k3} = 0.549, \quad f_{k3} = 0.1507; \quad \Omega_{k4} = 0.4315, \quad f_{k4} = 0.09308. \tag{П20}$$

г) Нулевые кратные корни, $\Omega = \Omega_{k5}$

при

$$\Omega^2 = 2 = \Omega_{k5}^2 \tag{П21}$$

уравнение (П6) имеет кратный нулевой корень.

Отметим, что влияние на корни дисперсионного уравнения оказывают кратные корни при $\Omega = \Omega_{k1}$, Ω_{k2}, Ω_{k4}, Ω_{k5}; кратность корня при $\Omega = \Omega_{k3}$ на устойчивость не влияет. Области различной устойчивости (см. табл. 1) кругового диска в паре приведены на рис. 11. Они построены на основе численного решения общего дисперсионного уравнения (5.7). При $\Omega > \Omega_{k1}$, $f > 0.2572$ лежит область колебательной неустойчивости одиночного кругового диска, для которого решение имеет вид (3.1) с $d_2 = -1$. Значения $\Omega = \Omega_{k2}$, Ω_{k4} соответствуют точкам ветвления, из которых выходят колебательно неустойчивые решения круговых дисков в паре (рис. 11), а также дисков малой сплюснутости в парах с маломассивным спутником (рис. 1, 2).

д) Другой предельный переход к одиночному круговому диску.

Если положить в решении (3.1) $M_2=0$, а затем перейти к пределу одиночного кругового диска от одиночного эллиптического, то получим [17]

$$d_2 = \sigma^2(1 - 2\Omega^2/a_0)/3. \tag{П22}$$

Получение предельного решения из общего (5.7) для этого случая затруднительно. Повторяя всю процедуру получения общего дисперсионного уравнения (5.7) для одиночного кругового диска с решением (3.1) при d_2 из (П22), получаем дисперсионное уравнение с использованием безразмерных ω из (П3) и Ω из (П1) в виде

$$\omega^2[\omega^2 + 12^2 - 5\Omega)^2 - 36\omega^2\Omega^2] = 0. \tag{П23}$$

Выражение в квадратных скобдах (П23) сводится к уравнению

$$\omega^4 - (12\Omega^2 + 10)\,\omega^2 + (12\Omega^2 - 5)^2 = 0, \tag{П24}$$

которое точно совпадает с соответствующим уравнением, полученным в [5].

Дисперсионные уравнения (П6) и (П23) описывают один и тот же круговой диск, но расположенный в системах координат, вращающихся с разной угловой скоростью. Обозначим угловые скорости вращения систем координат, где дисперсионные уравнения имеют вид (П6) и (П23) через Ω_1 и Ω_r соответственно. Система координат, в которой функция распределения изотропна, вращается с угловой скоростью Ω_1, связанной с этими скоростями соотношениями

$$\Omega_1 = \Omega_1 - 2\Omega_1 = -\Omega_1, \quad \Omega_1 = \Omega_r + 2\Omega_r(1 - 2\Omega_r^2)/3 = \Omega_r(5 - 4\Omega_r^2)/3, \text{ т. е.}$$

$$\Omega_1 = -\Omega_r(5 - 4\Omega_r^2)/3. \tag{П25}$$

Граничной скорости вращения $\Omega_1 = \Omega_{k1} = \pm(1/3)(5/3)^{3/2}$ соответствует граничное значение $\Omega_{rk1} = \pm(5/3)^{1/2}$ и $f_{rk1} = \Omega^2_{rk1}/2 = 5/6 = 0.8333$. Значение Ω_{rk1} следует из (П24) и связано с Ω_{k1} соотношением (П25).

Одиночный некруговой диск стационарен только в одной системе координат, вращающейся со скоростью Ω_r. Все исследуемые здесь на устойчивость решения стационарны, поэтому модели с маломассивными спутниками на рис. 1, 6, при $m \to \infty$, вращаются с угловой скоростью Ω_r. Однако предельный переход к круговому диску при фиксированном (хотя и очень большом) m приводит к диску, вращающемуся с угловой скоростью Ω_1 которой также стационарен, т. к. круговой диск стационарен при любом вращении координатной системы. Чем больше m, тем ближе скорость вращения некругового диска к Ω_r и тем более узок переходный слой от Ω_r к Ω_l. На рис. 1 этот слой почти превратился в линию.

Институт космических исследований
АН России

STABILITY OF ELLIPTICAL STELLAR DISKS

II. GENERAL SOLUTION WITH QUADRATIC GRAVITATIONAL POTENTIONAL

G. S. BISNOVATYI-KOGAN

The stability of elliptical disks is investigated in pairs and inside a uniform halo. A density distribution giving quadratic gravitational potential of the disk was considered. Account of tidal forces in binaries and the uniform halo does not violate the quadratic form of the potential. Quadrupole and dipole perturbations have been investigated. The dipole instability of elliptical disks in ellipsoidal halo was obtained. Elliptical disks in binaries may be elongated and compressed relative to the companion. At low mass companions the elongated disks are stable at slow rotation and compressed disks at the rapid one. The regions if various stability are constructed for quadrupol disk perturbations in binaries and inside spheroidal halos for different masses, distances between companions, axis ratios.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. C. Freeman*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 134, 15, 1966.
2. *G. S. Bisnovatyi-Kogan*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 174, 203, 1976.
3. *Г. С. Бисноватый-Коган*, Астрофизика, 19, 65, 1983.
4. *С. Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
5. *S. Tremaine*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 175, 557, 1976.
6. *A. Kalnajs*. Astrophys. J., 175, 63, 1972.
7. *Г. С. Бисноватый-Коган*, Астрофизика, 20, 547, 1984 (работа I).
8. *В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман*, Астрон. ж., 50, 97, 1973.
9. *В. Л. Поляченко, А. М. Фридман*, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Наука, М., 1976.
10. *G. S. Bisnovatyi-Kogan*, Proc. School-Workshop „Plasma Astrophysics", Sukhumi, USSR, May 1986; ESA SP—251, p. 21.
11. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, в сб. «Динамика и эволюция звездных систем», ВАГО ГАО, М.—Л., 1975, стр. 138.

12. *Г. С. Бисноватый-Коган,* Астрофизика, 21, 87, 1984
13. *Г. С. Бисноватый-Коган,* Письма в Астрон. ж., 10, 181, 1984.
14. *M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker,* Ядерный синтез, дополнение ви 1. 1962, стр. 143.
15. *Г. С. Бисноватый-Коган,* Астрофизика, 7, 121, 1971.
16. *Ф. Морс, Г. Фешбах,* Методы теоретической физики, т. 2, ИЛ, М., 1960 стр. 283.
17. *Г. С. Бисноватый-Коган,* Препр. ИКИ, Пр-722, 1982.
18. *Г. С. Бисноватый-Коган,* Астрофизика, 19, 377, 1983.
19. *Н. Я. Сотникова,* Вестн. ЛГУ, сер. 1: мат. мех., астрон., вып. 1, 97, 1990.