АСТРОФИЗИКА

ТОМ 35 АВГУСТ, 1991 ВЫПУСК 1

УДК: 52-862

УСТОЙЧИВОСТЬ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ДИСКОВ И КОЛЕЦ

В.Л.ПОЛЯЧЕНКО

Поступила 31 июля 1991
Принята к печати 15 августа 1991

Рассмотрены спиральные возмущения произвольной степени закрученности в газовых и звездных дисках. В частности, получены минимальные значения запаса устойчивости Тоомре Q, гарантирующие полную устойчивость дисков, т.е. отсутствие возмущений, нарастающих даже в течение какого-то ограниченного промежутка времени. Для плоской кривой вращения соответствующие значения Q равны: $Q = \sqrt{3}$ в газовом диске и $Q=3$ в звездном случае. Самые неустойчивые возмущения для параметров звездного диска, типичных для солнечной окрестности Галактики, отвечают четырехрукавным спиралям: $m = 4$. Выведено приближенное дисперсионное уравнение, описывающее возмущения в тонких гравитирующих кольцах. Для случая системы из двух колец выявлена близкая аналогия с потенциальными колебаниями электронной плазмы, что позволяет воспользоваться выведенными в физике плазмы общими критериями пучковой неустойчивости. Исследование некоторых простейших моделей пары, вообще говоря, различных колец позволило существенно смягчить оценку необходимой неустойчивости массы тонкого кольца, по сравнению с изучавшимся ранее случаем двух одинаковых колец. Обосновывается предположение, что азимутальное структурирование ("клампировка") некоторых колечек внутри щели Энке, в непосредственной близости от внутреннего края А - кольца Сатурна, есть следствие развития исследуемого аналога пучковой неустойчивости (в нелинейном режиме).

1. Введение. Вопрос об устойчивости гравитирующего диска или кольца возникает в связи с множеством астрофизических проблем: в теории спиральной структуры галактик, в различных теориях эволюции протопланетных и аккреционных дисков, планетных колец и их систем и т.д. Современная разработка этого вопроса была начата в шестидесятые годы, в первую очередь в рамках теории галактических спиральных волн. Речь идет, в частности, о получивших широкую известность работах Тоомре [1] и Лина и Шу [2]. В них были выведены дисперсионные уравнения, описывающие малые возмущения тонкого диска (газового или звездного). При этом использовались приближения, принятые в теориях ВКБ-типа, т.е. считалось, что масштаб возмущения много меньше характерного масштаба неоднородности. Кроме того, в этих работах предполагалось, что радиальная длина волны возмущения гораздо меньше, чем азимутальная, т.е. в случае возмущений спиральной формы такая теория правильно описывает лишь так называемые туго закрученные спира-

ли. До тех пор, пока спиральный узор Галактики (а нужно сказать, что теория Лина и Шу предназначалась прежде всего для описания Галактики) считался состоящим из двух тугозакрученных рукавов, таковой подход оправдывал себя. В последнее десятилетие, однако, выяснилось, что это не так: внешняя спиральная картина Галактики (за солнечным кругом) определенно четырехрукавная (Блитц [3]), да и внутренняя структура, возможно, тоже не является двухрукавной. Например, Петровская [4] приходит к выводу о том, что число (m) спиралей внутри солнечного круга также вероятнее всего равно четырем: m=4. Переход от возмущений с m=2 к возмущениям с m=4, вынужденный под давлением наблюдательных данных, меняет всю картину качественно. Разумеется, при этом в несколько раз увеличивается оценка угла наклона спиралей (1), т.е. степени их открытости, по сравнению с принятой в двухрукавной картине. Линдбладовские резонансы между которыми, согласно теории Лина и Шу, должна находиться "главная часть" спиральной структуры (и влиянием которых в основном пренебрегается), в галактиках типа нашей * сильно разнесены лишь для двухрукавных возмущений, для всех остальных возмущений эти резонансы расположены близко друг к другу; размах эпициклических колебаний звезд, вообще говоря, сравним с расстоянием между резонансными окружностями (т.е. резонансы могут в этом смысле перекрываться).

Есть также и другие причины, делающие актуальной задачу об устойчивости "косых" возмущений - для которых $m \neq 0$ и параметр $s = m/k_r r = k_\psi/k_r$ (k_r и k_ψ - радиальное и азимутальное волновые числа, соответственно), вообще говоря, произволен. Дело в том, что возмущения, нарушающие исходную аксиальную симметрию диска, как правило, более неустойчивы (точнее, они труднее поддаются стабилизации). В рамках точно решаемых бесстолкновительных и гидродинамических моделей гравитирующего диска с твердотельным вращением это впервые было показано в работах автора и Шухмана [5]**. Хантеру [6] (см. также [7]) принадлежит простое, но важное замечание, что в дифференциально вращающихся бесстолкновительных дисках "косые" моды, волновые фронты которых имеют отличное от нуля азимутальное направление распространения, должны быть более неустойчивыми по сравнению с чисто-радиальными просто ввиду того, что, согласно известному линдбладовскому соотношению между дисперсиями скоростей в радиальном (c_r) и азимутальном (c_ψ) направлениях, $c_\psi = k\, c_r / 2\,\Omega$, реально всегда $c_\psi < c_r$ по крайней мере для дисков: $k^2 = 4\Omega^2 + r\, d\Omega^2/dr$, $\Omega' < 0$. Это значит, что система в азимутальном направлении является более холод-

---

* Для которых почти постоянна линдбладовская комбинация

$L(r) = \Omega(r) - k(r)/2$: $L(r) = \mathrm{const}$

** В частности, в этих работах было обращено внимание на выделенность бар-моды, соответствующей превращению круга в эллипс.

ной, а, следовательно, и более неустойчивой "по Джинсу".

Этого аргумента, однако, нет в случае газового диска, как и для твердотельно-вращающегося звездного диска (с изотропным давлением). Недостаточность стандартной теории устойчивости дифференциально-вращающегося газового диска, в которой предполагается $s \ll 1$ (приближение тугозакрученных спиралей), можно усмотреть, исходя уже из результатов самой этой теории. Аналитическая теория устойчивости диска для возмущений с $s \neq 0$, $s \ll 1$, построена в работах [8-10]. Получающийся в ней критерий устойчивости можно записать, например, в виде:

$$c_s^2 > c_0^2 (1 - 2 s^2 r (\Omega^2)'/k^2),$$

где c_s - скорость звука, c_0=const. Из этой формулы видно, что при увеличении s^2 для подавления неустойчивости требуются большие c_s. В этой ситуации очевидно, что ответ на главный для теории устойчивости вопрос - об условиях существования полностью устойчивого диска - лежит за рамками такой теории. Механизм гравитационного (джинсовского) сжатия в случае "косых" возмущений не является уже единственной причиной неустойчивости: здесь действует еще и другой механизм, связанный с перераспределением углового момента системы. Этот механизм подробно рассматривался, например, Линден-Беллом и Калнайсом [11] (см.также в [12,13]).

Можно ожидать, что возмущения с $s \gg 1$ ($k_\varphi \gg k_r$) устойчивы, а наиболее неустойчивыми являются возмущения с $s \sim 1$ (как для бармоды, если под k_r в этом случае понимать $|\partial \ln \Phi / \partial r|$).

Сказанное подтверждается результатами исследования локализованных возмущений в газовом диске при произвольных значениях s, выполненного нами ранее [14,15]. Мы кратко излагаем эти результаты в разделе 2, так как они полезны для сравнения со случаем звездного диска (раздел 3).

В этой статье принят простейший, локальный подход: рассматриваются возмущения в газовых и звездных дисках, локализованные вблизи некоторого радиуса $r_0 : r \approx r_0$, $|r - r_0|/r_0 \ll 1$. Такое приближение существенно упрощает дело, позволяя провести все исследование аналитически. В то же время глобальные моды поддаются анализу лишь с помощью различного рода численных методов (исключая сверхупрощенные модели наподобие твердотельно-вращающихся дисков-см. в [12,13]). Следует, однако, ожидать, что, имея простые критерии локальной устойчивости при любых значениях введенного выше параметра s, можно с достаточной уверенностью предсказывать также и свойства глобальных мод. В разделе 4 рассматриваются во многом родственные дисковым кольцевые системы. Приводятся как результаты исследования одиночного кольца, так и пары близких колец.

2. Газовые диски. Локальная устойчивость газовых дисков относительно спиральных возмущений с произвольной степенью закрутки (т.е. для любых значений параметра s) исследовалась нами ранее в [14,15]. Поэтому здесь приведем только основные результаты (они понадобятся нам ниже). Полученное в [14,15] условие маржинальной устойчивости выглядит следующим образом:

$$Q_g^2 = 4\,(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2 + g^2\,\bar{\lambda}^4 - 3\,k^2 g^4\,\bar{\lambda}^6 / 16\,\Omega^2)\,, \qquad (1)$$

где $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_c$, $\lambda = 2\pi/k$ - длина волны возмущения , $\lambda_c = 4\pi^2 G\sigma_o/k^2$- критическая длина волны Тоомре, k -эпициклическая частота, σ_o -поверхностная плотность диска, G - гравитационная постоянная, $g^2 = 8\,r\,|\,(\Omega^2_o)'\,|\,k^2_\psi\,(\pi G\sigma_o)^2/k^6$ - безразмерный параметр, с помощью которого учитывается неаксиальность возмущения $(k_\psi = m/r \neq o)$, $\alpha^2 = 2\,\Omega\,/\,r\,|\,\Omega'\,|$ - параметр, характеризующий степень дифференциальности вращения, $Q_g = k\,c_s\,/\pi G\sigma_o$ -параметр устойчивости Тоомре, c_s -скорость звука.

При $Q_g > 1$ все радиальные (m=0) возмущения газового диска становятся устойчивыми. Нерадиальные ($m \neq 0$) возмущения являются, однако, более неустойчивыми и стабилизируются лишь при значениях параметра Q_g , существенно превышающих единицу.

Отметим, что уравнение (1) фактически содержалось, в несколько завуалированной форме, уже в известной работе Голдрейха и Линден-Белла [16]; они, однако, не ставили вопроса об определении условий полной устойчивости диска (при любых s). Между тем, ответ на этот вопрос можно получить, исследуя уравнение (1) [14,15]. Оно определяет (при заданном α^2, т.е. фиксированной кривой вращения $\Omega = \Omega\,(r)$, функцию $Q_g\,(\bar{\lambda},\ g^2)$. Графики этих функций для различных фиксированных значений g^2 изображены на рис. 1b. Эти кривые имеют максимумы при $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_m$ для всех α^2 и g^2. Более того, при данном α^2 максимумы сначала увеличиваются с ростом g^2, а затем уменьшаются (рис.1b). Это означает, что функция $Q_g^2\,(\bar{\lambda},\ g^2)$ при разных α^2 имеет максимум как функция двух переменных. В частности, когда $\alpha^2 = 2$ (что соответствует плоской кривой вращения: $v_o = r\,\Omega(r) = const$), $Q^2_{max} = 3$. Максимум имеет место при g^2=16/27, $\bar{\lambda}$=1.5, т.е. для $m = 2\,v_o\ /\ 3\,c_s$.

Зависимость $Q^2_{max}\,(\alpha^2)$ показана на рис. 1c,

$$Q^2_{max}\,(\alpha^2) = \frac{3}{2}\ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 3/2}\ . \qquad (2)$$

Для сравнения, на рис.1а представлены аналогичные кривые маржинальной устойчивости, вычисленные согласно уравнению, данному Линем и Лау [8] (см. также [9]) :

$$Q^2 = 4\,(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2/(1 + g^2\bar{\lambda}^2)). \qquad (3)$$

Описываемые формулой (3) функции $Q_g^2(\bar{\lambda})$ монотонны и уже потому некорректны. Уравнение (3) было выведено экстраполированием (на любые s) результатов изучения линейной устойчивости в рамках стандартного ВКБ-метода для тугозакрученных спиралей, когда $k_r >> k_\psi$. Такая экстраполяция, конечно, малообоснованна: строго говоря, при таком подходе корректной являлась бы только малая поправка к значению Q^2 для радиальных возмущений ($g^2 << 1$, $g^2\bar{\lambda}^2 << 1$),

$$Q_g^2 = 4\,(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2) + 4\,g^2\bar{\lambda}^4\ . \qquad (4)$$

Экстраполирование согласно (3) совершенно произвольно; его с таким же успехом можно было бы сделать и множеством других способов (столь же необоснованных).

Нужно иметь в виду, что в действительности эволюция каждого возмущения в любой момент происходит в соответствии с мгновенным значением радиального волнового числа q, которое меняется линейно со временем [16]. Время пересечения области неустойчивых значений q, как и степень усиления, ограничены (и малы вблизи $Q_g = Q_{max}$). Когда $Q_g > Q_{max}$, область усиления совсем исчезает, в этом случае можно гарантировать "полную устойчивость" диска в том смысле, что возмущения не нарастают даже в тече-

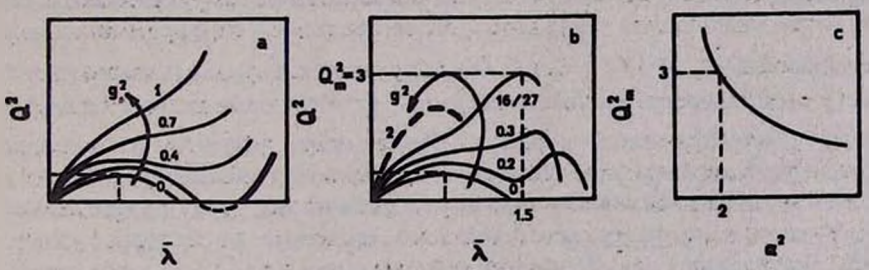

Рис.1 Кривые маржинальной устойчивости для гидродинамической модели с плоским давлением согласно: (a) Лину и Лау [8] или Бертину и Лину [9], (b) Поляченко и Стрельникову [14,15] и (c) качественная зависимость $Q^2_{max}(\alpha^2)$ (для максимума функции) $Q_m^2(\lambda g^2)$ как функции двух переменных.

ние какого-то ограниченного промежутка времени.

За подробностями можно обратиться к работе автора [15], где затрагивается также проблема локализованных собственных мод газовых дисков с дифференциальным вращением:

3. Звездные диски. Дисперсионное уравнение (1) удобно представить в виде

$$\bar{\lambda} - g^2\bar{\lambda}^3 + 0.75\,(1 - 1/\alpha^2)\,g^4\bar{\lambda}^5 = F_g\ , \tag{5}$$

где $F_g = 1 - Q_g^2/4\bar{\lambda}$. Тогда при переходе к случаю звездного диска меняется только правая часть.

$$F_g \to F_*(x) = (1 - \exp(-x)\,I_0(x))/x\ , \tag{6}$$

где $F_*(x)$ - известный редукционный фактор $F_\nu(x)$ [2], вычисленный при $\nu = (\omega - m\Omega)/\kappa = 0$, ω – частота, m - азимутальное число возмущения ($\sim\exp(-i\omega t + i m\psi)$). В [6] введены обозначения $x = k^2 c_r^2/\kappa^2 = Q_0^2/\lambda^2$, $Q_0 = \kappa c_r/2\pi G\sigma_0$, I_0 - функция Бесселя мнимого аргумента, c_r - дисперсия радиальных скоростей звезд. Такой переход от газового к звездному диску получается при подстановке (принадлежащей еще Линю, Юаню и Шу, 1969 [2]) $G \to G F_\nu(x)$ в дисперсионном уравнении для дисковой системы с круговыми орбитами ("холодного" диска).

Используемое приближение, конечно, менее обосновано по сравнению с аналогичным приближением в случае газового диска. Причина в том, что, строго говоря, локализованные возмущения звездного диска управляются интегральным уравнением [17], которое не сводится к дифференциальному уравнению вида $\partial^2\Phi/\partial t^2 = \hat{A}\,\Phi$ (оно получается в случае газового диска). Кроме того, и сам редукционный фактор $F_\nu(x)$ был выведен, вообще говоря, лишь для туго закрученных спиралей. Тем не менее, принятое (конечно, довольно грубое) приближение полезно для сравнения условий неустойчивости газовых и звездных дисков. По-видимому, основную нагрузку в учете неаксиальности возмущений несут все-таки члены, стоящие в левой стороне уравнения (5). Что касается редукционного фактора Линя и др. [2], то в нем сделана замена: вместо радиального волнового числа k_r теперь стоит полное $k = \sqrt{k_r^2 + m^2/r^2}$ что также, как можно ожидать, в основном правильно отражает переход к неосесимметричным возмущениям.

При фиксированном α^2 (т.е. данном законе вращения) уравнения (5),

(6) определяют функцию $Q_o = Q_o(\bar{\lambda}, g^2)$. Эта функция (как и аналогичная функция $Q_g(\bar{\lambda}, g^2)$ в случае газового диска) имеет максимум как функция двух переменных. Легко показать, что в точке максимума ($x = x_m$).

$$2 x_m F'_* x_m + F_*(x_m) = 0 , \tag{7}$$

откуда $x_m = 0.948$ (универсальное число). Далее: $\bar{\lambda}_m = 3 F_*(x_m)(\alpha^2 - 1)/(2\alpha^2 - 3)$, $g_m^2 \bar{\lambda}_m^2 = 2/3(1 - 1/\alpha^2)$,

и, наконец,

$$(Q_o)_{\max} = 3\sqrt{x_m} F_*(x_m)(\alpha^2 - 1)/2(\alpha^2 - 3/2) \approx$$
$$\approx 0.8(\alpha^2 - 1)/(\alpha^2 - 3/2) .$$

Заметим, что Q_o связано со стандартным определением тоомревского запаса устойчивости звездного диска Q_*, соотношением $Q_* = 2Q_o/(3.36/\pi)$. Напомним : при таком определении условие $Q_* > 1$ означает отсутствие радиальной (m=0) джинсовской-или тоомревской - неустойчивости звездного диска (точно так же, как и условие $Q_g > 1$ для газового диска). Поэтому с хорошей точностью

$$(Q_*)_{\max} = \frac{3}{2}\,\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 3/2} , \tag{8}$$

что совпадает с выражением для $(Q_g^2)_{\max}$ в случае газового диска (см. [14,15]). "Похожесть" этих случаев при замене $Q_* \to Q_g^2$ просматривается уже из разной асимптотики в разложениях соответствующих дисперсионных уравнений при $k \to 0$. Таким способом можно увидеть и то, что звездный диск стабилизируется медленнее, а газовый - быстрее из-за различной зависимости стабилизирующих (тепловых) членов от k.

В наиболее важном для галактик случае плоской кривой вращения, когда $\alpha^2 = 2$, имеем $(Q_*)_{\max} = (Q_g^2)_{\max} = 3$. Полученный результат означает, что "гарантия устойчивости" (т.е. отсутствие даже временного нарастания радиально-локализованных возмущений) наступает в случае звездных дисков лишь для весьма горячих систем. В рассматриваемом случае ($\alpha^2 = 2$) максимум Q_* имеет место при $g^2 = 4/27$, $\bar{\lambda} = 3$, т.е. для $m = v_o/\sqrt{3}\,c_r$, что почти совпадает с гидродинамическим результатом [14,15]: $m = 2v_o/3c_s$ (см.предыдущий раздел). При подстановке типичных для солнечной окрестности Галактики значений: $v_0 = 250$ км/с, $c_s = 45$ км/с получаем: $m = 4$. Это, во всяком случае, показывает, что симметрия отклика звездного диска на возбуждение баром (или спутником) не обязательно должно быть непременно

двухрукавной. Например, гравитационный потенциал симметричного бара, несмотря на доминирование в его разложении по угловым гармоникам моды $m = 2$, может тем не менее возбудить в диске четырехрукавную спираль.

4. Тонкие кольца. С точки зрения теории устойчивости, диск превращается в тонкое кольцо, если его поперечный размер Δ становится много меньше расстояния до центра R: $\Delta << R$, и рассматриваются возмущения с масштабами $\lambda > \Delta$. Столь пекулярное распределение массы, как ни странно, характерно для многих астрономических объектов: таковы , например, кольцевые галактики или кольца планет. Среди последних особенно выделяются своей необычностью аномально узкие кольца Урана и Нептуна. Впрочем, как выяснилось после полетов аппаратов Вояджер, и некоторые из казавшихся непрерывными колец Сатурна в действительности представляют собой совокупность большого числа узких колечек. Многие кольцевые образования имеют определенную азимутальную структуру различного рода "переплетения", клампировку и т.д. Эта структура, возможно, также обязана действию той или иной неустойчивости.

Помимо перечисленных непосредственно наблюдаемых астрономических систем, кольцевые образования встречаются как обязательный промежуточный этап в теории происхождения и эволюции других объектов. В качестве примера укажем на большинство моделей образования Солнечной системы из сильно-сплюснутого быстро-вращающегося протопланетного облака. Так, в предложенной автором [18] картине последовательного резонансного образования планет на определенной стадии формируется плотное кольцо (вследствие нагребания вещества спиральными волнами плотности, возбужденными уже сформировавшейся очередной планетой). Из кольца в дальнейшем образуется планета, причем этому должны способствовать различные неустойчивости, приводящие к азимутальному дроблению кольца с последующим объединением фрагментов в единое тело (планету) из-за их неупругих столкновений друг с другом. Кроме рассмотренной в [18] специфической "краевой" неустойчивости [19], нужно учитывать и более обычную, гравитационную неустойчивость, которая может развиваться в кольце при достаточно большой собранной в ней массе вещества.

Таким образом, представляет интерес исследование условий неустойчивости как одиночных колец, так и их систем. До сих пор работа в этом направлении шла, возможно, недостаточно интенсивно, например, потому что оценки, делавшиеся для колец Сатурна и Урана, свидетельствовали как будто об отсутствии там джинсовской неустойчивости (дисковое тоомревское $Q > 1$). Однако, как отметил Н.Н.Горькавый [20], в случае колец Нептуна их масса вполне может оказаться достаточной для того, чтобы гравитационный распад играл важную роль при эволюции. Поэтому проблема устойчивости актуальна для планетных колец (не говоря уже о других, более массивных объектах). Кроме того, само использование дисковых формул не вполне корректно даже

для получения грубых оценок, касающихся колец-систем с существенно другой геометрией.

Ниже мы для простоты ограничимся кольцами с почти-круговыми орбитами частиц. Такие движения подразумевают присутствие некоторой-достаточно большой-центральной массы. Заметим, что равновесная скорость $\Omega(r)$ начинает заметно отступать от кеплеровского закона лишь при условии: $M_r/M_0 > \Delta/R$ (M_r и M_0-соответственно, масса кольца и центральная масса). Для большинства планетных колец это неравенство не выполняется, так что их вращение можно считать кеплеровским.

В невращающемся кольце (как и в плоском слое, покоящемся цилиндре и т.п.) раздельно существует два принципиально различных типа возмущений (и неустойчивостей): джинсовский и изгибный (шланговый) - соответственно, симметричный и антисимметричный относительно срединной линии. Очевидно, что вращение и возникающая вследствие вращения кориолисова сила перепутывают эти две моды. Если интересоваться возможностью гравитационного (джинсовского) распада кольца, то возникает естественный вопрос: не приведет ли это перепутывание (возникновение изгиба сразу после начала продольного сжатия в каком-то месте кольца) к стабилизации и невозможности распада. В действительности, разумеется, речь должна идти просто о выводе численных критериев такой стабилизации. В данном аспекте, однако, вращающееся кольцо не отличается от вращающегося диска, где азимутальные и радиальные колебания частиц тоже происходят одновременно, т.е. "перепутаны". (Шланговая мода, о которой обычно говорят в случае диска, связана с колебаниями поперек его плоскости; она, конечно, независима от возмущений в плоскости). Теперь примем во внимание, что и стабилизирующая роль конечной дисперсии скоростей частиц c_r (или скорости звука c_s) в случае кольца должна в основном проявляться так же, как и в случае диска, при условии, что радиус эпицикла c_r/κ (или аналогичная ему величина c_s/κ) мал по сравнению с поперечным размером кольца: $\rho \equiv c_r/\kappa$ (или c_s/κ) $\ll \Delta$. Имея в виду (строго говоря) именно такие кольцевые системы, приходим к заключению, что наиболее существенным (или даже единственным) отличием их от аналогичных дисковых систем будет иной характер самогравитации (обусловленный совершенно разной геометрией кольца и диска). Приближенно получаемые таким образом соотношения должны быть справедливы и для колец, в которых $\rho \sim \Delta$.

Сказанное выше означает, что процедура получения дисперсионного уравнения для тонкого кольца может быть следующей. Запишем сначала локальное дисперсионное уравнение для возмущений в холодном диске в виде (см. [14,15])

$$\omega^2 = \kappa^2 + 3(\alpha^4 - \alpha^2)\kappa^2/k^4 - 2\alpha^2\kappa^2/k^2 - 2\pi G\sigma_0 k \quad , \qquad (9)$$

где $\omega_* = \omega - m\,\Omega(r)$, k - полное волновое число возмущения ($k_2 = q_2 + m_2/r$, q - радиальное волновое число), $\sigma_0(r)$ - поверхностная плотность. Самогравитации в (9) обязан лишь один последний член. Следовательно, именно он и должен быть заменен при переходе от холодного диска к (холодному же) кольцу. Введем обозначения:

$$G \cdot (2\pi\sigma_0 k) = G \cdot \eta_{\rm grav}(\text{disc}) \rightarrow G\eta_{\rm grav}(\text{ring}) \quad , \tag{10}$$

где $\eta_{\rm grav}(\text{disc}) = 2\pi G\sigma_0 k$, а выражение для $\eta_{\rm grav}(\text{ring})$ должно быть найдено из решения соответствующей задачи теории потенциала для кольца. Простейший вид этой функции следующий:

$$\eta_{\rm grav}(\text{ring}) = \rho_l k_\psi^2 \Lambda \ ,$$

где $\rho_l = \int \sigma_l(x)\,dx$ - линейная плотность кольца, $k_\psi = m/r$, $\Lambda + \ln(1/k_\psi \Delta)$ большой положительный параметр (характерный для геометрии кольца); при использовании этой формулы естественно положить $k = k_\psi$ ($q << k_\psi$). Имея $\eta_{\rm grav}(\text{ring})$, перейти к случаю горячего кольца можно (как и выше при переходе от холодного к горячему диску) при помощи редукционного фактора (F):

$$\eta_{\rm grav}(\text{ring}) \rightarrow \eta_{\rm grav}(\text{ring}) \cdot F \quad .$$

При этом F имеет нетривиальную форму $F_\nu(x)$ Лина и Шу лишь для кольца звезд; в газовом случае редукционный фактор всего лишь обеспечить появление в правой части (9) дополнительного слагаемого $k^2 c_s^2$.

Полная система уравнений, описывающих возмущения в кольцевой системе с круговыми орбитами, формально не отличается от аналогического дискового случая. Она состоит из 1) уравнения (12,13), которое получается из уравнений гидродинамики с равными нулю давлением путем исключения возмущенных скоростей:

$$-\sigma_1 = (r\varepsilon\Phi'_1)'/r - \varepsilon m^2 \Phi_1/r^2 - 2m(\varepsilon\Omega)'\Phi_1/r\omega_* \quad , \tag{11}$$

где σ_1 и Φ_1 - возмущенные поверхностная плотность и потенциал, $\varepsilon = \sigma_0(r)/(\omega_*^2 - \kappa^2)$, и 2) уравнения Пуассона:

$$\Phi_1(r) = -G\iint \frac{\sigma_1(r')\exp(im\psi')\,r'\,dr'\,d\psi'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi'}} . \qquad (12)$$

Выражение (12) может быть приведено [21] к виду

$$\Phi_1(r) = -2\pi G \int h_m(\zeta)\,\sigma_1(r')\,r'\,dr' , \qquad (13)$$

где

$$h_m(\zeta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2mx)\,dx}{\sqrt{1-\zeta\cos^2 x}} , \qquad \zeta = \frac{4rr'}{(r+r')^2} . \qquad (14)$$

Для колец $|r-r'|/r \sim \Delta/r \ll 1$, так что ζ близко к единице. Асимптотически, при $\zeta \sim 1$, поведение функции $h_m(\zeta)$ следующее:

$$h_m(\zeta) = -\ln(|x-y|/4r_0) , \qquad (15)$$

где $r = r_0 + x$, $r' = r_0 + y$, r_0 - радиус середины кольца (x, y тогда принадлежат в основном интервалу $(-\Delta, \Delta)$). Поэтому

$$\Phi_1(x) \approx \pi G \int \ln(|x-y|/4r_0)\,\sigma_1(y)\,dy . \qquad (16)$$

Естественно записать ядро интегрального оператора в (16) как

$$\ln(|x-y|/4r_0) = \ln(\Delta/4r_0) + \ln(|x-y|/\Delta) , \qquad (17)$$

выделив из него большую по величине константу $\overline{\Lambda} = \ln(\Delta/4r_0) \gg 1$ ($\Delta \ll r_0$). Таким образом, в главном приближении имеем

$$\Phi_1(x) \approx -\pi G\,\overline{\Lambda} \int \sigma_1(y)\,dy , \qquad (18)$$

так что $\Phi_1(x) \approx \mathrm{const}$.

Определенная согласно (17) величина $\overline{\Lambda}$ получается из введенной ранее, $\Lambda = \ln(1/k_\psi\Delta)$ при азимутальных числах m порядка единицы (когда только и справедливо представление (15). Величина Λ в ее первоначальном определении появляется естественным образом при рассмотрении возмуще-

ний с продольной (вдоль кольца) длиной волны λ, много больше Δ, но в то же время малой по сравнению с длиной окружности $2\pi r_0$. При выполнении последнего условия можно пренебречь кривизной кольца и воспользоваться локальным декартовым приближением; при этом уравнение Пуассона сводится к форме (см., например, [14,15])

$$\Phi_1(x) = -2G\int_{-\infty}^{\infty} K_0[k_\psi |x-x'|]\sigma_1(x')\,dx' , \qquad (19)$$

где $K_0(x)$ - функция Макдональда. Если длина волны периодической структуры (возмущения) много больше ширины кольца, $k_\psi |x-x'| \ll 1$, можно воспользоваться соответствующим асимптотическим разложением $K_0(x)$, тогда получим:

$$\Phi_1(x) = -2G\int_{-\infty}^{\infty} [\ln(2/k_\psi |x-x'| - C]\sigma_1(x')\,dx' , \qquad (20)$$

где C=0. 577... - постоянная Эйлера. Записывая теперь, аналогично (17):

$$\ln(2/k_\psi |x-x'|) = \Lambda + \ln[2\overline{C}/(|x-x'|/\Delta)]$$

$$(C = -\ln\overline{C},\ \Lambda = \ln(1/k_\psi\Delta) \gg^{*} 1),$$

будем иметь в главном приближении

$$\Phi_1(x) = -2G\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(x')\,dx' \approx \text{const}. \qquad (21)$$

Проиллюстрируем использование приближений (20), (21) в задаче об устойчивости двух близких тонких колец*. В описанном выше формализме (уравнения (11) и (12) или (11) и (21)) этот случай отличается от одиночного кольца только одним - формой функции $\sigma_0(r)$ (см.рис.2). Учитывая почти-постоянность потенциала $\Phi_1(x)$ (см. (21)), можно показать, что в выражении (11) σ_1 через Φ_1 главным является последний член, в котором $(\varepsilon\Omega)' \approx \Omega\varepsilon' \approx \Omega\sigma_0'/(\omega_*^2 - k^2)$. Вставляя такое $\sigma_1\{\Phi_1\}$ в (21), получим дисперсионное уравнение в виде

---

* Излагаемые ниже результаты были получены автором в 1982г., но ранее не публиковались.

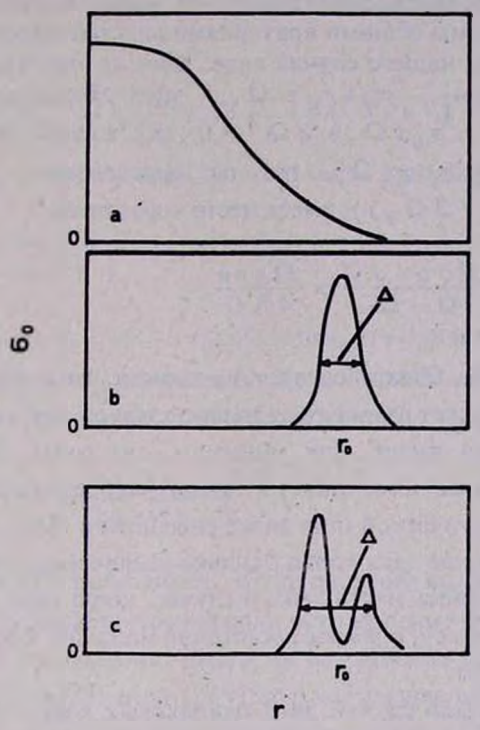

Рис.2 Распределение поверхностной плотности σ_0 (r) в: (a) диске (b) одиночном тонком кольце и (c) паре тонких колец.

$$1 = -\frac{4 G k \Lambda}{\Omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d\sigma_0 / dx}{\omega_* + 1.5 \Omega_0 k x} \quad . \tag{22}$$

(для кеплеровского вращения), где $\omega_* = \omega - m \Omega_0$, $\Omega_0 = \Omega(r_0)$. Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с дисперсионным уравнением для ленгмюровских колебаний плазмы:

$$\varepsilon_0(\omega, k) = 1 + \frac{4 \pi e^2}{m k^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{d f_0 / dv}{\omega - k v} = 0 , \tag{23}$$

где f_0 - равновесная функция распределения электронов (массы m и заряда e)

по скоростям. В рассматриваемом нами случае роль $f_0(v)$ играет поверхностная плотность $\sigma_0(x)$.

В соответствии с установленной аналогией, можно воспользоваться известными в физике плазмы общими критериями неустойчивости [22]. В переформулированном для нашего случая виде, один из этих критериев гласит: если при некотором $\omega/k r_0 = \Omega_*$, удовлетворяющем условиям $d\sigma_0(\Omega_*)/d\Omega = 0$, $d^2\sigma_0(\Omega_*)/d\Omega^2 > 0$ (т.е. в какой-либо точке минимума функции $\sigma_0 = \sigma_0(\Omega)$, где по определению $\sigma_0(\Omega) = \sigma_0(x = 2r_0(\Omega_0 - \Omega)/3\Omega_0)$), имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \, \frac{d\sigma_0/d\Omega}{\Omega - \Omega_*} > \frac{\Omega_0 r_0}{4\Lambda G}, \tag{24}$$

то система неустойчива. Отсюда следует, во-первых, что неустойчивость рассматриваемого типа может развиваться только в том случае, если поверхностная плотность кольца имеет, как минимум, два горба. Во-вторых, при заданном k неустойчивость возникает в том случае, если общая масса колец больше некоторой критической (при знаке равенства в (24)). Важно, однако, подчеркнуть, что в случае двух колец с сильно различающимися массами неустойчивость может иметь место даже в случае, когда одно из колец имеет сколь-угодно малую массу, а второе достаточно массивно и обеспечивает выполнение критерия (24).

Рассмотрим сначала случай двух одинаковых колец с поверхностной плотностью

$$\sigma_0(x) = \sigma_0(x/\Delta)^2 \exp(-x^2/\Delta^2), \tag{25}$$

впервые он рассматривался другим способом, в работе [23]. Подстановка (25) в (22) дает дисперсионное уравнение

$$1 = (16 G\Lambda\sigma_0/3\Omega_0^2\Delta)\,[\sqrt{\pi}/2 + i\pi t W(t) - \sqrt{\pi}\, t^2 - i\pi t^3 W(t)], \tag{26}$$

где $t = 2\omega_*/3\Omega_0 k\Delta$, $W(t)$- функция Крампа (см. [22]). Для определения границы устойчивости положим $\omega_* \ll \Omega_0 k\Delta$, так что $t \ll 1$ и воспользуемся разложением

$$W(z) \approx 1 + 2iz/\pi + \ldots \qquad (z \ll 1) .$$

Тогда получим

$$\omega_* = (3i\Omega_0^3 k\Delta^2 / 32\pi G\Lambda\sigma_0) \qquad (8G\Lambda\sigma_0\sqrt{\pi} / 3\Omega_0^2\Delta - 1),$$

откуда следует, что неустойчивость имеет место при условии, что

$$\frac{8}{3\pi}\,\frac{M_r}{M_0}\left(\frac{r_0}{\Delta}\right)^2 \Lambda > 1 , \tag{27}$$

где учтено, что $\sigma_0 = M_r / \pi^{3/2}\Delta r_0$. Заметим, что при простейшей аппроксимации колец ступеньками (ширины Δ и с расстоянием между центрами колечек δ) получается условие неустойчивости в виде

$$1 - \Delta^2/\delta^2 < \frac{32}{3\pi}\,\frac{M_r}{M_0}\left(\frac{r_0}{\delta}\right)^2 \Lambda . \tag{27'}$$

Сравнение (27′) с (27) показывает, что конкретный вид распределения плотности в колечках не играет большой роли. В то же время модель ступенек предельно упрощает вычисления, делая их совершенно элементарными. При данном k из условия (27) (или (27′)) получается критическая масса кольца, при превышении которой оно становится неустойчивым. Равенство в (27) аналогично полученному в [23] условию бифуркации-появлению нового, близкого равновесного состояния в рассматриваемой системе. Из рассмотрения простейшей модели системы двух колец с существенно различной массой (в виде ступенек) можно показать, что, действительно, в этом случае неустойчивость, в принципе, может развиваться при сколь-угодно малой массе тонкого кольца.

В общем случае колец разной массы имеется очевидная аналогия с пучковой неустойчивостью плазмы. Ввиду того, что рассматриваются возмущения с длиной волны λ, много большей расстояния между кольцами, пучковая ситуация (аналогичная прохождению двух бесстолкновительных плазм друг через друга) имеет место, несмотря даже на возможную столкновительность в каждом из колец.

В связи с отмеченной аналогией с плазмой, можно непосредственно перенести на данный случай выясненный там детальный физический механизм пучковой неустойчивости (см. [24]). Рассмотрим случай двух существенно

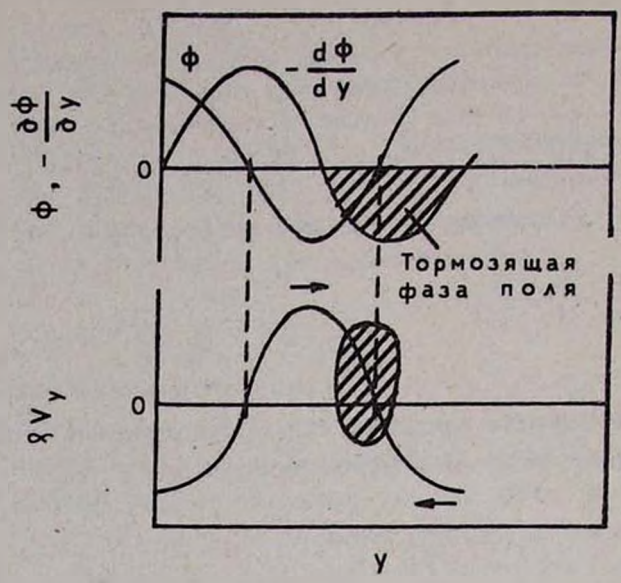

Рис.3. Автомодуляция вещества тонкого кольца при неустойчивости (аналогично [24]); система отсчета волны.

различающихся по массе колец. Допустим, что по большему кольцу распространяется волна-возмущение. Ввиду близости тонкого кольца, это возмущение модулирует его. При определенных условиях (см.ниже) вещество тонкого кольца будет собираться в основном в области тормозящих фаз поля волны и тем самым усиливать модулирующую его волну. В результате возникает неустойчивость.

При каких условиях вещество тонкого кольца собирается в области тормозящих фаз модулирующего поля? На рис.3 изображены (аналогично [24]) профиль гравитационного потенциала $\Phi(y)$ и сила, действующая на вещество тонкого кольца $-\partial\Phi/\partial y$. Из уравнений движения можно в нашем случае получить интеграл [23]:

$$3\Omega_0 x^2/4 - 2\Phi/\Omega_0 = \text{const}. \qquad (28)$$

Равновесная скорость вещества на расстоянии x от радиуса коротации равна: $v_y = -3\Omega_0 x/2$. Предполагая, что амплитуда растет достаточно медленно, находим отсюда возмущение скорости частиц кольца

$$\partial v_y \approx -2\,\Phi\,/\Omega_0\, b\,, \tag{29}$$

где b - расстояние между тонким кольцом и радиусом коротации. Из последней формулы и рис. 3 видно, что вещество кольца будет скапливаться преимущественно у тормозящих фаз поля при $b = 0$, т.е. в случае, когда радиус коротации расположен между кольцами (как и предполагалось выше).

Можно сделать также (снова вполне аналогично плазменному случаю - ([24]) оценку амплитуды азимутальной периодической структуры тонкого кольца. В связи с нестационарностью процесса усиления волны фазовый резонанс будет размыт, при этом выполняется соотношение [24]: $v_y^2 \approx \gamma^2/k^2$ (γ – инкремент неустойчивости). Условие захвата вещества кольца волной можно определить из (28); оно имеет вид: $v_y^2 \approx \psi$. Таким образом, амплитуда насыщения по порядку величины равна: $\Phi \approx \gamma^2/k^2$. Из (29) для амплитуды смещения тонкого кольца получаем:

$$\delta x \approx 4\,\Phi\,/\,3\,\Omega_0^2\, b \approx \gamma^2/\Omega_0^2\, b\, k^2\,. \tag{30}$$

Если задаться определенной моделью системы двух колец (проще всего - в виде разных ступенек) и вычислить входящие в (30) величины γ и b (в рамках линейной теории), можно, зная амплитуду смещения δx, оценить массу колец.

Непосредственным побудительным мотивом для поиска возможных новых (неаксиально-симметричных) равновесий или неустойчивостей в системе из пары тонких колец [23] был открытый на фотографиях с аппарата Вояджер-1 факт "переплетения" F-колец Сатурна [25,26]. Этот факт, однако, был позднее поставлен под сомнение. Но, с другой стороны, была открыта (27) азимутальная структура ("кламмировка") в других объектах- например, в некоторых узких ($\Delta \sim 1$ км) колечках в главной щели А-кольца Сатурна (деление Энке). Эти колечки находятся вблизи от внутренней кромки А-кольца (на расстояниях порядка 100 км); амплитуда азимутальной периодической структуры ~ 10 км, пространственный период ~ 1000 км. Для описания аналога пучковой неустойчивости в тонком колечке в этом случае нужно несколько модифицировать принятый выше подход, рассматривая тонкое колечко вблизи края непрерывного диска или достаточно широкого кольца (которое должно имитировать кольцо А). Соответствующие вычисления показывают, что, действительно, здесь имеется неустойчивость, причем получающаяся оценка для периода структуры по порядку величины совпадает с наблюдаемой средней величиной.

Институт астрономии АН СССР

STABILITY OF ASTROPHYSICAL DISCS AND RINGS

V.L.POLYACHENKO

Spiral perturbations with arbitrary pitch angles in gas and stellar discs are considered. In particular, the minimum values of Toomre's margin of stability, Q, which guarantee the total stability of gas and stellar discs (when perturbations cannot grow even for any finite time interval) are obtained. For the flat rotation curve, corresponding values of Q are equal to: $Q = \sqrt{3}$ for a gas disc, and $Q = 3$ for the stellar case. The most unstable perturbations, for stellar disc parameters typical for the solar vicinity of the Galaxy, are four-armed spirals: $m = 4$. The approximate dispersion relation describing perturbations in the thin gravitating rings is derived. For the case of two rings, the close analogy with the potential oscillations of electronic plasma is found. This analogy allows us to use the general criteria of beam-like instability known in plasma physics. Study of several simplest models of paired rings (generally speaking, with quite different masses) allowed to soften cosiderably the estimations for a thin ring's minimum mass to be unstable, in comparison with the case of two identical rings studied earlier. We argue the suggestion that the azimuthal structuring ("clumping") of some ringlets inside the Encke division of Saturn rings, in immediate proximity to A-ring's inner edge, is the consequence of the studied beam-like instability (in the nonlinear regime).

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.Toomre*, Astrophys.J.,139,1217,1964.
2. *C.C.Lin, F.H.Shu*, Proc.Nat.Acad.Sci.USA,55,229,1966.
C.C.Lin, C.Yuan, F.H.Shu, Astropys.J.,155,721,1969.
3. *L.Blitz*, in "Surveys of the Southern Galaxy",ed.W.B.Burton, Dordrecht, Reidel D.,1983, p.117.
4. *И.В.Петровская*, Письма в Астрон.ж.,13,474,1987.
5. *В.Л.Поляченко, И.Г.Шухман*, Препр. СибИЗМИР АН СССР, 1-2, Иркутск,1972; Астрон.ж.,50,97,1973.
6. *C.Hunter*, Astrophys.J.,181,685,1973.
7. *А.Г.Морозов*, Астрон.ж.,57,681,1980.
8. *C.C.Lin, Y.Y.Lan*, Stud.Appl.Math.,60,97,1979.
9. *G.Bertin, C.C.Lin*, in "Evolution of Galaxies" (Proc.10 IAU Regional Astron. Meeting), ed. J.Palous, 1988, p.255.
10. *А.Г.Морозов*, Астрон.ж., 62, 805, 1985.
11. *D.Lynden-Bell, A.J.Kalnajs*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 157, 1, 1972.
12. *В.Л.Поляченко, А.М.Фридман*, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Наука, М., 1976.
13. *A.M.Fridman, V.L.Polyachenko*, Physics of gravitating systems, v.1,2, Springer-Verlag, N.Y.1984.

14.*В.Л.Поляченко, А.В.Стрельников*, Астрон.циркуляр, N1520, 1, 1988.
15.*V.L.Polyachenko*, in "Dynamics of Astrophysical Discs" ed. J.Sellwood, Cambridge Univ.Press, 1990, p.199.
16.*P.Goldreigh, D.Lynden-Bell*, Mon.Notic.Roy.Astron. Soc., 130, 125, 1965.
17.*W.H.Julian, A.Toomre*, Astrophys. J., 146, 810, 1966.
18.*В.Л.Поляченко*, Астрон.циркуляр, N1538, 27, 1989
19.*A.Toomre*, in "Dynamics of Astrophysical Discs", ed. J.Sellwood, Cambridge Univ. Press, 1990, p.153.
20.*Н.Н.Горькавый*, Астрон.циркуляр, N1538, 31, 1989.
21.*F.H.Shu*, Astrophys.J., 160, 89, 1970.
22.*Б.Михайловский*, Теория плазменных неустойчивостей, т.1, Атомиздат, М. 1970.
23.*Б.Б.Кадомцев*, Письма в Ж. эксперим. и теор. физ., 33, 361, 1981.
24.*Л.А.Арцимович, Р.А.Сагдеев*, Физика плазмы для физиков, Атомиздат, М, 1979.
25.*C.S.Sutton*, New Scientist, 88, 491, 1980.
26.Sky and Telescope, July 1981, 62, N1.
27.Mercury 1981, X, N6, (November/December).