

УДК: 52:535.317.1

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ
ИЗОБРАЖЕНИЙ. VI. ПРЕДЕЛ РАО-КРАМЕРА
ЭФФЕКТИВНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

В. Ю. ТЕРЕБИЖ, В. В. БИРЮКОВ

Поступила 8 января 1991

Наличие внутреннего (радиационного) шума излучения неизбежно приводит задачу восстановления размытых и зашумленных изображений к статистической задаче оценивания многих неизвестных параметров—интенсивностей оригинала в пикселах. При этом независимо от метода существует теоретический предел эффективности восстановления, который определяется теоремой Рао-Крамера. Соображения общего характера, а также численные и аналитические примеры показывают, что восстановление при помощи описанного в [2, 3] метода максимума правдоподобия (MLIR) достигает предельной эффективности уже при интенсивности светового изображения, сравнимой со средним уровнем внешнего шума. Приведены расчетные соотношения, позволяющие найти естественную точность восстановления изображений (коридор ошибок).

1. Введение. Существует несколько десятков методов восстановления изображений и выбор одного из них часто диктуется традицией, вычислительными возможностями или иными сопутствующими факторами. Сопоставление всех методов друг с другом затруднено тем обстоятельством, что в различных условиях и для различных классов задач их эффективность может значительно изменяться. Сейчас можно лишь определенно сказать, что длительный опыт работы свидетельствует о превосходстве нелинейных методов восстановления, позволяющих достичь высокого разрешения.

Вместе с тем достаточно очевидно, что при заданных условиях наблюдения, включающих априорную информацию об оригинале, функции рассеяния точки и шуме, а также фиксированном уровне надежности оценки существует естественный предел эффективности восстановления деградированного изображения. Наличие такого предела позволяет ввести абсолютное упорядочение методов восстановления по их эффективности и, что не менее важно, количественно оценить точность восстановления (коридор ошибок).

Однако ни существование естественного предела эффективности, ни его конкретное представление не были ясны до тех пор, пока проблема восстановления изображений трактовалась как типичная обратная задача в рамках теории интегральных уравнений. При этом не принимались во внимание внутренний (радиационный) шум изображения, обусловленный квантовой природой света, и вообще вероятностный характер процесса формирования изображения. Между тем, легко видеть, что при типичном для эксперимента пуассоновском внешнем шуме пренебречь радиационным шумом можно лишь в случае очень слабых источников, но тогда меняется и вся стандартная постановка задачи.

Вероятностное рассмотрение процесса формирования изображения неизбежно приводит к трактовке задачи восстановления как статистической задачи оценивания совокупности неизвестных параметров—дискретного представления оригинала. В этой форме эффективность восстановления естественно описывается в терминах *смещения* и *дисперсии* оценок оригинала. Наконец, в математической статистике доказано неравенство Рао-Крамера (восходящее к фундаментальным результатам Р. Фишера [1]), утверждающее, что независимо от способа оценивания неизвестных параметров существует нижняя граница среднеквадратичного отклонения оценок параметров от их истинных значений. Эта нижняя граница (граница Рао-Крамера) и дает естественный предел эффективности восстановления изображений. При этом граничные значения в каждом конкретном случае в принципе могут быть вычислены заранее, до применения какой-либо процедуры восстановления.

Методы оценки неизвестных параметров, достигающие границы Рао-Крамера, называются *эффективными* или *максимально эффективными*. Наряду с указанным выше имеются и другие строгие результаты, представляющие в данном контексте особый интерес. Именно, показано, что при некоторых простых условиях эффективная оценка, если она вообще существует, совпадает с оценкой максимального правдоподобия. Аналогичный результат справедлив и для асимптотически-эффективных оценок. Это обстоятельство выделяет метод максимального правдоподобия среди других многочисленных способов получения оценок параметров: в определенном смысле оценки максимального правдоподобия являются наилучшими.

В данной статье показано, что в задаче о восстановлении изображений при некогерентном освещении, строго говоря, не существует эффективной оценки оригинала, однако метод максимального правдоподобного восстановления изображений (MLIR) в том виде, как он изложен в [2, 3], уже при очень незначительной яркости изображения во всех изученных случаях обеспечивает получение оценок, практически совпадающих с

границей Рао-Крамера. Таким образом, в смысле среднеквадратического отклонения в каждом пикселе изображения оценки MLIR фактически реализуют предельно достижимую точность восстановления.

2. *Численный пример.* Для сравнения между собой различных оценок оригинала нам понадобятся достаточно громоздкие математические понятия, и потому представляется весьма полезным рассмотреть сначала простой пример, на котором станут ясны смысл и необходимость выбранного описания.

Таблица 1

ЧИСЛЕННЫЕ ДАННЫЕ К МОДЕЛИ TEST-1

k, j	C_k	λ_j	\hat{z}_k	s_k	$(I^{kk})^{1/2}$
1	—	100	—	—	—
2	—	100	—	—	—
3	0	110	3.9 ∓ 1.0	9.8 ∓ 0.7	38.7
4	0	140	12.8 ∓ 2.0	20.5 ∓ 1.5	63.0
5	100	210	-8.9 ∓ 5.6	56.1 ∓ 4.0	75.8
6	200	360	-3.7 ∓ 8.1	80.9 ∓ 5.8	102.9
7	300	570	-0.3 ∓ 11.8	117.6 ∓ 8.4	130.2
8	1000	840	8.0 ∓ 14.3	143.2 ∓ 10.2	152.8
9	1000	920	-1.9 ∓ 14.5	144.8 ∓ 10.3	163.4
10	600	860	-1.9 ∓ 15.4	154.1 ∓ 11.0	162.9
11	700	850	12.9 ∓ 16.6	166.1 ∓ 11.8	166.1
12	800	1100	-8.6 ∓ 17.1	171.1 ∓ 12.2	183.8
13	900	1400	0.3 ∓ 17.9	179.4 ∓ 12.8	203.2
14	3000	1900	-15.7 ∓ 21.4	214.1 ∓ 15.2	221.6
15	1100	1600	-3.8 ∓ 18.2	182.5 ∓ 13.0	209.5
16	1200	1360	27.3 ∓ 16.7	166.6 ∓ 11.8	180.8
17	1300	970	-36.7 ∓ 11.4	114.0 ∓ 8.1	135.1
18	0	480	17.1 ∓ 3.5	34.6 ∓ 2.5	106.4
19	0	230	5.7 ∓ 1.3	13.0 ∓ 0.9	54.9
20	—	100	—	—	—
21	—	100	—	—	—

В качестве такого примера рассмотрим пуассоновскую модель TEST-1, кратко упоминавшуюся в [3]. Оригинал (C_3, \dots, C_{19}) здесь занимает $n = 17$ пикселей, а размытое и зашумленное изображение — $m = 21$

пиксел (табл. 1, рис. 1а). Полная средняя яркость оригинала составляет $N_* = 12200$ событий, средняя интенсивность пуассоновского шума в каждом пикселе постоянна и равна $b_j = 100$ событий, $j = 1, \dots, 21$. Функция рассеяния точки (ФРТ) задавалась в виде:

$$h_{jk} = \begin{cases} 0.4, & j - k = 0; \\ 0.2, & |j - k| = 1; \\ 0.1, & |j - k| = 2; \\ 0.0, & |j - k| > 2. \end{cases} \quad (1)$$

Напомним, что совокупность (C_k) представляет собой *средние* интенсивности в соответствующих пикселах, а конкретные значения интенсивностей оригинала суть реализации независимых пуассоновских величин с этими средними значениями. При выборе формы объекта мы стремились представить плавный градиент яркости, резкий обрыв, исходно равные отсчеты для оценки флуктуаций (пиксела 8, 9) и δ -образный пик (пиксел 14). Небольшая длина изображения обусловлена необходимостью его многократной обработки.

В третьем столбце табл. 1 приведены *средние* интенсивности λ_j в размытом и зашумленном изображении. В соответствии со стохастическим характером процесса формирования изображения далее при этих средних значениях были реализованы 100 случайных изображений (некоторые из них показаны на рис. 1 б), каждое из которых было затем восстановлено при помощи описанной в [3] процедуры MLIR (часть восстановленных объектов C_k^* показана на рис. 1 с). Как и следовало ожидать, результаты восстановления разных реализаций наблюдаемого изображения отличаются друг от друга. Качество метода восстановления характеризуется, во-первых, систематическим *смещением* оценок, т. е. разностью средних восстановленных отсчетов в пикселах и соответствующих истинных значений: $\delta_k = \overline{C_k^*} - C_k$, и, во-вторых, разбросом оценок потоков, т. е. дисперсией ε_k^2 величин C_k^* . Соответствующие значения, вычисленные по 100 реализациям, представлены в 4-м и 5-м столбцах табл. 1 (см. также рис. 1 а).

Прежде всего следует обсудить смещение оценок. Как видно из таблицы, в пределах естественной неопределенности величины δ_k сосредоточены главным образом вблизи нулевых значений, однако для утверждения о нулевом смещении, конечно, нет оснований. Можно лишь сказать, и это представляет действительно значительный интерес, что смещения MLIR-оценок δ_k по абсолютной величине значительно меньше наблюдаемых стандартных отклонений ε_k . В особенности четко такая закономерность проявляется на участках с относительно высокой яркостью изобра-

жения. По этой причине мы можем утверждать, что смещение оценок в данном случае пренебрежимо мало.

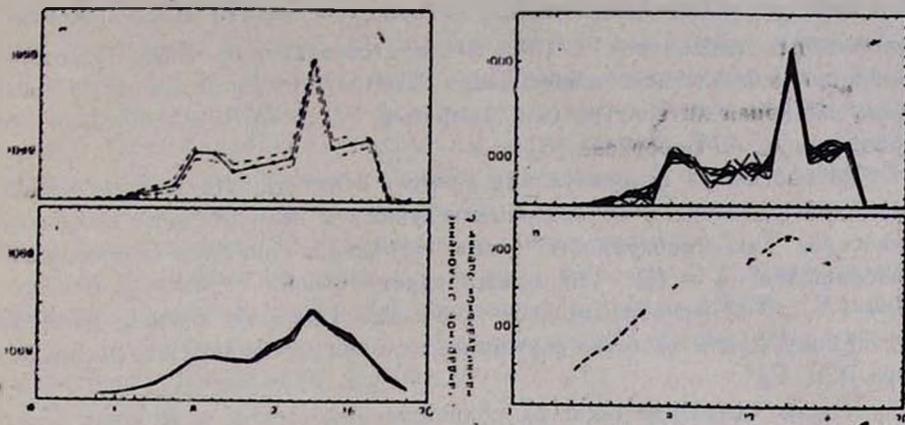


Рис. 1. а) Оригинал TEST-1 (сплошная линия), средние значения по 100 MLIR-оценкам оригинала (точки) и стандартные отклонения этих оценок (пунктир); б) Примеры размытых и зашумленных изображений TEST-1; в) Примеры восстановленных с помощью MLIR-изображений TEST-1; д) Эмпирические значения стандартного отклонения MLIR-оценок оригинала (точки) и теоретическая граница Рао-Крамера в первом приближении (пунктир).

Однако основной интерес представляет стандартное отклонение оценок ϵ_k , задающее «коридор ошибок» метода (он представлен пунктиром на рис. 1 а) или реальную точность MLIR. Здесь возникает следующий основной вопрос: существует ли для каждого конкретных условий наблюдения естественный коридор ошибок, который можно вычислить заранее, до проведения восстановления каким-либо методом? Положительный ответ на этот вопрос дается теоремой Рао-Крамера (см. раздел 3), возможность использования которой при восстановлении изображений была впервые отмечена, по-видимому, в [4]. В рассматриваемом примере наблюдаемая точность MLIR-оценок практически совпадает с теоретической нижней границей Рао-Крамера (рис. 1 д). Следует лишь отметить, что отсутствие сведений о смещении оценок, каким бы малым оно ни было, не позволяет точно вычислить границу Рао-Крамера при очень малых интенсивностях, в данном случае—на краях изображения, и потому в этих областях наблюдаемые значения ϵ_k на рис. 1 д расположены несколько ниже пунктирной кривой.

3. Теоретический предел эффективности восстановления. Напомним, что в соответствии с принятой в [2, 3] схемой формирования и восстановления изображений определяется вероятность $P\Gamma(N_1, N_2 \dots N_m; C_1, \dots$

$C_2, \dots, C_n) \equiv f(N, C)$ получить на опыте совокупность $(N_1 \dots N_m) \equiv N$, описывающую размытое и зашумленное изображение, для произвольного неотрицательного оригинала $(C_1, \dots, C_n) \equiv C$. Далее в соответствии с каким-либо правилом нужно найти «хорошую» оценку $(C_1^*, \dots, C_n^*) \equiv C^*$ неизвестных параметров с $(m > n)$, представляющую собой некоторую функцию наблюдаемого изображения. Соответствующим вопросам посвящена обширная литература (см., например, [1, 5—7] и в особенности руководство А. А. Боровкова [8]).

Во избежание недоразумений следует отметить, что мы по-прежнему проводим различие в обозначениях случайных величин и их возможных значений. Так, совокупность чисел заполнения пикселей наблюдаемого изображения $\zeta = (\zeta_1 \dots \zeta_m)$ представляет собой случайный вектор, а $N = (N_1 \dots N_m)$ — его возможное значение. Искомые оценки являются функциями ζ , и в качестве случайных величин усредняются по распределению $f(N, C)$.

Второе замечание касается количества измерений в выборке. Статистика обычно имеет дело с несколькими независимыми измерениями одномерной или многомерной случайной величины, и оценка параметров производится на основании всей этой совокупности измерений. В задаче восстановления изображений мы имеем дело почти исключительно с единственным случайным изображением многомерного объекта. Поэтому в дальнейшем для простоты рассматривается только случай единственной реализации, хотя соответствующее обобщение не составляет труда.

Принципиальную сторону подхода проще всего пояснить в одномерном случае, когда оценивается единственный параметр C . В соответствии со среднеквадратическим критерием оценка C_1^* считается лучшей в точке C , чем C_2^* , если

$$S_1(C) < S_2(C), \quad (2)$$

где *рассеивание* относительно истинного значения параметра по определению равно

$$S(C) = E(C^* - C)^2 > 0 \quad (3)$$

и символ E означает математическое ожидание. Вводя среднее значение $\bar{C}^* = E(C^*)$ и *смещение оценки*

$$\delta = \bar{C}^* - C, \quad (4)$$

перепишем (3) в виде

$$S(C) = D(C^*) + \delta^2, \quad (5)$$

где $D(C^*) = E(C^* - \bar{C}^*)^2$ — дисперсия оценки. Таким образом, при сред-

неквадратическом подходе следует минимизировать рассеивание (5), включающее как смещение, так и дисперсию оценки.

Казалось бы, естественно считать оптимальной такую оценку, которая не хуже в указанном выше смысле любой другой оценки для *всякого* допустимого значения C . Однако уже простой пример фиксированной оценки $C^* \equiv \text{const}$ показывает, что такое определение будет бессодержательным («стоящие» часы один раз в сутки точнее любых других часов!). Поэтому разумно сузить класс возможных оценок, например, рассматривая лишь оценки с данным смещением δ или же асимптотически несмещенные оценки, и назвать *эффективной* такую оценку, для которой рассеивание (5) минимально в данном подклассе.

В общем случае оригинал описывается вектором C в n -мерном пространстве. Среднеквадратическое отклонение n -мерной оценки C^* теперь зависит от рассматриваемого в этом пространстве направления, так что *рассеивание* в направлении γ равно

$$S_\gamma = E \left(\sum_1^n (C_k^* - C_k) \cdot \gamma_k \right)^2 \geq 0. \quad (6)$$

Естественно назвать *эффективной* такую оценку C^* , для которой величина (6) минимальна в произвольном направлении γ . Вводя *матрицу рассеивания*

$$W = \| w_{ik} \| \quad (7)$$

с элементами

$$w_{ik} = E [(C_i^* - C_i) \cdot (C_k^* - C_k)], \quad (8)$$

равными вторым моментам отклонений оценок от истинных значений, можно сказать, что для *эффективной* оценки величина

$$S_\gamma = \sum_{i,k=1}^n w_{ik} \cdot \gamma_i \gamma_k \quad (9)$$

минимальна при любом векторе γ .

В матричном виде определения (7) и (8) можно переписать следующим образом.

$$W = E [(C^* - C)^T \cdot (C^* - C)], \quad (10)$$

где исходные векторы понимаются как вектор-строки и символ « T » означает операцию транспонирования. Вообще говоря, средние значения оценок \bar{C}_k^* не совпадают с истинными значениями C_k , т. е. имеет место *смещение оценок*

$$\delta(C) = \bar{C}^* - C, \quad \delta = (\delta_1, \dots, \delta_n). \quad (11)$$

Из двух последних равенств следует, что матрицу рассеивания можно представить в виде:

$$W = \sigma^2 + \delta^T(C) \cdot \delta(C), \quad (12)$$

где

$$\sigma^2 = E[(C^* - \bar{C}^*)^T \cdot (C^* - \bar{C}^*)] \quad (13)$$

— дисперсионная матрица. Как легко видеть, соотношение (12) вполне аналогично одномерному соотношению (5).

Обратимся теперь к формулировке теоремы Рао-Крамера. Вновь рассмотрим сначала для ясности одномерный случай. Тогда упомянутая теорема утверждает следующее: при выполнении некоторых условий регулярности (R) для всякой оценки C^* неизвестного параметра C со смещением $\delta(C)$ и ограниченной дисперсией существует нижняя граница рассеяния, определяемая неравенством

$$S(C) \geq \frac{[1 + \delta'(C)]^2}{I(C)} + \delta^2(C). \quad (14)$$

Здесь $I(C)$ — информация Фишера:

$$I(C) = E \left[\frac{\partial}{\partial C} \ln f(\zeta, C) \right]^2 = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial C^2} \ln f(\zeta, C) \right], \quad (15)$$

$f(\zeta, C)$ — определенное выше основное вероятностное распределение, в котором вместо N фигурирует случайная величина ζ , и штрих означает дифференцирование по C . Условие (R) предполагает непрерывную дифференцируемость $f^{1,2}(N, C)$ по C , а также существование, положительность и непрерывность $I(C)$.

Пусть, например, случайная величина ζ подчиняется пуассоновскому распределению $f(N, C) = \exp(-C) \cdot C^N / N!$, $N = 0, 1, \dots$ с неизвестным параметром C . Мы имеем здесь: $\partial/\partial C \ln f(\zeta, C) = \zeta/C - 1$, $\partial^2/\partial C^2 \ln f(\zeta, C) = -\zeta/C^2$, и ввиду $E(\zeta) = C$ получаем $I(C) = 1/C$, и, наконец, $S(C) \geq [1 + \delta'(C)]^2 \cdot C + \delta^2(C)$. Это неравенство справедливо для

произвольного способа оценивания. В частности, MLIR-оценка $\hat{C} = \zeta$ имеет нулевое смещение, и для нее неравенство Рао-Крамера принимает вид: $S(C) \geq C$. С другой стороны, прямое вычисление дает $S = D(\hat{C}) = C$, так что разброс MLIR-оценки достигает нижней границы Рао-Крамера, — как говорят, она максимально эффективна.

Проблема восстановления изображений, как правило, имеет дело с большим количеством параметров — интенсивностями оригинала в каждом

пикселе. В многомерном случае теорема Рао-Крамера утверждает, что при условиях регулярности распределения (R) матрица рассеивания произвольной оценки C^* векторного параметра C удовлетворяет неравенству

$$W \geq A, \quad (16)$$

где матрица A по определению есть

$$A \equiv [U + \Delta(C)] I^{-1}(C) \cdot [U + \Delta(C)]^T + \delta^T(C) \cdot \delta(C), \quad (17)$$

U — единичная матрица, $\Delta(C) = \|\partial \delta_i(C) / \partial C_k\|$ и $I^{-1}(C)$ — матрица, обратная информационной матрице Фишера $I(C)$ с элементами

$$\begin{aligned} I_{ik}(C) &= E \left[\frac{\partial}{\partial C_i} \ln f(\zeta, C) \cdot \frac{\partial}{\partial C_k} \ln f(\zeta, C) \right] = \\ &= - E \left[\frac{\partial^2}{\partial C_i \partial C_k} \ln f(\zeta, C) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Условия регулярности включают непрерывную дифференцируемость $f(\zeta, C)$ по C_k , непрерывность матрицы $I(C)$ и отличие ее определителя от нуля. Для несмещенных оценок, очевидно,

$$W(C) \geq I^{-1}(C). \quad (19)$$

Здесь нужно дать некоторые пояснения смысла матричных неравенств. Именно, условие $W \geq A$ означает неотрицательную определенность матрицы $W - A$, т. е. выполнение обычного неравенства

$$\sum_{i, k=1}^n W_{ik} \gamma_i \gamma_k \geq \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \gamma_i \gamma_k \quad (20)$$

для любых $\gamma_1 \dots \gamma_n$. В частности, полагая здесь $\gamma_i = \delta_{ip}$, $p = 1, 2, \dots, n$, где δ_{ip} — символ Кронекера, находим неравенства для элементов на главных диагоналях матриц W и A :

$$w_{pp} > a_{pp}, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

Учитывая (3) и (8), определим рассеяние k -ого компонента параметра с соотношением

$$S_k(C) = w_{kk} = E [(C_k^* - C_k)^2], \quad (22)$$

и тогда неравенство (21) принимает окончательный вид:

$$S_k(C) \geq a_{kk}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (23)$$

где a_{kk} —диагональные элементы матрицы (17). Для несмещенной оценки

$$S_k(C) > I^{kk}(C), \quad (24)$$

где через I^{kk} мы обозначили элементы матрицы I^{-1} , обратной информационной матрице Фишера (18).

Таким образом, *рассеяния отдельных компонентов оценок многомерного параметра (на языке теории восстановления изображений—рассеяния восстановленных интенсивностей в пикселах относительно истинных интенсивностей) не могут быть менее некоторых предельных значений, определяемых соотношениями (17), (18), (23) и (24).*

Важное замечание касается другой возможной оценки нижней границы в неравенстве Рао-Крамера. Именно, нетрудно показать (см. [5]), что, например, для несмещенной оценки выполняется неравенство

$$S_k(C) \geq 1/I_{kk}(C), \quad (25)$$

т. е. рассеяние превосходит обратное значение диагонального элемента матрицы Фишера. Однако условие (24), привлекающее в качестве нижней границы диагональные элементы обратной матрицы Фишера, ставит существенно более жесткое ограничение.

Смысл неравенства Рао-Крамера для недиагональных элементов матрицы рассеяния мы обсудим в последующей публикации, а пока ограничимся оценением точности восстановления изображений.

Как уже отмечалось в начале статьи, имеется много методов восстановления. Ясно, что эффективность всякого метода определяется ответом на следующий основной вопрос: *насколько результаты данного метода приближаются к теоретической нижней границе Рао-Крамера?* В этой связи представляет значительный интерес тот факт, что все ситуации, когда предел Рао-Крамера достигается точно, можно охарактеризовать заранее. Именно, справедлив следующий результат: *для оценки C^* векторного параметра C знак равенства в (16) достигается тогда и только тогда, когда плотность распределения $f(N, C)$, принадлежит к экспоненциальному семейству, т. е. когда справедливо представление*

$$\ln f(N, C) = \sum_{i=1}^n C_i^*(N) \cdot \varphi_i(C) + \psi(C) + \chi(N), \quad (26)$$

где скалярные функции ψ и χ произвольны, а вектор $\varphi(C)$ имеет матрицу производных, равную

$$\| \partial \varphi_i(C) / \partial C_k \| = [(U + \Delta(C))^{-1}]^T \cdot I(C). \quad (27)$$

Для несмещенных оценок правая часть (27) равна просто информационной матрице Фишера $I(C)$. Наконец, в одномерном случае два последних равенства имеют вид:

$$\ln f(N, C) = C^*(N) \cdot \tau(C) + \psi(C) + \chi(N), \quad (28)$$

$$\psi'(C) = \frac{I(C)}{|1 + \delta(C)|} \quad (29)$$

Подчеркнем еще раз, что приведенные выше результаты не зависят от способа оценивания параметров, т. е. от выбора функций $C^*(N)$. Поэтому практическая реализация эффективного метода оценивания (т. е. наиболее мощного способа восстановления изображений) должна рассматриваться особо. При этом определяющее значение приобретает следующая теорема: если выполнены условия регулярности (R) и существует эффективная оценка C^* , то она совпадает с оценкой максимального правдоподобия, т. е. с функцией $\hat{C}(N)$, доставляющей максимум плотности распределения при наблюдаемом изображении N :

$$f(N, C) \Big|_{C = \hat{C}(N)} = \max. \quad (30)$$

Именно этот факт и явился исходным при разработке MLIR [2].

4. Точность восстановления изображений при некогерентном освещении. Как показано в [3], плотность распределения $f(N, C)$ наблюдаемого изображения при некогерентном освещении имеет вид:

$$\ln f(N, C) = \sum_{j=1}^m N_j \cdot \ln \lambda_j(C) - \sum_{k=1}^n C_k + \text{const}, \quad (31)$$

$$\lambda_j(C) = \sum_{k=1}^n h_{jk} C_k + b_j,$$

где C — оцениваемый оригинал, N — реализация наблюдаемого размытого и зашумленного изображения, (h_{jk}) — функция рассеяния точки (ФРТ), b — средний фсн и предполагается $m \geq n$, $b_j \geq 0$, C_k и N_j — неотрицательные целые числа, $0 \leq h_{jk} < 1$, $\sum_j h_{jk} = 1$.

Весьма существенный результат сразу следует из непосредственного сравнения (31) и (26): при $m > n$ плотность распределения (31) не принадлежит к семейству, для которого существует эффективная оценка. Другими словами, при некогерентном освещении не существует метода восстановления размытого изображения, достигающего точной нижней границы Рао-Крамера.

Вместе с тем, вполне возможно, что при определенных условиях какой-либо метод будет давать практически совпадающую с теоретическим пределом точность восстановления. Ввиду сказанного в предыдущем разделе в первую очередь этого следует ожидать от метода максимального правдоподобия. Действительно, строгие решения для простейших случаев и численные результаты для более сложных изображений показывают, что MLIR, достигает очень близкой к теоретически возможной эффективности уже при сколь-нибудь заметной яркости изображения, когда количество световых событий в пикселе превосходит уровень шума.

Для точного вычисления границы Рао-Крамера согласно (17) нужно знать информационную матрицу Фишера I и смещение оценки δ . Информационная матрица для некогерентного освещения без труда находится из (18) и (31):

$$I_{ik}(C) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j(C)} \cdot h_{ji} h_{jk}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (32')$$

где функции $\lambda_j(C)$ определены в (31). Это выражение справедливо для всякого способа оценивания. Строго говоря, вычисление информационной матрицы предполагает знание оригинала C , однако уже при интенсивности изображения порядка десятков соб/пиксел можно заменить средние интенсивности $\lambda_j(C)$ на реально наблюдаемые значения N_j . Это дает:

$$I_{ik} \cong \sum_{j=1}^m \frac{h_{ji} h_{jk}}{N_j}, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (32'')$$

и достижимая точность восстановления может быть вычислена непосредственно по наблюдаемой картине.

Что касается смещения оценок, то оно, очевидно, зависит от выбранного метода. Найти явное выражение для δ во многих случаях весьма непросто. В частности, пока не удастся получить общее выражение для смещения MLIR-оценок. Считая $\delta(C) = 0$, мы можем не совсем верно рассчитать теоретическую точность, причем в случае применения MLIR этого следует ожидать лишь в тех областях изображения, в которых количество световых событий сравнимо с внешним шумом.

Именно такая картина наблюдается, например, в рассмотренном выше модельном случае TEST-1. В шестом столбце табл. 1 приведены вычисленные на основании (32) квадратные корни из диагональных элементов обратной матрицы Фишера (эти значения указаны на рис. 1 d пунктиром). Сравнение с действительными результатами восстановлений (см. пятый столбец табл. 1 и рис. 1 d) подтверждает как очень близкое совпадение с границей Рао-Крамера в областях умеренной и высокой яркости, так и некоторую «сверхэффективность» на краях изображения, где

яркость ниже или сравнима с внешним шумом. Конечно, учет смещения устранил эту неопределенность. Аналогичные выводы следуют из рассмотрения других численных примеров.

5. *Аналитический пример.* Как это обычно и наблюдается, ограничиваясь только численными примерами, мы с трудом выявляем общие закономерности процесса. Поэтому желательно иметь аналитические результаты, даже если рассматриваемые примеры не имеют практического значения. Мы приведем здесь такой простой пример, когда оригинал включает только один пиксел, а размытое изображение—два пиксела ($n = 1, m = 2$). При этом ФРТ определяется значениями h_{11} и $h_{21} = 1 - h_{11}$. Нетрудно найти общее MLIR-решение этой задачи, однако даже при столь простых условиях оно оказывается громоздким. Поэтому мы предположим далее, что средние отсчеты шума в изображении связаны соотношением $b_2 = [(1 - h_{11})/h_{11}] \cdot b_1$. Тогда MLIR-оценка \hat{C}_1 действительной интенсивности C_1 оригинала имеет вид:

$$\hat{C}_1 = \begin{cases} 0, & w \leq r, \\ w - r, & w > r, \end{cases} \quad (33)$$

где $r = b_1/h_{11}$ и w —пуассоновская случайная величина со средним $\lambda = C_1 + r$. Из этого соотношения и формул (4), (5), (14), (15) нетрудно найти интересующие нас смещение оценки $\delta(C_1)$, ее рассеяние $S(C_1)$ и сопоставить последнюю величину с точной нижней границей Рао-Крамера $S_{RK}(C_1)$. При целом $r \geq 1$ имеем:

$$E(\hat{C}_1) = C_1 + \delta(C_1), \quad \delta(C_1) = e^{-\lambda} \left[\frac{\lambda^r}{(r-1)!} - \sigma \cdot C_1 \right], \quad (34)$$

$$S(C_1) = \lambda (1 - \sigma \cdot e^{-\lambda}) - \delta(C_1) \cdot C_1, \quad (35)$$

$$S_{RK}(C_1) = \lambda (1 - \sigma \cdot e^{-\lambda})^2 + \delta^2(C_1), \quad (36)$$

где вспомогательная величина $\sigma = \sum_{k=0}^{r-1} k^k / k!$. При $r = 0$ имеем: $\delta(C_1) \equiv 0$, $S(C_1) = S_{RK}(C_1) = C_1$.

Соотношения (34)—(36) для случая $r = 15$ иллюстрируются рис. 2.

Приведенные выше формулы позволяют сделать следующие весьма показательные заключения. 1) При нулевом внешнем шуме, т. е. при $b_1 = b_2 = r = 0$, смещение MLIR-оценки тождественно равно нулю. Следует изучить в общем случае возможность того, что смещенность MLIR-оценок полностью обусловлена внешним шумом. 2) Смещение $\delta(C_1)$ монотонно убывает с ростом интенсивности C_1 . Действительно,

при $r \neq 0$ имеем $\delta'(C_1) = -e^{-\lambda\sigma} \leq 0$. Поскольку величина $e^{-\lambda\sigma}$ в (34) по смыслу есть сумма первых r членов пуассоновской плотности со средним λ , очевидно, что при $C_1 > r$, т. е. при $\lambda > 2r$, указанная величина очень мала. Таким образом, относительное смещение MLIR-оценки $\delta(C_1)C_1$ пренебрежимо мало уже при интенсивности светового потока, превосходящей средний уровень шума (см. рис. 2). 3) Рассеяние MLIR-оценки при малых интенсивностях слегка превышает границу Рао-Крамера, но очень быстро, уже при $C_1 \cong r$, сравнивается с теоретическим пределом. При этом $S(C_1) \cong S_{RK}(C_1) \cong C_1$, так что стандартное отклонение MLIR-оценки приблизительно равно квадратному корню из ее среднего значения, как для обычных пуассоновских величин (этот факт, впрочем, виден непосредственно из (33)). Заметим здесь, что пуассоновский «закон квадратного корня» было бы наивно распространять на произвольный случай, так как имеет значение и вид ФРТ (соотношения (24), (32) и (32')) ясно показывают характер зависимости точности восстановления от функции рассеяния точки). 4) Для несмещенной оценки мы имели бы, согласно (24), $S_{RK}(C_1) = [I(C_1)]^{-1} = C_1 + r$. Пользуясь этим соотношением, мы преувеличим теоретический нижний предел в области малых интенсивностей $C_1 < r$, но уже при $C_1 \cong r$ вносимая ошибка пренебрежимо мала (рис. 2).

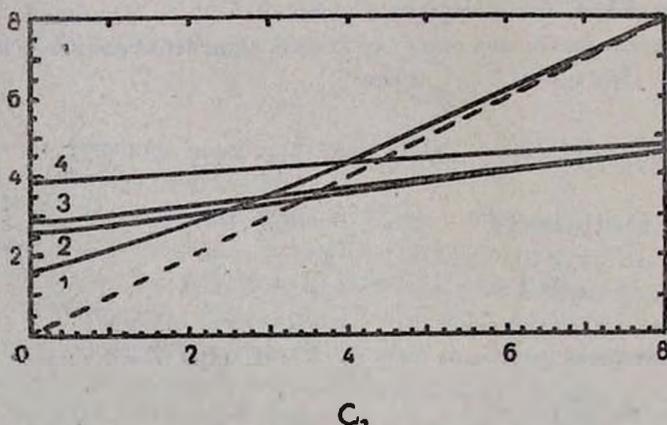


Рис. 2. Основные характеристики MLIR-решения для аналитического примера при $r = 15$: оценка истинной интенсивности (1), квадратный корень из рассеяния согласно теореме Рао-Крамера с истинным (2) и нулевым (4) смещением, аналогичная величина для MLIR-оценки (3).

6. *Заключительные замечания.* Как уже отмечалось в разделе 3, обычно в статистике имеют дело с набором ν независимых реализаций случайной величины, и оценка параметров производится по всей сово-

купности этих измерений. В теории восстановления изображений чаще всего $\nu = 1$, так что мощные асимптотические результаты, в частности, известная асимптотическая максимальная эффективность MLIR-решения, формально неприменимы. Вместе с тем нужно иметь в виду, что восстанавливается m -мерное изображение при $m \gg 1$, и для некогерентного источника все m отсчетов интенсивностей независимы друг от друга. Поэтому задачу восстановления изображения можно рассматривать как задачу нахождения оценки параметров при m реализациях независимых и различно распределенных случайных величин в асимптотической области $m \gg 1$. Вполне возможно, что асимптотика такого рода—по размерам изображения—ведет к эффективности MLIR-подхода подобно исследованной в этой работе асимптотике по интенсивности.

Все сказанное выше—и соображения теоретического характера, и численные, и аналитические примеры—позволяют предположить, что уже при интенсивности светового изображения, сравнимой со средним уровнем внешнего шума MLIR-решение имеет максимально высокую теоретическую точность восстановления изображения, так что стандартное отклонение оценки оригинала равно квадратному корню из обратной информационно-матрицы Рональда Фишера:

$$S_k^{1/2}(C) \cong [I^{kk}(C)]^{1/2}, \quad (37)$$

причем для некогерентного источника диагональные элементы обратной матрицы находятся путем обращения матрицы (32). Формула (37) и определяет реальный «коридор ошибок» при восстановлении методом максимального правдоподобия.

Представленные здесь результаты изучения эффективности MLIR следует рассматривать как предварительные. Все относящиеся к этой области вопросы имеют очевидное практическое значение и заслуживают всестороннего исследования.

Государственный астрономический
институт им. П. К. Штернберга

MAXIMUM LIKELIHOOD IMAGE RESTORATION. VI. RAO-KRAMÉR LIMIT OF RESTORATION EFFICIENCY

V. YU. TEREbizh, V. V. BIRYUKOV

The existence of the inner noise of radiation inevitably reduces the problem of restoration of blurred and noised image to the search for the statistical estimation of unknown parameters (object intensities).

The method— independent theoretical limit of efficiency of image restoration exists which is given by the Rao—Kramér theorem. The general arguments as well as numerical and analytical examples indicate that described at [2, 3] maximum likelihood image restoration (MLIR) method reaches the limiting efficiency when light intensity at the image becomes approximately equal to the mean level of external noise. The expressions for calculating of the natural error corridor of restoration are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Fisher, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 222, 309, 1922.
2. В. Ю. Теребиж, *Астрофизика*, 32, 327, 1990.
3. В. Ю. Теребиж, О. К. Чербунина, Ю. Г. Чербунин, В. В. Бирюков, *Астрофизика*, 34, 91, 1991.
4. C. H. Slump, H. A. Ferwerda, *Adv. Electronics and Electron Phys.*, 66, 201, 1986.
5. D. R. Cox, D. V. Hinkley, *Theoretical Statistics*, Chapman and Hall, London 1974.
6. M. G. Kendall, A. Stuart, *Adv. Theory of Statistics*, v. 2, Griffin, London, 1969.
7. В. Г. Воинов, М. С. Никулин, *Несмещенные оценки и их применения*, Наука, М., 1989.
8. А. А. Боровков, *Математическая статистика*, Наука, М., 1984.