АСТРОФИЗИКА

ТОМ 34 ИЮНЬ, 1991 ВЫПУСК 3

УДК: 52—64

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ГЛУБИННЫХ АСИМПТОТИК В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Ж. М. ДАЛУГАЧ, Э. Г. ЯНОВИЦКИЙ

Поступила 18 января 1991

Принята к печати 20 марта 1991

Показано, что оценка точности глубинных асимптотических формул для плоских однородных атмосфер большой оптической толщины сводится к нахождению одной универсальной функции $\delta(\tau, \lambda)$, которая для заданной индикатрисы рассеяния зависит лишь от двух параметров: оптической глубины τ и альбедо однократного рассеяния λ. Рассмотрены свойства этой функции и проведены ее расчеты для индикатрисы рассеяния Хеньи—Гринстейна, результаты которых представлены на графиках.

1. *Введение.* В астрофизических и ряде других приложений теории переноса излучения самое широкое применение находят всевозможные асимптотические формулы. Благодаря своей простоте и физической наглядности эти формулы служат стандартным инструментом при проведении количественных оценок, связанных с нтерпретацией тех или иных наблюдений. Примеры различного рода асимптотик можно найти, например, в книгах В. В. Соболева [1] и ван де Хюлста [2].

Поскольку причины появления тех или иных асимптотических упрощений весьма разнообразны (подробнее см. [3]), сразу же уточним: в настоящей работе будет идти речь о так называемых *глубинных* асимптотиках, возникающих вследствие разделения угловых переменных при описании излучения, проходящего сквозь оптически толстые слои. Основой для нахождения упомянутых асимптотик служит формула В. В. Соболева [4] (см. также [1], гл. II, § 4).

$$I^{as}(\tau, \mu, \mu_0) = i(\mu)\, u(\mu_0)\, \mu_0 e^{-k\tau}. \tag{1}$$

Здесь $I(\tau, \mu, \mu_0)$ —усредненная по азимуту интенсивность излучения в полубесконечной плоской однородной атмосфере в задаче с параллельным внешним потоком, падающим на границу под углом $\arccos \mu_0$

к оси оптических глубин τ и создающим освещенность, равную $\pi\mu_0$. Функция $i(\mu)$ есть относительное угловое распределение интенсивности излучения в глубоких слоях среды; $u(\mu_0)$ —функция выхода или интенсивность излучения на границе в задаче Милна; k— показатель диффузии или минимальный положительный корень характеристического уравнения (см. ниже). Индекс «as» означает, что формула (1) справедлива лишь в глубоких слоях среды ($\tau \gg 1$). Эта формула является основной как при получении асимптотических выражений для коэффициентов отражения $\rho^{as}(\mu, \mu_0; \tau_0)$ и пропускания $\sigma^{as}(\mu, \mu_0; \tau_0)$ атмосферой большой оптической толщины ($\tau \gg 1$) [4, 5], так и при определении интенсивности излучения внутри такой атмосферы [6].

Более того, оказалось, что и в других проблемах теории переноса излучения, связанных с изучением асимптотических свойств полей излучения и имеющих широкие астрофизические приложения, формула (1) играет ключевую роль. Речь идет о свечении плоского слоя большой оптической толщины при облучении его точечным источником [7], а также об аналогичной задаче, возникающей при рассмотрении рассеяния света в сферической оболочке и шаре [8—12].

Однако при практическом использовании упоминавшихся выше асимптотических формул возникает естественный вопрос: начиная с каких значений τ_0 (или τ, если речь идет о внутренних полях излучения) можно применять то или иное асимптотическое выражение, не внося существенных погрешностей? На первый взгляд дать ответ на этот вопрос в достаточно обозримой форме весьма трудно, поскольку соответствующие выражения содержат в себе множество переменных и параметров. Но более внимательный анализ, как мы увидим, позволяет это сделать.

Следует сказать, что Н. В. Коновалов в [13] подробно изучил область применимости асимптотических формул для интенсивности излучения как диффузно пропущенного, так и диффузно отраженного атмосферой, состоящей из оптически толстых однородных слоев. В частности, им установлена зависимость степени точности асимптотических формул от числа корней соответствующего характеристического уравнения. Подробнее об этом речь будет идти далее.

В настоящей работе предлагается общий подход к решению проблемы оценки точности глубинных асимптотик и приведены результаты расчетов соответствующей вспомогательной функции, которые позволяют легко проводить упомянутые оценки в зависимости от степени анизотропии рассеяния света в среде и ее поглощающих свойств.

2. *Исходные соотношения и формулы.* Рассмотрим плоскую полубесконечную однородную атмосферу, освещенную параллельными лучами. Мысленно проводя разрез на произвольной оптической глубине τ_0 и воспользовавшись обобщенным принципом инвариантности [14], можно записать ($\mu \in [-1, +1]$, $\tau \in [0, \tau_0]$):

$$I(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) = I(\tau, \mu, \mu_0) - I(\tau_0, \mu, \mu_0)\, e^{(\tau_0-\tau)/\mu}\, \theta(-\mu) - \\ - 2\int_0^1 I(\tau_0 - \tau, -\mu, \mu'; \tau_0)\, I(\tau_0, -\mu', \mu_0)\, d\mu'. \quad (2)$$

Здесь обозначено $I(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)$—нулевая азимутальная гармоника интенсивности диффузного излучения, идущего в направлении, определяемом величиной μ в слое оптической толщины τ_0. Величина $\theta(\mu)$ есть функция единичного скачка:

$$\theta(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu < 0, \\ 1, & \mu \geqslant 0. \end{cases} \quad (3)$$

Из (2) и (1) нетрудно получить [6] (см. также [5] следующую асимптотическую формулу для интенсивности излучения:

$$I^{as}(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0) = I(\tau, \mu, \mu_0) - \{ I(\tau, \mu)\, r(\tau_0) - \\ - [I(\tau_0 - \tau_1 - \mu) - I^{as}(\tau_0 - \tau_1 - \mu)]\, t(\tau_0) \}\, u(\mu_0)\, \mu_0. \quad (4)$$

Здесь верхний индекс «as» у функции $I(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)$ отмечает, что взят слой большой оптической толщины ($\tau_0 \gg 1$), но величина τ — произвольна ($\tau \in [0, \tau_0]$). Функция $I(\tau, \mu)$ есть интенсивность излучения в задаче Милна. Факторы отражения $r(\tau_0)$ и пропускания $t(\tau_0)$ связаны между собой соотношением

$$r(\tau_0) = t(\tau_0)\, N e^{-k\tau_0} = \frac{M N e^{-2k\tau_0}}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}}, \quad (5)$$

где асимптотические постоянные M и N определяются формулами

$$M = 2\int_{-1}^{1} i^2(\mu)\, \mu\, d\mu; \qquad N = 2\int_0^1 u(\mu)\, i(-\mu)\, \mu\, d\mu. \quad (6)$$

Имеют место соотношения, полученные В. В. Ивановым в [15]

$$i(\mu)e^{-k\tau} = 2\int_0^1 I(\tau, \mu, \mu')\, i(\mu')\, d\mu' + i(\mu)\, e^{-\tau/\mu}\theta(\mu), \tag{7}$$

$$MI(\tau, \mu) = i(-\mu)\, e^{k\tau} - 2\int_0^1 I(\tau, \mu, \mu')\, i(-\mu')\, d\mu' - \\ - i(-\mu)\, e^{-\tau/\mu}\theta(\mu), \tag{8}$$

из которых при $\tau = 0$ следуют соотношения Соболева—ван де Хюлста [1, 2]

$$i(-\mu) = 2\int_0^1 \rho(\mu, \mu')\, i(\mu')\, \mu' d\mu', \tag{9}$$

$$i(\mu) = Mu(\mu) + 2\int_0^1 \rho(\mu, \mu')\, i(-\mu')\, \mu' d\mu'. \tag{10}$$

Из (8) при консервативном рассеянии ($\lambda = 1$) следует

$$2\int_0^1 I_0(\tau, \mu, \mu')\, d\mu' + e^{-\tau/\mu}\theta(\mu) = 1, \tag{11}$$

где нижний индекс «0» здесь и далее означает, что соответствующая величина относится к случаю консервативного рассеяния. Из (8) с помощью (1) для глубоких слоев среды ($\tau \gg 1$) легко получить [2]

$$MI^{as}(\tau, \mu) = i(-\mu)\, e^{k\tau} - i(\mu)\, Ne^{-k\tau}. \tag{12}$$

3. Оценка точности асимптотической формулы для интенсивности излучения в задаче Милна. Введем величину

$$\delta(\tau, \mu, \mu_0) = 1 - \frac{I(\tau, \mu, \mu_0)}{I^{as}(\tau, \mu, \mu_0)}, \tag{13}$$

где функция $I^{as}(\tau, \mu, \mu_0)$ дается формулой (1).

Из (7) и (8) с помощью (13) легко найти

$$MI(\tau, \mu) = i(-\mu)\, e^{k\tau} - i(\mu)\, e^{-k\tau} + [i(\mu) - i(-\mu)]\, e^{-\tau/\mu}\theta(\mu) -$$

$$-2\int_0^1 I^{as}(\tau,\ \mu,\ \mu')\,[i(-\mu')-i(\mu')]\,d\mu' + \tag{14}$$

$$+2\int_0^1 I^{as}(\tau,\ \mu,\ \mu')\,\delta(\tau,\ \mu,\ \mu')\,[i(-\mu')-i(\mu')]\,d\mu'.$$

Обозначим

$$\delta(\tau,\ \lambda)=\max_{\mu,\ \mu_0}|\delta(\tau,\ \mu,\ \mu_0)|, \tag{15}$$

т. е. значение величины $|\delta(\tau,\ \mu,\ \mu_0)|$ для тех μ и μ_0, при которых она становится максимальной. Тогда из (14) с помощью (1), (6) и (12) получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} M\,|I(\tau,\ \mu)-I^{as}(\tau,\ \mu)| &< (1-N)\,e^{-k\tau}\,\delta(\tau,\ \lambda)+\\ &+|i(\mu)-i(-\mu)|\,e^{-\tau/\mu}\,\theta(\mu). \end{aligned} \tag{16}$$

В консервативном пределе отсюда следует, что

$$|I_0(\tau,\ \mu)-I_0^{as}(\tau,\ \mu)|<\frac{3}{4}\,[\gamma_0\delta_0(\tau,\ 1)+\mu e^{-\tau/\mu}\,\theta(\mu)], \tag{17}$$

где

$$I_0^{as}(\tau,\ \mu)=\frac{3}{4}\left|\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\tau-\mu+\gamma_0\right|, \tag{18}$$

$$\gamma_0=2\int_0^1 u_0(\mu)\,\mu^2\,d\mu, \tag{19}$$

а величина x_1 есть первый коэффициент в разложении индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра.

Таким образом, если известна функция $\delta(\tau,\ \lambda)$, которая для конкретной индикатрисы рассеяния зависит лишь от двух параметров τ и λ, то оценка погрешности асимптотических формул (12) и (18) может быть элементарным образом осуществлена с помощью выражений (16) и (17), поскольку входящие в них функции и параметры остаются теми же, что и в исходных асимптотиках (12) и (18).

4. *Плоский слой большой оптической толщины.* В этом случае проблема становится заметно более сложной. С помощью (13) при учете (4) перепишем формулу (2) следующим образом:

$$\Delta I(\tau,\ \mu,\ \mu_0;\ \tau_0) = I(\tau,\ \mu,\ \mu_0;\ \tau_0) - I^{as}(\tau,\ \mu,\ \mu_0;\ \tau_0) =$$
$$= I^{as}(\tau_0,\ \mu,\ \mu_0)\,\delta(\tau_0,\ \mu,\ \mu_0)\, e^{(\tau_0-\tau)/\mu}\,\theta(-\mu) -$$
$$-2\int_0^1 \Delta I(\tau_0-\tau, -\mu,\ \mu';\ \tau_0)\, I^{as}(\tau_0, -\mu',\ \mu_0)\, d\mu' + \tag{20}$$
$$+2\int_0^1 \Delta I(\tau_0-\tau, -\mu,\ \mu';\ \tau_0)\, I^{as}(\tau_0, -\mu',\ \mu_0)\,\delta(\tau_0, -\mu',\ \mu_0)\, d\mu' +$$
$$+2\int_0^1 I^{as}(\tau_0-\tau, -\mu,\ \mu';\ \tau_0)\, I^{as}(\tau_0, -\mu',\ \mu_0)\,\delta(\tau_0, -\mu',\ \mu_0)\, d\mu'.$$

Далее будем рассматривать такие значения τ_0, для которых величина $\delta(\tau_0, \mu, \mu_0)$ будет достаточно мала по сравнению с единицей. Иными словами, в правой части (20) отбросим третье слагаемое*. Воспользовавшись (1), вместо (20) будем иметь

$$\Delta I(\tau,\ \mu,\ \mu_0;\ \tau_0) = \{ i(\mu)\, e^{(\tau_0-\tau)/\mu}\,\theta(-\mu)\,\delta(\tau_0,\ \mu,\ \mu_0) +$$
$$+2\int_0^1 I^{as}(\tau_0-\tau, -\mu,\ \mu';\ \tau_0)\,\delta(\tau_0, -\mu',\ \mu_0)\, i(-\mu')\, d\mu' - \tag{21}$$
$$-2\int_0^1 \Delta I(\tau_0-\tau, -\mu,\ \mu';\ \tau_0)\, i(-\mu')\, d\mu' \}\, e^{-k\tau_0}\, u(\mu_0)\,\mu_0.$$

Домножим обе части (21) на $2i(-\mu_0)$ и проинтегрируем по μ_0 от 0 до 1. В полученном таким образом выражении заменим τ на $\tau_0-\tau$ и μ на $-\mu$. В результате имеем систему уравнений относительно последнего слагаемого в правой части (21). Решив эту систему, (21) можно переписать следующим образом:

$$\Delta I(\tau,\ \mu,\ \mu_0;\ \tau_0) = \Big|\, i(\mu)\, e^{(\tau_0-\tau)/\mu}\,\theta(-\mu)\,\delta(\tau_0,\ \mu,\ \mu_0) +$$

* Как следует из (27), фактически это означает пренебрежение величинами порядка малости δ^2.

$$+2\int_0^1 I^{as}(\tau_0-\tau,\ -\mu,\ \mu';\tau_0)\,\delta(\tau_0,\ -\mu',\ \mu_0)\,i(-\mu')\,d\mu' + \tag{22}$$

$$+\left.\frac{Ne^{-k\tau_0}F(\tau_0-\tau,\ -\mu;\ \tau_0)-F(\tau,\ \mu;\ \tau_0)}{1-N^2e^{-2k\tau_0}}\right]e^{-k\tau_0}u(\mu_0)\,\mu_0,$$

где обозначено

$$F(\tau,\ \mu;\ \tau_0)=2e^{-k\tau_0}\Big[i(-\mu)\,e^{-\tau/\mu}\,\theta(\mu)\int_0^1\delta(\tau_0-\mu,\ \mu')\,i(-\mu')\,u(\mu')\,\mu'd\mu' +$$

$$+2\int_0^1 I^{as}(\tau,\ \mu,\ \mu';\tau_0)\,i(-\mu')\,d\mu'\int_0^1\delta(\tau_0-\mu',\ \mu'')\,u(\mu'')\,i(-\mu'')\,\mu''d\mu''. \tag{23}$$

Поскольку из (13) и (1) с учетом (8) и (12) следует, что

$$2\int_0^1\delta(\tau_0,\ \mu,\ \mu')\,u(\mu')\,i(-\mu')\,\mu'd\mu' =$$
$$=N-\frac{e^{k\tau_0}}{i(\mu)}\Big[i(-\mu)\,e^{k\tau_0}-MI(\tau_0,\ \mu)-i(-\mu)e^{-\tau_0/\mu}\,\theta(\mu)\Big], \tag{24}$$

а из (4) и (12), учитывая (7) и (8), вытекает

$$2\int_0^1 I^{as}(\tau,\ \mu,\ \mu';\ \tau_0)I^{as}(\tau_0-\mu')\,d\mu' =$$
$$=I(\tau_0-\tau,\ -\mu)-I^{as}(\tau_0,\ -\mu)\ e^{-\tau/\mu}\,\theta(\mu), \tag{25}$$

то после довольно утомительных преобразований можно найти

$$Ne^{-k\tau_0}F(\tau_0-\tau,\ -\mu;\ \tau_0)-F(\tau,\ \mu;\ \tau_0)=$$
$$=2MNe^{-k\tau_0}\int_0^1 I^{as}(\tau_0-\tau,\ -\mu,\ \mu';\ \tau_0)\,[I(\tau_0,\ -\mu')-I^{as}(\tau_0,\ -\mu')]\,d\mu' -$$
$$-2M\int_0^1 I^{as}(\tau,\ \mu,\ \mu';\ \tau_0)\,[I(\tau_0-\mu')-I^{as}(\tau_0,\ -\mu')]\,d\mu' + \tag{26}$$
$$+Ne^{(\tau_0-\tau)/\mu-k\tau_0}\,\theta(-\mu)\cdot M\cdot[I(\tau_0,\ \mu)-I^{as}(\tau_0,\ \mu)]-$$
$$-e^{-\tau/\mu}\,\theta(\mu)\,M[I(\tau_0-\mu)-I^{as}(\tau_0,\ -\mu)].$$

Наконец, подставляя (4) в (26), воспользовавшись (16) и неравенством

$$2\int_0^1 I(\tau, \mu, \mu')\, d\mu' \leqslant 2\int_0^1 I_0(\tau, \mu, \mu')\, d\mu' = 1 - e^{-\tau/\mu} 0(\mu),$$

которое следует из (11), а также пренебрегая слагаемыми, пропорциональными $e^{-\tau_0/\mu}$, окончательно получаем

$$|\Delta I(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)| \leqslant [I(\tau, \mu, \mu_0) - I^{as}(\tau, \mu, \mu_0; \tau_0)]\,\delta(\tau_0, \lambda) +$$
$$+ \frac{1-N}{M} t(\tau_0) e^{-k\tau_0} \{1 + Ne^{-k\tau_0} + C\,|\,Me^{-k\tau_0} I(\tau_0 - \tau, -\mu) - \tag{27}$$
$$- e^{-k\tau} i(\mu)|\}\, \delta(\tau_0, \lambda)\, u(\mu_0)\, \mu_0,$$

где

$$C = 2\int_0^1 u(\mu)\, \mu d\mu. \tag{28}$$

Таким образом, как видно из (27), если известна величина $\delta(\tau_0, \lambda)$, то при достаточно больших значениях τ_0 оценка погрешности асимптотической формулы (4) может быть осуществлена с помощью тех же функций и параметров, которые входят в (4). Заметим, что для асимптотической постоянной C справедливо неравенство

$$\frac{4}{\lambda}\frac{1-\lambda}{kM} < C \leqslant \frac{8}{\lambda}\frac{1-\lambda}{kM}, \tag{29}$$

которое легко может быть получено с помощью соотношений (9) и (10).

При консервативном рассеянии, учитывая (4) и (5), вместо (27) имеем

$$|\Delta I_0(\tau, \mu, \mu; \tau_0)| \leqslant \Big\{ I_0(\tau, \mu) - I_0(\tau_0 - \tau, -\mu) +$$
$$+ \frac{3}{4}\left|\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)(\tau_0 - \tau) + \mu + 2\lambda_0\right|\Big\}\, t_0(\tau_0)\, u_0(\mu_0)\, \delta_0(\tau_0, 1)\, \mu_0, \tag{30}$$

где

$$t_0(\tau_0) = \frac{4}{(3 - x_1)\tau_0 + 6\gamma_0}. \tag{31}$$

Отсюда, в частности, для коэффициентов отражения ρ и пропускания σ вытекают следующие оценки:

$$|\Delta\rho_0| < \frac{4u_0(\mu) + 3\gamma_0}{(3 - x_1)\tau_0 + 6\gamma_0}\, u_0(\mu_0)\,\delta_0(\tau_0, 1), \tag{32}$$

$$|\Delta\sigma_0| \leqslant \left|1 - \frac{4u_0(\mu) - 3\gamma_0}{(3 - x_1)\tau_0 + 6\gamma_0}\right| u_0(\mu_0)\,\delta_0(\tau_0, 1), \tag{33}$$

где обозначено $\Delta\rho_0 = \rho_0(\mu, \mu_0; \tau_0) - \rho_0^{as}(\mu, \mu_0; \tau_0)$, $\Delta\sigma_0 = \sigma_0(\mu, \mu_0; \tau_0) - \sigma_0^{as}(\mu, \mu_0; \tau_0)$.

Из этих формул видно, что при консервативном рассеянии степень точности асимптотики для коэффициента отражения всегда выше, чем для коэффициента пропускания. Нетрудно показать, что это заключение остается справедливым и в случае почти консервативного рассеяния ($k \ll 1$) при $k\tau_0 \ll 1$. Вывод, который мы только что сделали, был ранее сформулирован Н. В. Коноваловым [13] как следствие результатов проведенных им численных экспериментов.

Для поглощающих сред при $k\tau_0 \gg 1$ из (27) при учете (4), (5) и (12) имеем

$$|\Delta\rho| \leqslant \delta(\tau_0, \lambda)\, u(\mu_0)\, MN e^{-2k\tau_0} \left| u(\mu) + \frac{1 - N}{MN} \right|, \tag{34}$$

$$|\Delta\sigma| \leqslant \delta(\tau_0, \lambda)\, u(\mu_0)\, e^{-k\tau_0}[i(\mu) - u(\mu) M], \tag{35}$$

т. е. и в этом случае точность асимптотики для коэффициента отражения оказывается выше, чем для коэффициента пропускания.

5. *Функция $\delta(\tau, \lambda)$ и ее свойства.* Как было показано выше, основной величиной, через которую определяется погрешность глубинных асимптотик, является универсальная функция $\delta(\tau, \lambda)$. На рис. 1—5 приведены графики функций $\Delta(\tau, \lambda) = -\lg \delta(\tau, \lambda)$, рассчитанных для индикатрисы рассеяния Хеньи—Гринстейна при различных значениях g и λ. Вычисления функции $I(\tau, \mu, \mu_0)$, входящей в $\delta(\tau, \lambda)$, проводились по формуле удвоения В. В. Иванова [15] методом, описанным в [16].

Проведем некоторый анализ свойств функции $\Delta(\tau, \lambda)$ основываясь преимущественно на идеях, высказанных в статье Н. В. Коновалова [13]. Как видно из рисунков, характерной чертой поведения функции $\Delta(\tau, \lambda)$ для достаточно больших значений оптической толщины есть практически линейная зависимость ее от τ. Некоторое отклонение от линейности наблюдается лишь для очень сильно вытянутой индикатрисы рассеяния ($g = 0.9$, рис. 5).

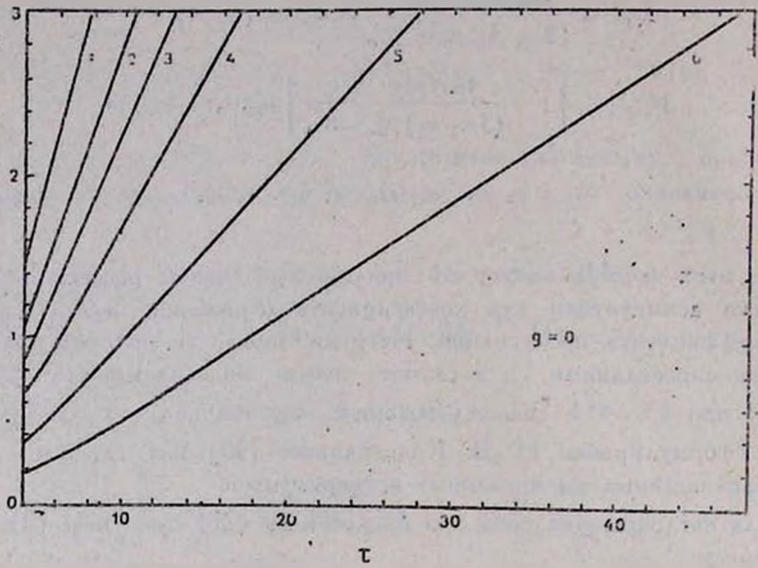

Рис. 1. Функция $\Delta(\tau, \lambda) = -\lg|\delta(\tau, \lambda)|$ (см. текст) для различных значений при изотропном рассеянии. Кривые: $1 - \lambda = 1$; $2 - \lambda = 0.98$; $3 - \lambda = 0.95$; $4 - \lambda = 0.9$; $5 - \lambda = 0.8$; $6 - \lambda = 0.7$.

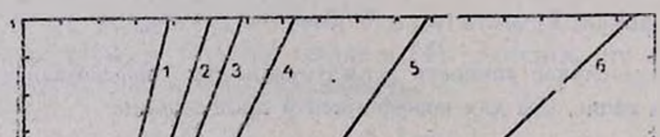

Рис. 2. То же, что на рис. 1, для индикатрисы рассеяния Хеньи—Гринстейна при $g = 0.25$.

Такое поведение $\Delta(\tau, \lambda)$ легко объясняется следующими соображениями [13]. Общее выражение для нулевой азимутальной гармоники интенсивности излучения можно представить следующим образом:

$$I(\tau, \mu, \mu_0) = \sum_{i=0}^{n} f_i(\mu, \mu_0)\, e^{-k_i \tau} + \int_0^1 \varphi(\mu', \mu, \mu_0)\, e^{-\tau/\mu'}\, d\mu', \tag{36}$$

где $f_i(\mu, \mu_0)$ и $\varphi(\mu', \mu, \mu_0)$ — некоторые функции, причем

$$f_0(\mu, \mu_0) = i(\mu)\, u(\mu_0)\, \mu_0, \tag{37}$$

k_i—корни характеристического уравнения ($k_i \in [0, 1]$)

$$\int_0^1 \frac{\psi(\mu')}{1 - k\mu'}\, d\mu' = 1, \tag{38}$$

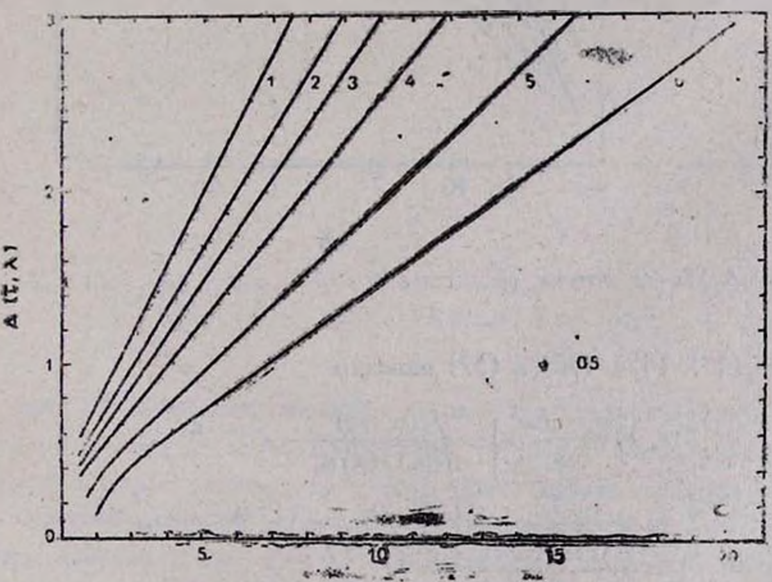

Рис. 3. То же, что на рис. 1, для $g = 0.5$.

а $\psi(\mu)$ есть характеристическая функция, которая легко может быть найдена, если задана индикатриса рассеяния (подробнее см. [1], гл. V).

Как показала Т. А. Гермогенова [17], знание функции $\psi(\mu)$ позволяет оценить число корней характеристического уравнения.

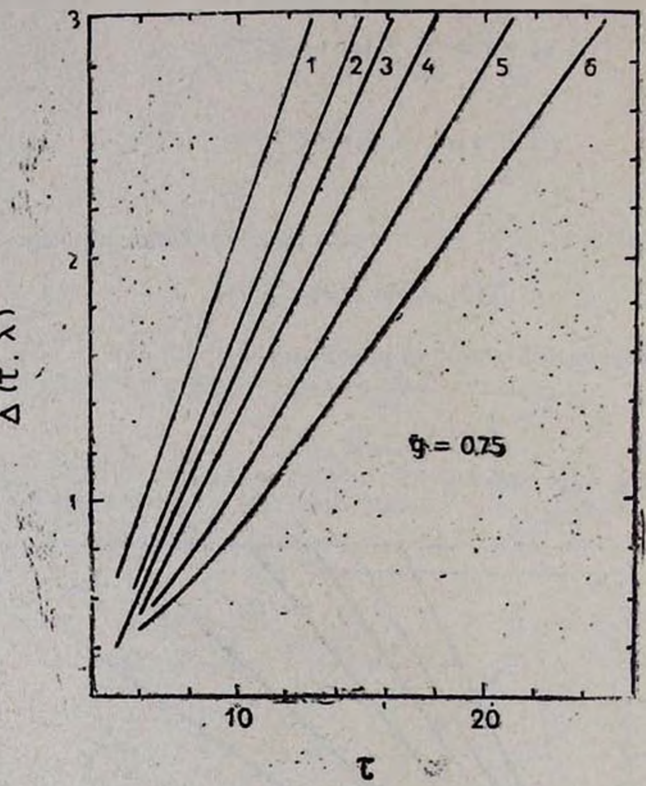

Рис. 4. То же, что на рис 1, для $g=0.75$.

Из (13), (15), (36) и (37) находим

$$
\begin{aligned}
\delta(\tau, \lambda) = \max_{\mu, \mu_0} \Bigg| & \frac{f_1(\mu, \mu_0)}{u(\mu_0)\, i(\mu)\, \mu_0} e^{-(k_1-k_0)\tau} + \\
& + \frac{1}{u(\mu_0)\, i(\mu)\, \mu_0} \left[\sum_{i=2}^{n} f_i(\mu, \mu_0)\, e^{-(k_i-k_0)\tau} + \right. \\
& \left. + \int_0^1 \varphi(\mu', \mu, \mu_0)\, e^{-\tau/\mu'}\, d\mu' \right] \Bigg|.
\end{aligned} \tag{39}
$$

Отсюда видно, что, если для $i \geqslant 2$ корни характеристического уравнения отсутствуют, то для достаточно больших значений τ величина

$$\Delta(\tau, \lambda) \simeq (k_1 - k_0)\tau \lg e - \lg \max_{\mu,\ \mu_0} \left| \frac{f_1(\mu, \mu_0)}{u(\mu_0)\, i(\mu)\, \mu_0} \right|,$$

т. е. зависимость $\Delta(\tau, \lambda)$ от τ будет линейной.

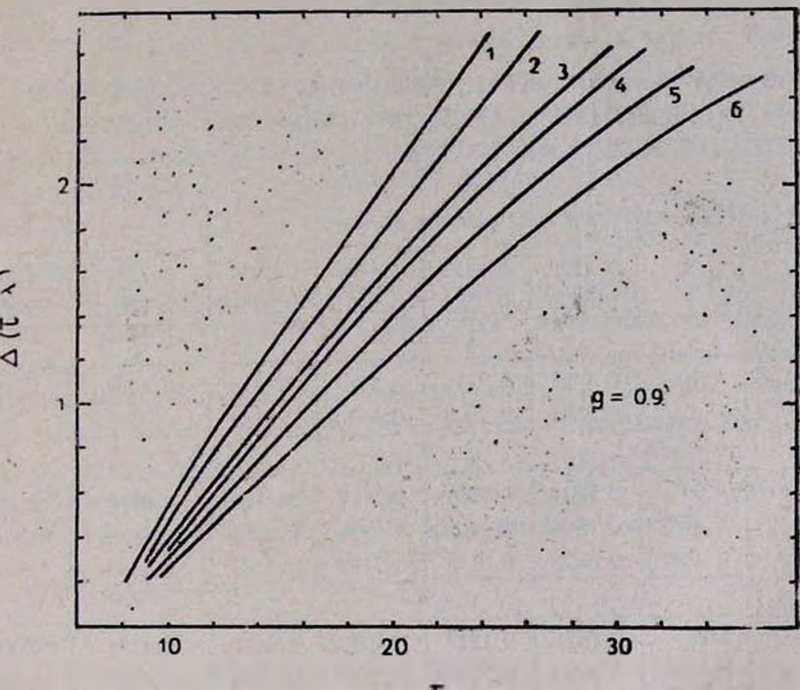

Рис. 5. То же, что на рис. 1, для $g=0.9$. Кривые: 1 — $\lambda=1$; 2 — $\lambda=0.995$; 3 — $\lambda=0.95$; 4 — $\lambda=0.9$; 5 — $\lambda=0.8$; 6 — $\lambda=0.7$.

В табл. 1 приведены значения корней характеристического уравнения для различных g и λ. Кроме того, в конце каждого из блоков таблицы, в которых приведены корни для соответствующих g, даны также величины разности k_1-k_0. При этом для $g=0$ и 0.25, а также для тех значений λ при $g=0.5$, для которых корень k_1 отсутствует, приближенно полагалось $k_1=1$. Как нетрудно убедиться, именно поведение разности (k_1-k_0) и определяет, в основном, ход кривых, представленных на рис. 1—5. Что же касается заметного отклонения от линейности кривых на рис. 5 для $g=0.9$, то, как видно из (39), оно связано, в основном, с заметным влиянием старших корней $(i \geqslant 2)$ характеристического уравнения. Интересно также отметить, что для всех значений g и того диапазона τ, для которого рассчитывались функции $\Delta(\tau, \lambda)$, представленные на рисунках, максимум величины $|\delta(\tau, \mu, \mu_0)|$ достигается при $\mu = \mu_0 = 1$.

Таблица 1

КОРНИ k_n ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИНДИКАТРИСЫ РАССЕЯНИЯ ХЕНЬИ—ГРИНСТЕЙНА

n \ λ	1.0	0.99	0.98	0.95	0.9	0.8	0.7
$g = 0$							
0	0	0.1725	0.2430	0.3795	0.5254	0.7104	0.8286
$k_1 - k_0$	1	0.8275	0.7570	0.6205	0.4746	0.2896	0.1714
$g = 0.25$							
0	0	0.1496	0.2110	0.3310	0.4618	0.6344	0.7532
$k_1 - k_0$	1	0.8504	0.7890	0.6690	0.5382	0.3656	0.2468
$g = 0.5$							
0	0	0.1224	0.1731	0.2733	0.3856	0.5418	0.6579
1	0.9887	0.9896	0.9906	0.9931	0.9963	—	—
$k_1 - k_0$	0.9887	0.8672	0.8175	0.7198	0.6107	0.4582	0.3421
$g = 0.75$							
0	0	0.0871	0.1239	0.1990	0.2881	0.4234	0.5345
1	0.7110	0.7183	0.7254	0.7459	0.7776	0.8333	0.8802
2	0.9427	0.9451	0.9474	0.9540	0.9641	0.9802	0.9915
$k_1 - k_0$	0.7110	0.6312	0.6015	0.5469	0.4895	0.4099	0.3457
$g = 0.9$							
0	0	0.0561	0.0810	0.1354	0.2064	0.3258	0.4325
1	0.3403	0.3530	0.3654	0.4007	0.4547	0.5510	0.6364
2	0.5524	0.5615	0.5704	0.5963	0.6368	0.7097	0.7739
3	0.7086	0.7152	0.7217	0.7405	0.7701	0.8231	0.8691
4	0.8217	0.8263	0.8309	0.8442	0.8651	0.9019	0.9329
5	0.9007	0.9039	0.9070	0.9159	0.9298	0.9537	0.9726
6	0.9528	0.9548	0.9567	0.9622	0.9706	0.9842	0.9936
7	0.9837	0.9847	0.9857	0.9886	0.9926	0.9980	—
8	0.9979	0.9982	0.9985	0.9993	—	—	—
$k_1 - k_0$	0.3403	0.2969	0.2844	0.2653	0.2483	0.2252	0.2039

6. *Заключение.* Итак, на примере классических проблем—задачи Милна и задачи с параллельным внешним потоком для оптически толстого слоя—оценка погрешности соответствующих асимптотических формул сведена нами к нахождению функции $\delta(\tau, \lambda)$, которая для заданной индикатрисы рассеяния зависит лишь от параметров λ и τ. Можно показать, что и в иных задачах (см. [8—12] проблема также сводится к оценке функции $\delta(\tau, \lambda)$. Хотя результаты наших расчетов этой функции приведены лишь для индикатрисы рассеяния Хеньи—Гринстейна, следует ожидать, что они могут быть полезными для оценок погрешности (по крайней мере, в первом приближении) соответствующих асимптотических формул и для произвольной индикатрисы рассеяния. Видимо, в этом случае следует найти величину x_1 и использовать те значения $\Delta(\tau, \lambda)$, для которых $g=x_1/3$.

Наконец, следует подчеркнуть, что нами проведена оценка погрешности асимптотических формул лишь для интенсивности излучения, усредненной по азимуту. Что касается влияния старших азимутальных гармоник интенсивности на поле излучения, то на этом вопросе мы здесь останавливаться не будем. Заметим лишь, что некоторые оценки для этого случая можно найти, например, в работе [16].

В заключение выражаем признательность Д. И. Нагирнеру, чьи замечания стимулировали выполнение настоящей работы.

Главная астрономическая

обсерватория АН УССР

AN ESTIMATION OF ACCURACY FOR DEPTH ASYMPTOTIC FORMULAS IN SOME RADIATIVE TRANSFER PROBLEMS

J. M. DLUGACH, E. G. YANOVITSKIJ

An estimation of accuracy of depth asymptotic formulas for plane-homogeneous atmospheres of large optical thickness is shown to be reduced to the determination of one universal function $\delta(\tau, \lambda)$. For given phase function, the function $\delta(\tau, \lambda)$ depends only on two parameters: the optical depth τ and the single scattering albedo λ. The properties of this function are considered and some calculations are provided for the Henyey-Greenstein phase function. The results of these calculations are presented in Figures.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
2. *H. C. van de Hulst*, Multiple Light Scattering, v. 1, 2, Academic Press, N.-Y., 1980.
3. *В. В. Иванов*, Астрофизика, 10, 194, 1974.
4. *В. В. Соболев*, Докл. АН СССР, 179, 41, 1968.
5. *Т. А. Гермогенова*, Ж. вычисл. мат. и физ., 1, 1001, 1961.
6. *В. В. Иванов*, Тр. астрон. обсерв. ЛГУ, 32, 3, 1975.
7. *В. В. Соболев*, Докл. АН СССР, 270, 837, 1983.
8. *Д. И. Нагирнер*, Уч. зап. ЛГУ, № 328, 66, 1965.
9. *Т. А. Гермогенова*, Астрофизика, 2, 251, 1966.
10. *В. В. Соболев*, Докл. АН СССР, 273, 573, 1983.
11. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 21, 309, 1984.
12. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 22, 177, 1985.
13. *Н. В. Коновалов*, Изв. АН СССР, Физ. атмосф. и океана, 11, 1263, 1975.
14. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 58, 119, 1981.
15. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 52, 217, 1975.
16. *Ж. М. Длугач*, Астрон. ж., 53, 1295, 1976.
17. *Т. А. Гермогенова*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 14, 1526, 1974.