

УДК: 524. 37

РАССЕЯНИЕ СВЕТА В СФЕРИЧЕСКОЙ ТУМАННОСТИ

А.К.КОЛЕСОВ, В.В.СОБОЛЕВ

Поступила 24 июня 1991

Туманность представляется в виде однородного шара, в котором происходит рассеяние и истинное поглощение излучения. Вводится и исследуется функция $w(x, \eta)$, являющаяся обобщением на шар функций $\varphi(x, \eta)$ и $\psi(x, \eta)$ Амбарцумяна для плоского слоя. Получено интегральное уравнение для определения функции $w(x, \eta)$. Через эту функцию выражены коэффициент отражения и альbedo шара. Знание альbedo позволяет находить светимость туманности при любом расстоянии освещающей звезды от нее. Через функцию $w(x, \eta)$ выражены также интенсивность излучения, выходящего из туманности, и ее светимость при положении звезды в ее центре. Отдельно рассмотрены случаи туманности малого и большого оптического радиуса.

1. Введение. Важной задачей теоретической астрофизики является разработка теории многократного рассеяния света в разных объектах. В большинстве работ изучается процесс рассеяния света в плоских слоях, хорошо представляющих звездные и планетные атмосферы. Во многих работах исследуется также рассеяние света в средах со сферической симметрией, которыми могут быть заменены планетарные туманности, протяженные оболочки звезд, ядра галактик и другие объекты.

Наибольший интерес для применений представляет нахождение интенсивности излучения, выходящего из среды наружу. В работах В.А.Амбарцумяна [1] были введены функции $\varphi(\tau_0, \eta)$ и $\psi(\tau_0, \eta)$, через которые выражаются интенсивности излучения, выходящего из плоского слоя оптической толщины τ_0 под углом η к нормали. В дальнейшем эти функции были обобщены на случай анизотропного рассеяния [2] и на случай рассеяния излучения с перераспределением по частоте в спектральной линии [3].

В настоящей статье вводится и подробно изучается функция $w(x, \eta)$, через которую выражается интенсивность излучения, выходящего из шара оптического радиуса x под углом η к радиусу-вектору при различных источниках излучения. Эту функцию можно считать обобщением на шар функций $\varphi(\tau_0, \eta)$ и $\psi(\tau_0, \eta)$, широко употребляемых для случая плоского слоя. Для определения функции $w(x, \eta)$ получено нелинейное интегральное уравнение. При этом использовалось найденное в ряде работ [4-11] интегро-дифференциальное уравнение для коэффициента отражения шара.

С помощью функции $w(x, \eta)$ в статье определяется альbedo шара, знание которого позволяет находить светимость туманности при любом положении освещающей звезды вне ее. Даются также формулы, определяющие интенсивность излучения, выходящего из туманности, освещенной центральной звездой.

В конце статьи отдельно рассматриваются случаи туманности малого и большого оптического радиуса. Второй из этих случаев был подробно изучен в наших статьях [12, 13].

2. Диффузное отражение. Будем считать, что в однородном шаре радиуса x могут происходить процессы изотропного рассеяния и истинного поглощения света, причем отношение коэффициента рассеяния к сумме коэффициентов рассеяния и истинного поглощения равно λ .

Пусть в каком-то месте поверхности шара падают фотоны под углом азимута ξ к нормали. Диффундируя в шаре, часть фотонов может испытать истинное поглощение (т.е. погибнуть), а другая может выйти наружу под произвольным углом азимута η . Обозначим через $2\rho(x, \eta, \xi) \eta d\eta$ вероятность того, что фотон выйдет наружу в любом месте поверхности в интервале косинусов углов от η до $\eta + d\eta$ и назовем величину $\rho(x, \eta, \xi)$ "коэффициентом отражения шара".

Если величина $\rho(x, \eta, \xi)$ известна, то интенсивность излучения, выходящего из шара, может быть найдена при произвольных внешних источниках, обладающих сферической симметрией. Когда интенсивность внешнего излучения в каждом месте поверхности есть $I_0(\xi)$, то интенсивность излучения, выходящего из шара, равна

$$I(x, \eta) = 2 \int_0^1 I_0(\xi) \rho(x, \eta, \xi) \xi d\xi. \quad (1)$$

Для получения уравнения, определяющего функцию $\rho(x, \eta, \xi)$, может быть применен метод, заключающийся в мысленном добавлении к шару сферического слоя бесконечно малой оптической толщины и рассмотрения происходящих в нем процессов. Этот метод приводит к следующему уравнению:

$$\eta \xi \frac{\partial \rho}{\partial x} + (\eta + \xi) \rho(x, \eta, \xi) = \frac{1}{x} [2 \eta \xi \rho - (1 - \eta^2) \xi \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \\ - (1 - \xi^2) \eta \frac{\partial \rho}{\partial \xi}] + \frac{\lambda}{4} w(x, \eta) w(x, \xi), \quad (2)$$

где обозначено

$$w(x, \eta) = 1 + e^{-2x\eta} + 2\eta \int_0^1 \rho(x, \eta, \xi) d\xi. \quad (3)$$

Физический смысл функции $w(x, \eta)$ состоит в том, что величина $\frac{\lambda}{4\pi} w(x, \eta)$ представляет собой вероятность выхода фотона из шара под углом η к радиусу-вектору в единице телесного угла после поглощения его в поверхностном слое. При этом первый член в сумме (3) соответствует излучению, идущему непосредственно в сторону от шара, второй член — излучению, прошедшему через шар, и третий — излучению, диффузно отраженному шаром.

Из уравнения (2) видно, что функция трех аргументов $\rho(x, \eta, \xi)$ выражается через функцию двух аргументов $w(x, \eta)$. Решая это уравнение относительно $\rho(x, \eta, \xi)$, получаем

$$\rho(x, \eta, \xi) = \frac{\lambda}{4} x^2 e^{-x(\eta + \xi)} \int_{x\sqrt{1-\xi^2}}^{x'} e^{x'(\eta' + \xi')} w(x', \eta') w(x', \xi') \frac{dx'}{x'^2 \eta' \xi'}, \quad (4)$$

где

$$x' \eta' = \sqrt{x'^2 - x^2(1 - \eta^2)}, \quad x' \xi' = \sqrt{x'^2 - x^2(1 - \xi^2)}. \quad (5)$$

В формуле (4) надо считать, что $\eta > \xi$. Когда $\eta < \xi$, то нижний предел в интеграле должен быть $x\sqrt{1-\eta^2}$.

Легко убедиться, что выражение (4) в случаях $x \gg 1$ и $x \ll 1$ переходит в известные выражения для функции $\rho(x, \eta, \xi)$ (об этом подробнее сказано ниже).

Подставляя выражение (4) в формулу (3) и меняя порядок интегрирования, приходим к следующему уравнению для определения функции $w(x, \eta)$:

$$w(x, \eta) = 1 + e^{-2x\eta} + \frac{\lambda}{2} \eta x^2 e^{-x\eta} \int_{x\sqrt{1-\eta^2}}^x e^{x'\eta'} w(x', \eta') \frac{dx'}{x' \eta'} \int_{\frac{\sqrt{x'^2 - x^2}}{x}}^1 e^{x'\xi' - x\xi} w(x', \xi') \frac{d\xi'}{x' \xi'}. \quad (6)$$

Перейдем здесь от переменной интегрирования ξ к переменной ξ' согласно второй из формул (5). Тогда вместо (6) находим

$$w(x, \eta) = 1 + e^{-2x\eta} + \frac{\lambda}{2} \eta x e^{-x\eta} \int_{x\sqrt{1-\eta^2}}^x e^{x'\eta'} w(x', \eta') \frac{dx'}{\eta'} \int_0^1 e^{x'\xi'-t} w(x', \xi') \frac{d\xi'}{t}, \quad (7)$$

где

$$t = \sqrt{x^2 - x'^2(1 - \xi'^2)}. \quad (8)$$

После определения из уравнения (7) функции $w(x, \eta)$ может быть найден по формуле (4) и коэффициент отражения шара $\rho(x, \eta, \xi)$.

Мы видим, что внутренний интеграл в (7) зависит только от x' и x . Вводя обозначение

$$V(x', x) = \int_0^1 e^{x'\xi'-t} w(x', \xi') \frac{x' d\xi'}{t}, \quad (9)$$

вместо (7) имеем

$$w(x, \eta) = 1 + e^{-2x\eta} + \frac{\lambda}{2} \eta x e^{-x\eta} \int_{x\sqrt{1-\eta^2}}^x e^{x'\eta'} w(x', \eta') V(x', x) \frac{dx'}{x'\eta'}. \quad (10)$$

Таким образом, для определения функции $w(x, \eta)$ может служить система уравнений (9) и (10), из которой одновременно определяется и функция $V(x', x)$.

Заметим, что из системы уравнений (9) и (10) вытекает одно уравнение, которому удовлетворяет функция $V(x', x)$. Чтобы получить его, надо умножить уравнение (10) на $e^{-x\eta - \sqrt{x^2 - x'^2(1-\eta^2)}} / \sqrt{x^2 - x'^2(1-\eta^2)}$, проинтегрировать по η от 0 до 1 и воспользоваться уравнением (9). Сделав это, находим

$$V(x, z) = K(x, z) + \frac{\lambda}{2} \int_0^x V(x', x) V(x', z) dx', \quad (11)$$

где

$$K(x, z) = x \int_0^1 (e^{x\eta} + e^{-x\eta}) e^{-\sqrt{z^2 - x^2(1-\eta^2)}} \frac{d\eta}{\sqrt{z^2 - x^2(1-\eta^2)}} \quad (12)$$

Свободный член уравнения (11) может быть переписан также в виде

$$K(x, z) = E_1(z - x) - E_1(z + x), \quad (13)$$

где $E_1(x)$ - первая интегральная показательная функция.

Можно думать, что функция $w(x, \eta)$ должна играть такую же роль в теории рассеяния света в шаре, какую играют функции $\varphi(\tau_0, \eta)$ и $\psi(\tau_0, \eta)$ при изучении рассеяния света в плоском слое. Как увидим ниже, в рассматриваемой теории должна часто встречаться и функция $V(x', x)$, выражающаяся через функцию $w(x, \eta)$ формулой (9).

Подчеркнем, что в полученных выше уравнениях интегрирование производится по возрастающему радиусу шара x , т.е. совершается переход от меньших шаров к большим. Следовательно, решение этих уравнений позволяет определить искомые величины для всех шаров с заданным параметром λ . Выше этот параметр считался постоянным, однако теория остается справедливой и при произвольной зависимости λ от x . В этом случае функция $\lambda(x)$ должна входить в приведенные уравнения под знаком интеграла.

3. Альбедо туманности. Знание функции $w(x, \eta)$ позволяет найти альбедо шара, т.е. величину, определяемую формулой

$$A(x, \xi) = 2 \int_0^1 \rho(x, \eta, \xi) \eta d\eta \quad (14)$$

и представляющую собой вероятность того, что фотоны, падающие в каком-либо месте поверхности шара под углом $\arccos \xi$ к нормали, выходят из него во всех направлениях после рассеяний.

Чтобы выразить величину $A(x, \xi)$ через функцию $w(x, \xi)$, воспользуемся уравнением (2), определяющим коэффициент отражения $\rho(x, \eta, \xi)$. Интегрируя это уравнение по η от 0 до 1 и применяя формулы (3) и (14), получаем

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial A(x, \xi)}{\partial x} + \frac{1 - \xi^2}{x} \frac{\partial A(x, \xi)}{\partial \xi} + A(x, \xi) = \\ = 1 + e^{-2x\xi} - w(x, \xi) \left[1 - \frac{\lambda}{2} w_0(x) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где $w_0(x)$ - нулевой момент функции $w(x, \eta)$.

Решая уравнение (15) относительно $A(x, \xi)$, находим

$$A(x, \xi) = 1 - e^{-2x\xi} - e^{-x\xi} \int_0^x \left[1 - \frac{\lambda}{2} w_0(x') \right] w(x', \xi') e^{x'\xi'} \frac{dx'}{\xi'} \cdot \frac{1}{x\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (16)$$

Из физических соображений следует, что в случае чистого рассеяния (т.е. при $\lambda=1$) должно быть $w_0(x) = 2$ и $A(x, \xi) = 1 - e^{-2x\xi}$. Такое заключение находится в соответствии с формулой (16).

Если альbedo шара известно, то можно легко найти его светимость (т.е. полную энергию, излучаемую шаром во всех направлениях за 1 с) при произвольных источниках энергии.

Допустим для примера, что шар представляет собой туманность, светящуюся под воздействием звезды светимости L_* , находящейся на расстоянии r_1 от центра туманности. Тогда светимость туманности будет равна

$$L(x) = \frac{1}{2} L_* \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \int_0^1 \frac{A(x, \xi) \xi d\xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 (1 - \xi^2)}}. \quad (17)$$

где r - геометрический радиус туманности (равный x/α , где α - коэффициент поглощения).

В частном случае, когда звезда расположена на границе туманности (т.е. при $r_1 = r$) вместо формулы (17) имеем

$$L(x) = \frac{1}{2} L_* \int_0^1 A(x, \xi) \xi d\xi. \quad (18)$$

Пользуясь здесь формулами (14) и (3), получаем

$$L(x) = \frac{1}{2} L_* \left[w_0(x) - 1 - \frac{1}{2x} (1 - e^{-2x}) \right]. \quad (19)$$

В другом важном частном случае, когда звезда находится далеко от туманности (т.е. при $r_1 \gg r$) формулу (17) можно переписать в виде

$$L(x) = \frac{1}{2} L_* \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \int_0^1 A(x, \xi) \xi d\xi. \quad (20)$$

Для нахождения интеграла, входящего в (20), следует проинтегрировать уравнение (15) по ξ от 0 до 1 и воспользоваться формулой (19). В результате

имеем

$$L(x) = \frac{1}{4} L_* \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{x^2} \int_0^x [\lambda w_o^2(x') - 4w_o(x') + 4] x'^2 dx' + \right. \\ \left. + 1 - \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right) e^{-2x} \right\}. \quad (21)$$

Таким образом, в обоих частных случаях светимость туманности выражается через нулевой момент функции $w(x, \xi)$.

Заметим, что для определения величины $w_o(x)$ нет необходимости в знании функции $w(x, \xi)$. Ее можно также найти из уравнения

$$w_o(x) = 2 - \frac{1}{x} \int_0^x \left[1 - \frac{\lambda}{2} w_o(x') \right] V(x', x) x' dx', \quad (22)$$

если известна функция $V(x', x)$. Это уравнение получается из соотношения (16) при интегрировании его по ξ от 0 до 1 и использовании затем формулы (3).

4. Туманность, освещенная центральной звездой. Если звезда находится в центре туманности, то для определения интенсивности выходящего из нее излучения можно применить тот же метод, какой был использован выше при нахождении коэффициента отражения туманности. При этом искомая интенсивность будет выражаться опять через функцию $w(x, \eta)$.

Как и выше, будем считать, что туманность представляет собой однородный шар оптического радиуса x . Обозначим через L_* светимость звезды и через $I(x, \eta)$ интенсивность диффузного излучения туманности, выходящего наружу под углом $\arccos \eta$ к радиусу-вектору.

Для нахождения величины $I(x, \eta)$ имеем следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\eta \frac{\partial I(x, \eta)}{\partial x} + \frac{1 - \eta^2}{x} \cdot \frac{\partial I(x, \eta)}{\partial \eta} + I(x, \eta) = \frac{\lambda}{2} D(x) w(x, \eta), \quad (23)$$

где $w(x, \eta)$ - функция, определяемая формулой (3), и

$$D(x) = \int_0^1 I(x, \eta) d\eta + \frac{L_* \alpha^2}{8\pi^2} \cdot \frac{e^{-x}}{x^2}. \quad (24)$$

Уравнение (23) уже рассматривалось в нашей статье [13], но в ней счита-

лось, что туманности обладают большими оптическими радиусами и поэтому последний член в формуле (24) не учитывался.

Решая уравнение (23), получаем

$$I(x, \eta) = \frac{\lambda}{2} e^{-x\eta} \int_0^x \frac{D(x') w(x', \eta') e^{x'\eta'} dx'}{x \sqrt{1-\eta'^2}}, \quad (25)$$

где η' дается первой из формул (5).

Чтобы найти входящую в выражение (25) функцию $D(x)$, следует подставить его в формулу (24). Делая это, после небольших преобразований получаем

$$D(x) = \frac{L_0 \alpha^2}{8 \pi^2} \cdot \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{\lambda}{2x} \int_0^x V(x', x) D(x') x' dx', \quad (26)$$

где функция $V(x', x)$ дается формулой (9).

Таким образом, искомая интенсивность излучения, выходящего из туманности, определяется формулой (25), а входящая в нее функция $D(x)$ — уравнением (26).

После нахождения интенсивности излучения $I(x, \eta)$ светимость туманности $L(x)$ определяется по формуле

$$L(x) = 4 \pi r^2 \cdot 2 \pi \int_0^1 I(x, \eta) \eta d\eta. \quad (27)$$

Интеграл, входящий в (27), может быть также найден непосредственно из уравнения (23). В результате для светимости туманности имеем

$$L(x) = L_0 \left\{ 1 - e^{-x} - \frac{8 \pi^2}{\alpha^2} \int_0^x D(x') \left[1 - \frac{\lambda}{2} w_0(x') \right] x'^2 dx' \right\}. \quad (28)$$

5. Туманность малого оптического радиуса. Из приведенных выше формул для различных величин, характеризующих излучение, выходящее из шара, могут быть получены более простые формулы для этих величин в двух частных случаях: 1) когда оптический радиус шара мал, т.е. $x \ll 1$, 2) когда оптический радиус шара велик, т.е. $x \gg 1$. Вследствие важности этих случаев мы рассмотрим ниже каждый из них.

Предположим сначала, что $x \ll 1$. В качестве нулевого приближения для функции $w(x, \eta)$ возьмем ее значение при $x=0$, т.е. примем, что $w(x, \eta) = 2$. Подставляя это значение для $w(x, \eta)$ в формулу (4) и считая, что экспоненты равны единице, для коэффициента отражения получаем

выражение

$$\rho(x, \eta, \xi) = \lambda x^2 \int_{x\sqrt{1-\xi^2}}^x \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 - x^2(1-\xi^2)} \sqrt{x'^2 - x^2(1-\eta^2)}} \quad (29)$$

которое может быть переписано в виде

$$\rho(x, \eta, \xi) = \lambda x \int_{\arccos \xi}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\xi^2 - (1-\eta^2)\sin^2 \varphi}} \quad (30)$$

В этих формулах надо считать, что $\eta > \xi$, а когда $\eta < \xi$, то η и ξ следует поменять местами. Мы видим, что в данном случае коэффициент отражения выражается через неполный эллиптический интеграл.

Действуя аналогичным образом, из (9) находим выражение

$$V(x', x) = \ln \frac{x + x'}{x - x'} \quad (31)$$

с помощью которого из (10) получаем

$$w(x, \eta) = 2 [1 - x\eta + \lambda x \eta g(\eta)] \quad (32)$$

где

$$g(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{1-\eta^2}}^1 \ln \frac{1+t}{1-t} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1 + \eta^2}} \quad (33)$$

Выражение (33) может быть преобразовано также к виду

$$g(\eta) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\eta \operatorname{tg} \alpha) d\alpha \quad (34)$$

Для альбедо туманности при падении фотонов под углом $\arccos \xi$ к нормали из формулы (16) находим

$$A(x, \xi) = 2\lambda x \xi \quad (35)$$

Когда свечение туманности радиуса r вызывается звездой светимости L_* , находящейся на расстоянии r_1 от центра звезды, то светимость туманно-

сти в рассматриваемом случае, согласно формулам (17) и (33), равна

$$L(x) = \lambda x L_0 \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1 - (r/r_1)^2 (1 - \xi^2)}} . \quad (36)$$

Отсюда следует, что

$$L(x) = \frac{\lambda}{2} x L_0 \quad \text{при } r = r_1 \quad (37)$$

и

$$L(x) = \frac{\lambda}{3} x L_0 \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \quad \text{при } r \ll r_1 . \quad (38)$$

Если звезда расположена в центре туманности, то для интенсивности излучения, выходящего из туманности, и для ее светимости при $x \ll 1$ из формул (25) и (28) соответственно находим

$$I(x, \eta) = \frac{\lambda L_0 \alpha^2}{16 \pi^2 x \sqrt{1 - \eta^2}} (\pi - 2 \arccos \eta) , \quad (39)$$

$$L(x) = \lambda x L_0 . \quad (40)$$

Разумеется, формулы (29) - (40), полученные для случая туманности малого оптического радиуса из более общих формул, могут быть непосредственно найдены из уравнения переноса излучения при учете только рассеяния первого порядка.

б. Туманность большого оптического радиуса. Если оптический радиус туманности очень велик, то ее внешние слои могут считаться плоскими. В этом случае коэффициент отражения туманности дается известной формулой для полубесконечной среды

$$\rho(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\varphi(\eta) \varphi(\xi)}{\eta + \xi} , \quad (41)$$

где $\varphi(\eta)$ - функция, определяемая уравнением

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{\eta + \xi} d\xi . \quad (42)$$

Нетрудно убедиться, что из полученных выше уравнений (4) и (6) вытекают уравнения (41) и (42) при $x \rightarrow \infty$.

При $x \gg 1$ могут быть найдены асимптотические формулы для функций $\rho(x, \eta, \xi)$ и $w(x, \eta)$ (тем более точные, чем больше x). Асимптотическое выражение для $\rho(x, \eta, \xi)$ уже было получено в нашей статье [12]. Подставляя его в формулу (3), находим следующее асимптотическое выражение для функции $w(x, \eta)$:

$$w(x, \eta) = \varphi(\eta) - 2f(x) u_0 \eta u(\eta) + \frac{\eta}{x} [\eta \varphi'(\eta) - \frac{1}{2}(1 - \eta^2) \varphi''(\eta)] + \\ + e^{-2x\eta} \left\{ \omega(\eta) + 2f(x) u_0 \eta v(\eta) - \frac{\eta}{x} [\eta \omega'(\eta) - \frac{1}{2}(1 - \eta^2) \omega''(\eta)] \right\}, \quad (43)$$

где

$$f(x) = \frac{M}{e^{2kx} - N}, \quad (44)$$

$$u(\eta) = \frac{\lambda}{2} u_0 \frac{\varphi(\eta)}{1 - k\eta}, \quad v(\eta) = \frac{\lambda}{2} u_0 \frac{\omega(\eta)}{1 + k\eta}, \quad (45)$$

и функция $\omega(\eta)$ связана с $\varphi(\eta)$ соотношением

$$\omega(\eta) \varphi(\eta) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \eta \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right) = 1. \quad (46)$$

Из формулы (43) видно, что знание функции $\omega(\eta)$ важно только при малых η , так как множитель $e^{-2x\eta}$ быстро убывает с возрастанием η . Входящие в формулу (43) величины k, M, N, u_0 представляют собой известные в теории рассеяния света постоянные (см. [12]).

Таким образом, для определения функции $w(x, \eta)$ мы имеем уравнение (7), а также асимптотические формулы (32) (при $x \ll 1$) и (43) (при $x \gg 1$).

Аналогичным образом может быть получено и асимптотическое выражение для альбедо туманности, определяемого формулой (14). Подставляя асимптотику для $\rho(x, \eta, \xi)$ в эту формулу, имеем

* Пользуясь случаем, отметим следующие опечатки в формулах (46) - (48): под знаком оператора R вместо величин a_1, b_1, c_1 должны быть введены a, b, c .

$$\begin{aligned}
A(x, \xi) = & 1 - \varphi(\xi) \sqrt{1-\lambda} - 2f(x) u_1 u(\xi) + \frac{\lambda}{2x} \varphi_1 \varphi(\xi) + \\
& + \frac{1}{x} [(1-2\xi^2) \varphi'(\xi) + \frac{\xi}{2} (1-\xi^2) \varphi''(\xi)] \sqrt{1-\lambda} - \\
& - e^{-2x\xi} \left\{ 1 - \omega(\xi) \sqrt{1-\lambda} - 2f(x) u_1 v(\xi) + \frac{\lambda}{2x} \varphi_1 \omega(\xi) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{x} [(1-2\xi^2) \omega'(\xi) + \frac{\xi}{2} (1-\xi^2) \omega''(\xi)] \sqrt{1-\lambda} \right\}, \quad (47)
\end{aligned}$$

где φ_1 и u_1 - первые моменты функций $\varphi(\eta)$ и $u(\eta)$ соответственно.

Пользуясь выражением (47), можно найти и асимптотику для светимости туманности $L(x)$ при любом положении звезды. Для этого надо подставить выражение (47) в формулу (17), а в двух рассмотренных выше частных случаях - в формулы (18) и (20).

Если звезда находится на границе туманности, то, подставляя (47) в (18), для светимости туманности получаем

$$L(x) = \frac{1}{2} L_0 \left[1 - \varphi_0 \sqrt{1-\lambda} - 2f(x) u_0 u_1 + \frac{2\varphi_1 - 1}{2x} \right]. \quad (48)$$

Если же звезда расположена на большом расстоянии от туманности, т.е. при $r_1 \gg r$, то подстановка (47) в (20) дает

$$L(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 L_0 \left[1 - 2\varphi_1 \sqrt{1-\lambda} - 4f(x) u_1^2 + \frac{\lambda \varphi_1^2}{x} \right]. \quad (49)$$

Формулы (48) и (49), определяющие светимость туманности большого оптического радиуса, легко приводятся к виду, который был дан им в работах [14] и [12].

В случае расположения звезды в центре туманности асимптотические формулы для интенсивности излучения, выходящего из туманности, и для ее светимости были получены недавно в нашей работе [13].

В заключение заметим, что в дальнейшем мы предполагаем дать таблицы значений функции $\psi(x, \eta)$, найденных путем решения уравнения (6), и таблицы других величин, определенных по приведенным выше формулам.

Ленинградский государственный университет

LIGHT SCATTERING IN A SPHERICAL NEBULA

A.K.KOLESOV, V.V.SOBOLEV

A nebula is assumed to be a homogeneous sphere in which processes of radiation scattering and true absorption take place. A function $w(x, \eta)$ which is a generalization of Ambartsumian's functions $\varphi(x, \eta)$ and $\psi(x, \eta)$ in the case of the sphere is introduced and investigated. An integral equation determining the function $w(x, \eta)$ is obtained. The light reflection coefficient and the albedo of the sphere are expressed in terms of this function. A knowledge of the albedo permits to find the nebula luminosity under any assumptions about a distance of the illuminating star from the nebula. The intensity of radiation emerging from a nebula with a central star and the nebula luminosity are also expressed in terms of the function $w(x, \eta)$. The cases of a nebula of a small optical radius and that of a large are considered separately.

ЛИТЕРАТУРА

1. П.А. Амбарцумян, Научные труды, т. 1, Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1960.
2. S.Chandrasekhar, Radiat. Transfer. Oxford, 1950 (русск. пер. С.Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953).
3. В.В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
4. R.E.Bellman, R.E.Kalaba, G.M.Wing, J.Math.Mech., 8, 575, 1956.
5. P.B.Bailey, J.Math.Anal.Appl., 8, 144, 1964.
6. P.B.Bailey, G.M.Wing, J.Math., Anal.Appl., 8, 177, 1964.
7. R.E.Bellman, R.E.Kalaba, Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 54, 1293, 1965.
8. R.E.Bellman, H.H.Kagiwada, R.E.Kalaba, J.Comp.Phys., 1, 245, 1966.
9. G.B.Rybicki, J.Comp.Phys., 6, 131, 1971.
10. R.E.Bellman, H.H.Kagiwada, R.E.Kalaba, S.Ueno, J.Math.Phys., 9, 909, 1968.
11. S.Ueno, H.Kagiwada, R.Kalaba, J.Math.Phys., 12, 1279, 1971.
12. А.К. Колесов, В.В. Соболев, Астрофизика, 32, 277, 1990.
13. А.К. Колесов, В.В. Соболев, Астрофизика, 33, 235, 1990.
14. H.C. van de Hulst, Astron. and Astrophys., 173, 115, 1987.