АСТРОФИЗИКА

ТОМ 34 ИЮНЬ, 1991 ВЫПУСК 3

УДК: 524.4

ОБ ОДНОЙ ПОПРАВКЕ К МОДЕЛИ КИНГА ЗВЕЗДНЫХ СКОПЛЕНИЙ

Г. А. САИЯН

Поступила 9 марта 1991

Принята к печати 21 мая 1991

В рамках модифицированной изотермической модели Кинга получены значения величины A, входящей в формулу для оценки центральной плотности сферических звездных скоплений ($\rho_0 = A\sigma^2/4\pi G r_c^2$, σ^2 — одномерная дисперсия скоростей звезд, r_c — радиус ядра) в зависимости от параметра концентрации c. Показано, что пренебрежение этой зависимостью может приводить к переоценке ρ_0 более чем в два раза для систем с малыми c. Такие ошибки могут существенно повлиять на оценку частоты образования двойных звезд в ядрах шаровых скоплений.

1. *Введение.* В модифицированной изотермической модели Кинга сферических звездных систем пространственная плотность в центре задается следующей формулой [1]:

$$\rho_0 = \frac{A\sigma^2}{4\pi G r_c^2}, \tag{1}$$

где σ^2 — центральная одномерная дисперсия скоростей, G — гравитационная постоянная, r_c — характерный размер, именуемый радиусом ядра. По мнению Кинга, типичное значение величины A близко к 9. Однако этот вывод справедлив лишь для систем с большим параметром концентрации $c = r_t/r_c$ (r_t — предельный (приливный) радиус), которые близки к изотермическим. В этом случае r_c равно примерно тому расстоянию, на котором поверхностная яркость составляет половину центрального значения.

Оценка по формуле (1) центральных плотностей звездных скоплений с малыми c может уже заметно отличаться от их истинных значений. Между тем, центральная плотность является одной из важнейших характеристик звездных систем, от которой зависит скорость протекания ряда динамических процессов в их ядрах. В качестве примера можно привести процесс образования двойных звёзд, частота которого весьма чувствительна к оценке центральной плотности. Поэтому представляется целесообразным внести уточнение в формулу (1). Цель настоящей заметки состоит в получении значений величины A с учетом её зависимости от параметра концентрации. Промежуточным этапом на пути к этому является уточнение связи между центральным значением потенциала и указанным параметром, что требует численного интегрирования уравнений модели Кинга. По существу, попутно совершенствуется и сама модель.

2. *Формула для оценки* A. На необходимость решения этой задачи было впервые обращено внимание в работе [2]. К сожалению, рассуждения автора были основаны на некорректной критике известной формулы Кинга для пространственной плотности звезд в сферических скоплениях [3]. В частности, ошибочно утверждение о том, что эта формула получена в результате неправильной записи уравнения Абеля, связывающего данную плотность [4]

$$\rho(r) = \rho_0 (\lambda/z)^3 \cdot Q(z)/Q(\lambda), \tag{2}$$

$$\lambda = (1 + c^2)^{-1/2}, \qquad z = \lambda \sqrt{1 + r^2/r_c^2}, \tag{3}$$

$$Q(x) = \arccos x - x\sqrt{1 - x^2} \tag{4}$$

с видимой поверхностной плотностью системы, имеющей вид [4]

$$f(r') = k\lambda^2 \left(\frac{1}{z'} - 1\right)^2, \qquad z' = \lambda \sqrt{1 + r'^2/r_c^2}. \tag{5}$$

В выражениях (2)—(5) r, r'—соответственно пространственное и видимое расстояния от центра системы, k—константа, связанная с плотностью в центре соотношением

$$\rho_0 = \frac{k}{\pi r_c} Q(\lambda). \tag{6}$$

Полученная автором [3] якобы новая формула для $\rho(r)$, которая равна нулю при $z=1$, есть не что иное, как другое представление (2), в чем легко убедиться. Благодаря этому, аналитическое выражение для величины A, выведенное автором в его другой работе [2], оказалось правильным. Однако оно использовалось лишь для указания границ той области, в которой должны заключаться истинные значения A. Точное решение задачи дано не было.

Для этого необходимо проинтегрировать систему уравнений, описывающих модель Кинга:

$$\rho/\rho_0 = \exp(W - W_0)\,\gamma\left(\frac{5}{2}, W\right) \Big/ \gamma\left(\frac{5}{2}, W_0\right), \tag{7}$$

$$\Delta W = \frac{d^2 W}{dR^2} + \frac{2}{R}\,\frac{dW}{dR} = -A\rho/\rho_0, \qquad R = r/r_c, \tag{8}$$

где γ—неполная γ-функция

$$\gamma(\mu, W) = \int\limits_0^W e^{-y}\, y^{\mu-1}\, dy, \tag{9}$$

W—безразмерная функция, равна $W = \varphi/\sigma^2$, φ—потенциал, W_0—значение этой функции в центре. На W наложены условия

$$W'(0) = 0, \qquad W(c) = 0. \tag{10}$$

Величина A определяется из условия, что в окрестности центра системы, находящегося в изотермическом состоянии, теоретическая плотность (7) и эмпирическая формула (2) согласуются друг с другом. Если ввести некоторую единицу длины r_0, не обязательно совпадающую с r_c, то для A можно получить более общую формулу, которая в наших обозначениях имеет вид (соответствующие выкладки являются лишь повторением приведенных в [2])

$$A = \frac{3}{1 + \beta(W_0)}\left[\frac{2 \arccos \lambda}{Q(\lambda)} + 1\right] K^2(\lambda), \quad K(\lambda) = \frac{r_0}{r_c}, \tag{11}$$

$$\beta(W_0) = e^{-W_0}\, W_0^{5/2} / \gamma\left(\frac{5}{2}, W_0\right). \tag{12}$$

Если r_0—расстояние, на котором видимая плотность уменьшается вдвое по сравнению со своим центральным значение (а у пространственно ограниченных систем оно уже не равно r_c), то, как следует из (5),

$$K(\lambda) = \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\lambda) + \lambda\right]^{-2} - 1}. \tag{13}$$

При $r_0 = r_t$ имеем $K(\lambda) = c$. Случай $r_0 = r_c$ приводит к выражению для A, найденному в [2]. В пространстве параметров W_0, c, A функция $A = A(W_0, c)$ описывает поверхность, для которой плоскость $A = 9$ является асимптотической (при $W_0 \to \infty$, $c \to \infty$).

3. Результаты. Подставляя (11) в (8) и решая систему уравнений (7), (8), можно для каждого значения W_0 (W_0—свободный параметр) найти то единственное значение c, при котором решение W обращается в нуль на границе системы (см. (10)). После этого вычисляется A.

Таблица 1

W_0	c	$\lg c$	$\lg c$ (K)	A
1	3.000	0.477		3.844
2	3.808	0.581		6.334
3	5.100	0.708	0.672	7.773
4	7.100	0.851	0.840	8.527
5	10.78	1.031	1.029	8.856
6	18.00	1.255	1.255	8.973
7	33.70	1.528	1.528	9.000
8	68.10	1.833	1.833	9.000
9 (K)	131.4		2.119	9.000
10 (K)	223.7		2.350	9.000
11	353.2	2.548		9.000
12 (K)	548.2		2.739	9.000
13	855.4	2.932		9.000
14	1362.5	3.134		9.000
15 (K)	2272		3.356	9.000

Примечание. (K)—при данном W_0 значения других величин заимствованы из работы Кинга [1]. В четвертом столбце приведены вычисленные Кингом в той же работе значения $\lg c$ в предположении $A = 9$.

Интегрирование уравнений (7), (8) приводит к значениям c и A, собранным в табл. 1. Данные таблицы позволяют в графическом виде представить зависимость между величинами W_0 и $\lg c$ (рис. 1). Определяя из наблюдений параметр концентрации, можно приближенно вычислить W_0 (а значит и A), не решая уравнений модели. На рис. 1 обнаруживаются два участка, которые могут быть аппроксимированы линейными функциями:

$$W_0 = \begin{cases} (1.591 \pm 0.079) + (3.508 \pm 0.045) \lg c, & 1.25 \leqslant \lg c \leqslant 2.25, \\ (-1.895 \pm 0.157) + (5.066 \pm 0.055) \lg c, & \lg c > 2.25. \end{cases} \tag{14}$$

Коэффициенты в (14) получены методом наименьших квадратов. Среднеквадратичная ошибка аппроксимации для обоих интервалов равна

0.057. В указанных областях значений c, типичных для шаровых скоплений, интересно сравнить полученные с помощью (14) приближенные оценки (W_0(пр)) с точными значениями W_0(т)

$\lg c$	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50
W_0(т)	5.95	6.75	7 68	8.60	9.60	10.75
W_0(пр)	5.977	6.854	7.731	8.608	9.485	10.77

Полученные численные результаты могут быть использованы при построении более точных (как однокомпонентных, так и многокомпонентных) модифицированных изотермических моделей, особенно при малых c.

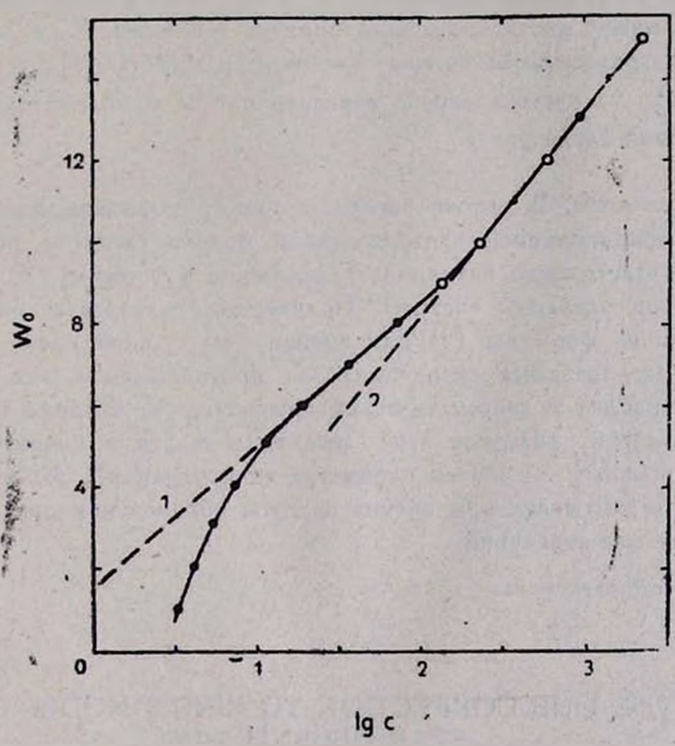

Рис. 1. График зависимости W_0—$\lg c$. Точками представлены наши данные, кружками—Кинга. Прямая (1) соответствует первому из уравнений (14).

4. *Некоторые физические следствия.* Из приведенной таблицы следует, что для двух звездных скоплений с одинаковыми σ^2 и r_c оценки

их центральных плотностей по формуле (1), т. е. без учета их степени концентрации, могут иногда отличаться более чем в два раза. Значение ρ_0 меньше там, где меньше параметр концентрации. В случае отдельно взятого скопления формула (1) приводит к переоценке центральной плотности. Если t_r—время релаксации в ядре, то, поскольку $t_r \sim \rho_0^{-1/2}$, только за счет указанного эффекта это время может недооцениваться примерно в 1.5 раза (верхний предел). В общем случае следует учитывать также зависимость центральной дисперсии скоростей от степени анизотропии в распределении скоростей членов системы [5].

Для изотропных же систем пренебрежение упомянутым эффектом может существенно сказаться и на оценке частоты образования в их ядрах двойных звезд, которая весьма чувствительна к оценке плотности числа одиночных звезд. Так, если двойные образуются при тройных сближениях [6], то частота $(dn_b/dt) \sim \rho_0^3$ и, следовательно, её переоценка может достигать одного порядка величины. Если же они образуются посредством механизма приливного захвата [7], при котором $(dn_b/dt) \sim \rho_0^2$, то частота может переоцениваться приблизительно в 4—5 раз (верхний предел).

5. *Заключение.* В работе численно проинтегрирована система уравнений модифицированной изотермической модели Кинга с учетом аналитической зависимости величины A, входящей в формулу (1), от конечных размеров звездной системы. Полученные результаты показывают, что применение формулы (1) для оценки центральной плотности звезд в изотропных звездных скоплениях в предположении, что A всегда равно 9, приводит к систематической переоценке ρ_0 которая может превышать истинное значение этой величины в два и более раза (для скоплений с малым значением параметра концентрации). Это обстоятельство следует учитывать при оценке частоты образования двойных звезд в ядрах шаровых скоплений.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

ON THE ONE CORRECTION TO KING'S MODEL OF STAR CLUSTERS

G. A. SAHIAN

In frame works of modified isothermal King's model the values of A quantity in formula for estimate of central density of spherical stellar systems ($\rho_0 = A\sigma^2/4\pi G r_c^2$, σ^2 — one-dimensional velocity dispersion, r_c —

core radius) are obtained in dependence of concentration c parameter. t is shown that neglect this dependence can be lead to overestimate ρ_0. more than twice for systems with smaller c. These errors can be essentially influence on the estimate of binary formation frequency in the cores of globular clusters.

ЛИТЕРАТУРА

1. *I. King*, Astron. J., 71, 64, 1966.
2. *А. С. Расторгуев*, Астрон. циркуляр, 995, 2, 1978.
3. *А. С. Расторгуев*, Астрон. циркуляр, 95, 2, 1978.
4. *I. King*, Astron. J, 67, 471, 1962.
5. *D. Merrit*, Astron. J., 95, 436, 1989.
6. *D. Heggie*, Globular Clusters, Cambridge UP, 1980, p. 281.
7. *W. H. Press, S. A. Teukolsky*, Astrophys. J., 213, 183, 1977.