

УДК: 524.3:535. 317

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ. VII. КОМПЕНСАЦИЯ АТМОСФЕРНЫХ СМЕЩЕНИЙ И РЕКОНСТРУКЦИЯ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

В. Ю. ТЕРЕБИЖ, О. К. ЧЕРБУНИНА, Ю. Г. ЧЕРБУНИН

Поступила 10 мая 1991

Подход, основанный на статистической параметризации обратных задач (*SPIPR*), применяется для исследования двух конкретных проблем: восстановления изображений, размытых смещениями вследствие атмосферной турбулентности, и реконструкции объектов при томографических проекциях. Приведены необходимые для расчетов соотношения, даны модельные примеры. Описанный подход реализуется теоретический предел эффективности восстановления.

1. *Введение.* В предыдущих наших публикациях (см., в частности, [1—6]) был изложен подход к задаче восстановления изображений, включающий следующие четыре составные части: 1) описание с нужной полнотой стохастической модели формирования изображения; 2) нахождение плотности вероятности $f(N, S)$ получить наблюдаемое в действительности изображение N при некотором исходном объекте S ; 3) нахождение теоретической границы эффективности и точности восстановления по основному распределению $f(N, S)$ на основании теоремы Фреше-Рао-Крамера (*FRC*); 4) построение конкретного способа достижения границы *FRC*, опирающегося на метод максимально правдоподобного восстановления изображений (*MLIR*). В упомянутых работах показано, что этот подход в действительности применим не только к проблеме восстановления изображений, но охватывает значительно более широкий круг обратных задач, для которых существенное значение имеет стохастический характер формирования наблюдаемых данных. В соответствии с сущностью предлагаемых операций описанному выше подходу было дано сокращенное наименование *SPIPR*—от *Statistical Parameterization of Inverse Problems*.

Настоящая статья посвящена применению *SPIPR* к исследованию двух важных направлений—восстановлению изображений, размытых вследствие атмосферной турбулентности, и реконструкции внутренней

структуры объектов на основании данных о распределении яркости в прошедшем сквозь них излучении. При этом мы не стремимся включить все детали соответствующих процессов, ограничиваясь лишь теми из них, которые составляют существо дела. В особенности это касается первой задачи, где рассматриваются только смещения изображения как целого, обусловленные наклонами волнового фронта. Это ограничение позволяет ввести всего один дополнительный параметр, однако ясно, что подход останется практически тем же и при усложнении описания формы волнового фронта—в это описание войдут лишь дополнительные параметры. Более реалистические модели и примеры будут рассмотрены в последующих публикациях.

2. *Компенсация атмосферных блужданий изображения.* Полное описание деформаций волнового фронта при прохождении сквозь турбулентную атмосферу имеет достаточно сложный характер [7—9]. В первом приближении эти деформации могут быть описаны заданием трех характерных масштабов: введенного Фридом [8] пространственного радиуса корреляции неоднородностей фронта—*радиуса когерентности* r_0 (обычно $r_0 \cong 10-20$ см), амплитудой неоднородностей на этом масштабе $A \cong \lambda$ и временем корреляции неоднородностей $\tau_0 \cong 0.01-0.05$ с. Конечно, при рассмотрении сравнительно больших участков волнового фронта нужно задать и законы изменения соответствующих корреляционных функций, однако для телескопов с диаметром апертуры $D < r_0$, рассмотренном которых мы здесь и ограничимся, достаточно описания с помощью трех указанных выше параметров.

Действительно, в этом случае мы можем допустить, что на телескоп в течение промежутков времени порядка τ_0 падают плоские участки волнового фронта, каждый раз имеющие различные углы наклона к оптической оси. Следовательно, если продолжительность коротких экспозиций взять равной для определенности τ_0 , то в течение каждой такой экспозиции регистрируется изображение с присущей данному телескопу оптической передаточной функцией, но сдвинутое как целое в угловой мере на величину порядка $A/D \cong \lambda/D$. Таким образом, за длительное время экспозиции T на приемнике будет зарегистрировано порядка T/τ_0 отдельных изображений объекта, сдвинутых друг относительно друга на случайный угол $\cong \lambda/D$.

Если все короткие экспозиции просто суммировать, то изображение будет сильно размыто (характерный размер дифракционной картины тоже порядка λ/D), и восстановление объекта на основании длительной экспозиции не позволит получить информацию в области пространствен-

ных частот. Однако при наличии совокупности изображений для коротких экспозиций, а также *априорной информации о функции рассеяния точки и законе смещений* можно найти в качестве оценки объекта такое распределение яркости, которое наилучшим образом согласуется со всеми имеющимися данными.

Как легко видеть, исходные положения приведенного выше подхода к компенсации атмосферных помех, основанные на получении серии коротких экспозиций, совпадают с предложенным Лабейри [10, 11] методом спекл-интерферометрии. Различие состоит в способе дальнейшего анализа «мгновенных» снимков: в методе Лабейри выполняется преобразование Фурье каждого изображения и затем используются лишь модули трансформант Фурье. При этом исключается влияние атмосферных сдвигов, но также теряется и полезная информация о фазе трансформанты Фурье оригинала. В простых случаях (при наличии весьма существенной априорной информации) удается восстановить основные черты оригинала, но такие ситуации являются исключениями из правила.

Все последующие методы решения «фазовой проблемы» также исходят из преобразования Фурье. Немаловажно заметить, что они не учитывают внутреннего (радиационного) шума, обусловленного квантовой природой света [3]. В отличие от этого, мы не ограничиваем себя необходимостью решить задачу при помощи именно линейного метода; *SPIPR* стремится найти адекватную постановку задачи, что в дальнейшем определяет и выбор метода восстановления. Последний оказывается существенно нелинейным, и именно нелинейность снимает надобность в использовании корреляционных функций высокого порядка в области пространственных частот.

То обстоятельство, что ниже рассматривается единственный спекл, не является принципиальным недостатком. Как уже отмечалось выше, для описания развитой спекл-структуры нужно лишь задать более сложную форму падающего волнового фронта, однако при этом никак не изменится предлагаемый подход. Следует также иметь в виду, что даже при $D \gg r_0$ около 74% энергии в спектре мощности флуктуаций изображения сосредоточено на низких частотах, т. е. вызвано случайными смещениями изображения как целого [12].

Для более ясного описания сути дела рассмотрим одномерную картину. Пусть $S \equiv (S_1, \dots, S_n)$ — средние количества фотособытий, которые были бы зарегистрированы в n пикселах приемника за время короткой экспозиции в случае идеальной формирующей изображение системы, т. е. для δ -образной функции рассеяния точки (ФРТ) при отсутствии смещений. Предполагается для простоты, что источник излучения

некогерентен, так что накопленные в пикселах числа событий представляют собой реализации независимых в совокупности пуассоновских случайных величин со средними S (см. детальное обсуждение в [5]). Вектор S и понимается как искомый объект, оценка которого должна быть получена.

Пусть далее h_{jk} —вероятность того, что при отсутствии смещений изображения событие, которое должно было быть зарегистрировано в пикселе k , будет на самом деле зарегистрировано в пикселе j , где $j=1, 2, \dots, m \geq n$. Другими словами, матрица (h_{jk}) —это ФРТ оптической системы при нулевом смещении изображения как целого. Если обозначить через $h_{jk}(x)$ ФРТ системы при смещении изображения, равном x , то мы можем написать:

$$h_{jk}(x) = h_{j-r, k}, \quad \sum_{j=1}^m h_{jk}(x) = 1. \quad (1)$$

Эти соотношения определяют нужную для рассмотрения случайных блужданий ФРТ через аналогичную функцию собственно оптической системы.

Обозначим через N_{pj} количество фотособытий, которое зарегистрировано в пикселе j в течение ρ -ой короткой экспозиции ($\rho=1, 2, \dots, P$), и через $N_{(\rho)} \equiv \{N_{pj}\}_{j=1}^m$ —вектор изображения для ρ -ой короткой экспозиции. Предположим, наконец, что внешний шум подчиняется пуассоновскому распределению с вектором средних значений для короткой экспозиции (b_j) .

Поскольку результаты наблюдений при различных коротких экспозициях взаимно независимы, вероятность получить данную совокупность $N \equiv \{N_{(\rho)}\}_{\rho=1}^P$ измерений равна произведению индивидуальных вероятностей:

$$f(N, S) = P! \cdot \prod_{\rho=1}^P \text{pr}[N_{(\rho)} | S], \quad (2)$$

где множитель $P!$ учитывает то обстоятельство, что порядок экспозиций не имеет значения.

Согласно [5], вероятность получить вектор $N_{(\rho)}$ при заданном смещении всего изображения x равна

$$f(N_{(\rho)}, S, x) = \prod_{j=1}^m \exp[-\lambda_j(x)] \cdot [\lambda_j(x)]^{N_{pj}} / (N_{pj}!), \quad (3)$$

где

$$i_j(x) = \sum_{k=1}^n h_{k,j}(x) \cdot S_k + b_j \quad (4)$$

—средние количества событий в пикселах при фиксированном смещении x . Предположим для простоты, что случайные блуждания изображения представляют собой стационарный случайный процесс. Если $u(x)$ — плотность распределения случайных смещений, то для отдельной короткой экспозиции мы имеем согласно формуле полной вероятности:

$$\text{Pr} \{N_{(p)} | S\} = \int u(x) dx \prod_{j=1}^m \exp[-i_j(x)] \cdot [i_j(x)]^{N_{pj}} / (N_{pj}!). \quad (5)$$

Подставляя это выражение в (2), получаем окончательно:

$$\ln f(N, S) = \sum_{p=1}^n \ln \int u(x) dx \prod_{j=1}^m [i_j(x)]^{N_{pj}} - P \cdot (S + B) + \text{const}, \quad (6)$$

где

$$S = \sum_{k=1}^n S_k, \quad B = \sum_{j=1}^m b_j \quad (7)$$

—соответственно полная яркость объекта и суммарный внешний шум.

Последние формулы дают искомое выражение для вероятности получить ту совокупность измерений, которая наблюдалась в действительности при P коротких экспозициях.

Заметим, что при плотности $u(x)$, равной δ -функции Дирака, из (6) следует обычное выражение (3) работы [5] для вероятности $f(N, S)$ с естественной заменой S_k и b_j на $P \cdot S_k$ и $P \cdot b_j$ в соответствии с тем фактом, что теперь сделано P экспозиций.

Нам осталось обсудить вид распределения $u(x)$ случайных смещений при атмосферном блуждании изображений. Как теория, так и эксперимент (см., например, [7—9]) показывают, что этот закон очень близок к плотности Гаусса с дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi^2 D^{1/2}} \cdot \left(\frac{2.099}{r_0} \right)^{1/2}, \quad D < r_0. \quad (8)$$

Следовательно, если известен параметр Фрида r_0 для периода наблюдений, т. е. среднее качество изображений в это время, то функционал (6) становится полностью определенным и мы, как и ранее, можем строить независимые от метода восстановления оценки предельной точ-

ности и эффективности, а также применить какой-либо конкретный метод восстановления, реализующий точность на границе *FRC*.

Приемлемую оценку r_0 можно получить, исходя непосредственно из суммарного изображения в течение длительной экспозиции. С другой стороны, если параметр Фрида неизвестен из основных или специальных наблюдений, следует включить его в число разыскиваемых параметров S и получить, таким образом, совокупность, включающую $n+1$ неизвестную величину. При обращении к *MLIR* задача сводится к максимизации (6) по этим переменным в области их неотрицательных значений.

Заметим в связи с обсуждением проблемы случайных смещений, что и при их отсутствии, т. е. при обычных наблюдениях с детерминированной ФРТ, наличие нескольких независимых экспозиций одного и того же объекта позволяет использовать совместные результаты при восстановлении объекта вместо того, чтобы восстанавливать каждое изображение независимо, а затем усреднять полученные оценки объекта.

3. *Модельный пример к разделу 2.* Приведем модельный пример, показывающий возможности *SPIPR*. Наша задача в данном случае заключается лишь в том, чтобы продемонстрировать тот факт, что функционал (6) действительно «работает».

На рис. 1а представлен исходный объект—оригинал, состоящий всего из 7 ненулевых средних значений пуассоновских отсчетов. Предполагалось, что наблюдатель путем «коротких экспозиций» получает много изображений объекта, каждое из которых, во-первых, случайным образом размыто при помощи ФРТ вида

$$h_{jk} = \begin{cases} 0.4, & s \equiv |j - k - 2| = 0; \\ 0.2, & s = 1; \\ 0.1, & s = 2; \\ 0, & s > 2; \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, 17; \\ j = 1, \dots, 21; \end{matrix} \quad (9)$$

во-вторых, к получившейся картине добавлен пуассоновский случайный шум с постоянным по формату средним значением $b_j \equiv 1$, и, наконец, каждое изображение как целое испытало независимое от предыдущих сдвигов гауссовское случайное смещение с нулевым средним значением и стандартным отклонением $\sigma = 2$ пикс. Всего было реализовано 100 размытых и смещенных описанным образом изображений; на рис. 1б показаны три из них.

При восстановлении мы можем идти двумя путями. Если исходить из результатов «длинной экспозиции», то нужно провести суммирование всей совокупности отдельных изображений (рис. 1с) и затем выполнить восстановление оригинала на основании такого суммарного изображения.

С использованием *MLIR* и функционала (3) при $x=0$ это приводит к оценке объекта, представленной на рис. 1d. С другой стороны, мы можем исходить из данного в предыдущем пункте обобщения теории, учитывающего всю совокупность отдельных изображений при коротких экспозициях. Максимизация функционала (6) позволяет найти в этом случае оценку оригинала, показанную на рис. 1e. Мы видим, что качество восстановления при втором подходе значительно превосходит то качество, которое достижимо при использовании лишь усредненного изображения, и это вполне согласуется с тем фактом, что при образовании усредненного изображения мы теряем существенную часть информации об оригинале.

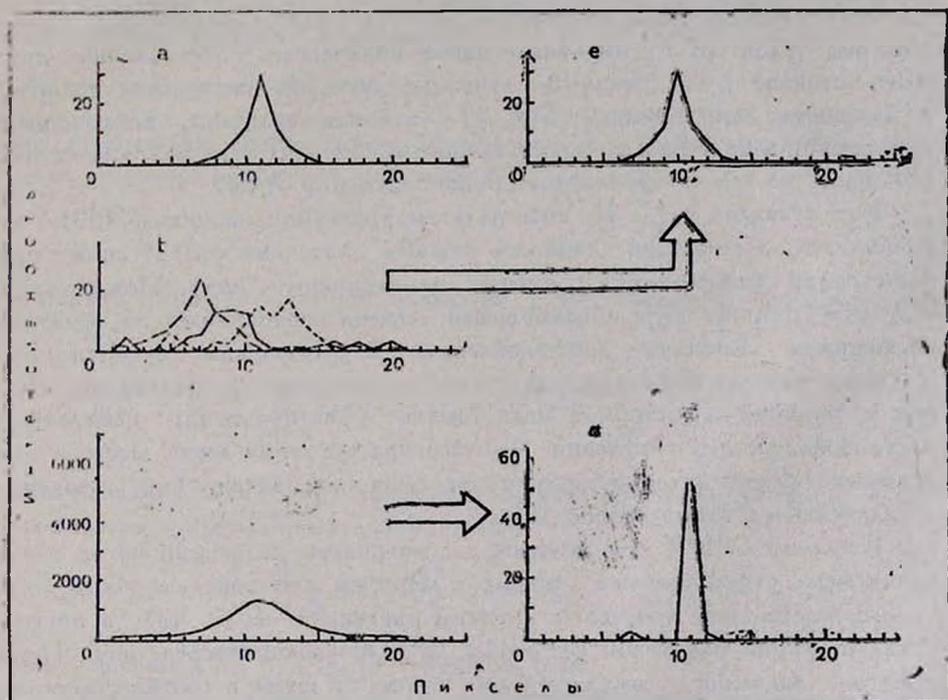


Рис. 1. Объект (а), примеры его случайно искаженных и смещенных при коротких экспозициях изображений (b), суммарное изображение для 100 коротких экспозиций (с), результат восстановления суммарного изображения (d) и результат восстановления всей совокупности отдельных изображений (е).

Сходные результаты получаются при рассмотрении других модельных примеров.

4. *Компьютерная томография.* Поскольку все версии компьютерной томографии в принципе единообразны [13], рассмотрим здесь только наиболее показательный вариант: объект освещен бесконечно тонким параллельным пучком рентгеновских лучей и объемная картина восстанавливается путем анализа последовательных тонких «срезов».

Общепринятый подход исходит в данном случае из интегральных уравнений

$$\begin{cases} N(u, \varphi) = N_0(u, \varphi) \cdot \exp[-R(u, \varphi)] + \zeta(u, \varphi), \\ R(u, \varphi) = \int S(u \cos \varphi - t \sin \varphi, u \sin \varphi + t \cos \varphi) dt, \end{cases} \quad (10)$$

где $N \cdot du$ —наблюдаемое количество событий вблизи точки u для проекции под углом φ ; $N_0 \cdot du$ —аналогичное количество, обусловленное прямым потоком; ζ —аддитивный случайный шум; R —оптическая толщина в заданном направлении; $S(x, y)$ —искомая величина, коэффициент поглощения в заданной точке изучаемого объекта. Второе из соотношений (10) известно как *преобразование Радона функции* $S(x, y)$.

Как показано в [2, 3], интегральные уравнения, подобные (10), не принимают во внимание наиболее важный источник флуктуаций при регистрации изображений, а именно, радиационный шум. Между тем, этот «внутренний» шум в наибольшей степени ограничивает на практике достижимую точность восстановления. В особенности существенным является учет радиационного шума при слабых потоках излучения, которые и типичны, и скажем, в медицинской практике ввиду нежелательности больших доз облучения. Аналогичная ситуация имеет место и при астрономической интерпретации томографической задачи (мы вернемся в дальнейшем к этому вопросу).

Согласно *SPIPR*, мы должны рассматривать падающий поток излучения как стохастический процесс. Примем для определенности, что это—пуассоновский процесс со средним значением $I_0(j, \varphi_p)$ в пикселе j для проекции под углом φ_p , $p=1, 2, \dots, P$. Обозначив посредством $b(j, \varphi_p)$ среднее значение пуассоновского внешнего шума в соответствующем пикселе и через $R(j, \varphi_p)$ —оптическую толщину в указанном направлении, мы можем написать для среднего числа фотособытий в пикселе (j, φ_p) следующее выражение:

$$\lambda(j, \varphi_p) = I_0(j, \varphi_p) \cdot \exp[-R(j, \varphi_p)] + b(j, \varphi_p). \quad (11)$$

Полная оптическая толщина в направлении L есть сумма элементарных оптических толщин S_{ik} вдоль соответствующего пути сквозь объект:

$$R(j, \varphi_p) = \sum_L S_{ik}, \quad (12)$$

где, например, можно просто принять

$$\begin{cases} i = \text{Integer}(j \cdot \cos \varphi_p - l \cdot \sin \varphi_p), \\ k = \text{Integer}(j \cdot \sin \varphi_p + l \cdot \cos \varphi_p) \end{cases} \quad (13)$$

и выполнить суммирование по всем l , скажем, от $-l_{\max}$ до $+l_{\max}$. Более точная дискретизация полезна на практике, однако не имеет принципиального значения; мы рассмотрим один из возможных вариантов ниже.

Обратимся к нахождению основной функции—вероятности $f(N, S)$, получить наблюдаемое изображение

$$N \equiv \{N(j, \varphi_p) \mid_{j=-a}^a \}_{p=1}^P, \quad (14)$$

где a —внешний радиус проекций объекта. В качестве искомого оригинала рассматривается совокупность

$$S \equiv \{S_{ik} \mid_{i,k=-a}^a\}. \quad (15)$$

Очевидно, принятые условия приводят к многомерному распределению Пуассона:

$$f(N, S) = \prod_{p=1}^P \prod_{j=-a}^a \exp[-\lambda(j, \varphi_p)] \cdot \frac{[\lambda(j, \varphi_p)]^{N(j, \varphi_p)}}{N(j, \varphi_p)!}. \quad (16)$$

Следовательно, для того, чтобы восстановить оригинал методом *MLIR*, мы должны максимизировать функционал

$$\ln f(N, S) = \sum_{p=1}^P \sum_{j=-a}^a \left[N(j, \varphi_p) \cdot \ln \lambda(j, \varphi_p) - \lambda(j, \varphi_p) \right] + \text{const} \quad (17)$$

по отношению к S_{ik} при ограничениях $S_{ik} > 0$.

Существует нижний предел для числа проекций, необходимых при восстановлении объекта с площадью сечения πa^2 . Поскольку общее количество измерений должно превосходить количество разыскиваемых параметров, мы имеем:

$$P \cdot (2a + 1) > \pi a^2 \quad (18)$$

или, приближенно,

$$P > \frac{\pi}{2} \cdot a. \quad (19)$$

Конечно, для получения высокого качества восстановления требуется значительно более жесткое условие, скажем $P > D$, где $D = 2a$ — количество пикселей на диаметре изучаемого объекта.

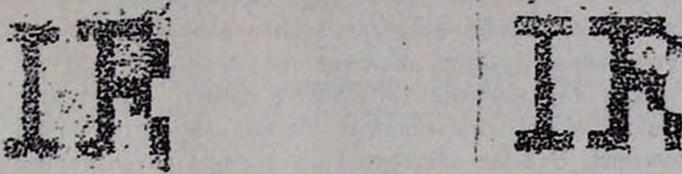
5. *Модельный пример к разделу 4.* На рис. 2а, б представлено распределение коэффициента поглощения в модельном объекте размером 9×9 пикселей, где для наглядности более высокая плотность отвечает латинским буквам *IR* (от Image Restoration). Всего здесь присутствует 5 градаций элементарных оптических толщин: 0.0; 0.1; 0.2; 0.3 и 0.5. Размеры приемника (проекции) приняты равными 15 пикселям. Среднее значение падающего потока излучения I_0 соответствовало 10^4 событий/пиксел; аддитивный шум предполагался пуассоновским с постоянным по формату средним значением $b(j, \varphi_p) = 100$ событий/пиксел. Размеры пикселей объекта и спроецированных изображений были приняты равными друг другу. При вычислении суммарной оптической толщины в заданном направлении учитывался не просто факт попадания центров пикселей объекта в проекции пикселей приемника, но более полная информация относительно поглощения в каждом пикселе объекта. Именно, последние аппроксимировались кругами с постоянным коэффициентом поглощения, и для каждого круга, «задевающего» проекцию пиксела приемника, вычислялась некоторая эффективная длина хорды путем деления площади соответствующего сегмента на его высоту. Таким образом, вместо (12) применялось соотношение:

$$R(j, \varphi_p) = \sum_L S_{ik} \cdot l_{ik}(j, \varphi_p), \quad (20)$$

где суммирование вдоль направления L включает все круговые пиксели объекта (i, k) , которые задевают проекцию пиксела (i, φ_p) изображения $(i, k = -4, +4; j = -7, +7)$; S_{ik} — коэффициент поглощения в пикселе (i, k) ; l_{ik} — упомянутая выше эффективная длина отрезка поглощения:

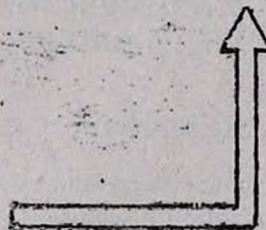
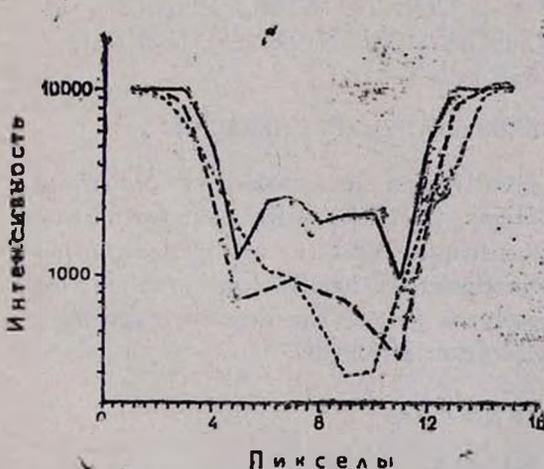
$$l_{ik}(j, \varphi_p) = \begin{cases} 0, & \text{при } d = |i \cdot \cos \varphi_p + k \cdot \sin \varphi_p - j| \geq 1, \\ \frac{[2 \cdot \arccos(2d-1) - \sin(2 \cdot \arccos(2d-1))]}{8(1-d)}, & \text{при } d < 1. \end{cases} \quad (21)$$

На рис. 2с представлены в качестве примера несколько спроецированных под разными углами распределений интенсивности, в совокупности составляющих «изображение», на основании которого восстанавливается распределение плотности в объекте. Результаты такого восстановления при 125 равномерно распределенных углах поворота φ_p даны на рис. 2д, е.



.100	100	100	100	100	100	.100	100	100
.300	.300	.300	100	.500	.500	.500	.500	100
.000	.300	100	100	100	.500	.200	.200	.500
.000	.300	100	100	100	.500	.200	.200	.500
.000	.300	100	.100	.100	.500	.500	.500	.000
.000	.300	100	.100	.100	.500	.100	.500	.000
.000	.300	100	.100	.100	.500	.100	.100	.500
.300	.300	.300	100	.500	.500	.100	100	.500
.100	100	100	.100	.100	.100	.100	.100	.100

100	107	093	104	095	107	098	090	100
285	305	291	113	494	507	499	503	100
.010	294	088	103	084	526	72	192	499
.003	288	137	061	.123	475	214	222	494
.000	301	080	126	.275	.532	492	481	.001
.003	294	122	083	.198	474	..	506	956
.000	297	088	106	107	498	.092	.096	650
297	.99	306	.089	511	497	190	399	504
.096	103	098	102	094	..	13	.94	100



Пиксeлы

Рис. 2. Графическое (а) и численное (б) представления объекта (двух первых букв слов Image Restoration), примеры его томографических проекций (с), численное (д) и графическое (е) представления реконструкции объекта методом MLIR по 125 проекциям.

Очевидно, количество пикселей, проекций и интенсивность падающего излучения в каждом отдельном случае могут быть согласованы с требуемыми точностью восстановления и пространственным разрешением. Существенным здесь является тот факт, что при заданных значениях точности и разрешения описанные нами ранее «предельные» свойства подхода *SPIPR* обеспечивают минимально возможную в принципе дозу облучения. Это же обстоятельство можно охарактеризовать и таким образом: при фиксированном потоке излучения *SPIPR* позволяет достичь наиболее высокого пространственного разрешения и максимальной точности восстановления.

6. *Заключительные замечания.* Отметим еще раз, что приведенный выше анализ не исчерпывает возможностей *SPIPR* в указанных областях приложений; наша задача состояла лишь в выяснении принципиальных вопросов, возникающих при таком рассмотрении. Особое внимание следует уделить адекватному учету априорной информации, поскольку от нее самым существенным образом зависит качество восстановления. Эти вопросы будут рассмотрены в последующих публикациях.

Авторы признательны В. В. Бирюкову за полезное обсуждение.

Крымская лаборатория
Государственного астрономического
института им. П. К. Штернберга

MAXIMUM LIKELIHOOD IMAGE RESTORATION. VII. WANDERING OF IMAGE DUE TO ATMOSPHERE TURBULENCE AND RECONSTRUCTION IN COMPUTERIZED TOMOGRAPHY

V. YU. TEREBIZH, O. K. CHERBUNINA, YU. G. CHERBUNIN

Two concrete problems are investigated in a frame of *Statistical Parameterization of Inverse Problems (SPIPR)* approach: restoration of blurred by atmosphere wandering images and structure reconstruction of objects, using tomographic projections. All needed for practice formulae and corresponding model cases are given. The described approach attains the theoretical limit of restoration efficiency.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ю. Теребиж, *Астрофизика*, 32, 327, 1990.
2. V. Yu. Terebizh, *Astron. and Astrophys. Transac.*, 1, No. 1, 1991.
3. V. Yu. Terebizh, *Proc. Third ESO/ST-ECF Data Analysis Workshop*. Garching, 22—23 April 1991.

4. V. Yu. Terebizh, *Experimental Astronomy* (in press).
5. В. Ю. Теребиж, О. К. Чербунина, Ю. Г. Чербунин, В. В. Бирюков. *Астрофизика*, 34, 91, 1991.
6. В. Ю. Теребиж, В. В. Бирюков, *Астрофизика* 34, 233, 1991.
7. С. М. Рытов, Ю. А. Крауцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику*, ч. II, Наука. М., 1978.
8. D. L. Fried, *J. Opt. Soc. Amer.*, 55, 1427, 1965.
9. F. Roddier, *Progress in Optics*, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, London, 19, 281, 1981.
10. A. Labeyrie, *Astron. and Astrophys.*, 6, 85, 1970.
11. A. Labeyrie, *Progress in Optics*, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 14, 49, 1976.
12. J. M. Beckers, L. E. Goad, *Instrumentation for Ground-Based Optical Astronomy*, Proc. 9th Santa Cruz Summer Workshop, ed. L. B. Robinson, Springer, New York, 1988, p. 315.
13. A. K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.

П О П Р А В К А

В статье В. Ю. Теребижа «Максимально правдоподобное восстановление изображений. IV. Предельное разрешение при заданной альтернативе» (Астрофизика, 33, выпуск 3, 409—427) по вине автора допущена ошибка в одном из примеров, иллюстрирующих общие соотношения. Именно, в формуле (35) пропущена операция возведения в квадрат модулей спектральных плотностей. Правильное написание формул (35), (36), (38) и (39) имеет вид:

$$|\Delta S(f)|^2 = 4 \sin^2(\pi \rho f) |S_0(f)|^2, \quad (35)$$

$$\Theta = 2 \left[\int_{-f_R}^{f_R} |T(f)|^2 \cdot |S_0(f)/F|^2 \cdot \sin^2(\pi \rho f) df / f_R \right]^{1/2}, \quad (36)$$

$$r \cong K \cdot \frac{z_\alpha + z_\beta}{\Psi}, \quad \Psi \gg 1, \quad (38)$$

$$K = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-f_R}^{f_R} |T(f)|^2 \cdot |S_0(f)/F|^2 \cdot (f/f_R)^2 d(f/f_R) \right]^{-1/2}. \quad (39)$$

Таким образом, для относительно ярких объектов в приближении детерминированного формирования изображения предельно малое наружимое смещение обратно пропорционально первой степени отношения сигнала к шуму, в отличие от рассматриваемого далее случая двойных источников, где предельное разделение компонентов обратно пропорционально квадратному корню из отношения сигнала к шуму.