АСТРОФИЗИКА

ТОМ 33 ДЕКАБРЬ, 1990 ВЫПУСК 3

УДК: 52:531.51

НОВОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ МАССЫ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Р. М. АВАКЯН

Поступила 9 октября 1990

Принята к печати 25 октября 1990

Рассматривается гравитационное поле, создаваемое статистическим сферически-симметричным распределением материи. В рамках теорий Ньютона, Эйнштейна и биметрической теории Розена для полной массы сферической конфигурации получена новая формула, связывающая массу с распределением давления.

Рассмотрим гравитационное поле, создаваемое статическим сферически-симметричным распределением вырожденного вещества. Его равновесие обеспечивается равенством сил давления и гравитационного притяжения. В рамках ньютоновской теории уравнения, определяющие структуру и равновесие такой конфигурации, имеют вид:

$$m' = 4\pi\rho r^2, \tag{1}$$

$$P' = -\frac{G\rho m}{r^2}. \tag{2}$$

Здесь штрих означает производную по r, ρ—плотность вещества, P—его давление, G—гравитационная постоянная, $m(r)$—масса, заключенная внутри сферы радиуса r. Второе уравнение является условием гидростатического равновесия конфигурации. Разумеется, система (1)—(2) должна быть дополнена уравнением состояния вещества

$$P = P(\rho). \tag{3}$$

Граница $r=r_s$ конфигурации определяется из условия $P(r_s)=0$. Интегрируя (1) от $r=0$ до $r=r_s$, получим

$$M = 4\pi\int_0^{r_s}\rho r^2 dr. \tag{4}$$

Эта формула определяет массу конфигурации в зависимости от распределения вещества и отражает свойство массы как меру количества вещества. Оказывается, что имеется любопытная формула, определяющая массу конфигурации в зависимости от распределения давления. Для вывода этой формулы умножим (2) на r^4 и проинтегрируем от центра $r=0$ до границы $r_в$. Левую часть проинтегрируем по частям и учтем, что $P(r_в)=0$. Для интегрирования правой части необходимо учесть (1). В результате получим:

$$M^2 = \frac{32\pi}{G}\int\limits_0^{r_в} Pr^3\,dr = \frac{8}{G}\int\limits_V Pr\,dV. \tag{5}$$

При решении статической задачи в рамках ОТО для полной массы в шварцшильдовских координатах также получается выражение (4). При использовании же других координат для массы имеется формула Толмана [1], которая сводится к (4) при условии пренебрежения искривлением и давлением ($P \ll \rho$). С этой точки зрения интересно выяснить, имеет ли формула (5) аналог в ОТО и в других теориях гравитации, например, в биметрической теории Розена.

Рассмотрим вначале статическую задачу в рамках ОТО. Запишем интервал в изотропных координатах (система единиц $c=G=1$):

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]. \tag{6}$$

Поскольку компоненты четырехскорости $U^1 = U^2 = U^3 = 0$ и $U_i U^i = U_0 U^0 = 1$, то отличными от нуля компонентами тензора энергии—импульса будут

$$T_0^0 = \rho, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P. \tag{7}$$

С учетом этого уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$-e^{-\lambda}\left[\lambda'' + \frac{(\lambda')^2}{4} + \frac{2\lambda'}{r}\right] = 8\pi\rho, \tag{8}$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{(\lambda')^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{\lambda'+\nu'}{r}\right] = -8\pi P, \tag{9}$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} + \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'+\nu'}{2r}\right] = -8\pi P. \tag{10}$$

Вместе с уравнением состояния (3) система (8)—(10) полностью определяет гравитационное поле и распределение вещества и давления. В принципе, вместо одного из уравнений поля можно воспользоваться единственным нетривиальным уравнением гидродинамики $T^k_{i;k} = 0$, которое соответствует $i=1$ и имеет вид:

$$P' = -\frac{\nu'}{2}(P+\rho). \tag{11}$$

Уравнение (11) является релятивистским обобщением (2). Удобно вместо (8) и (10) взять две комбинации уравнений. Одна из комбинаций получается сложением (8) и (9), вторая—вычитанием из (8) уравнения (9) и удвоенного уравнения (10). Кроме того, введем две новые переменные $m(r)$ и $m_1(r)$, имеющие размерность массы:

$$\nu' = \frac{2m}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{12}$$

$$m' = 4\pi r^2 (\rho + 3P)\, e^{-\frac{\nu+3\lambda}{2}}, \tag{13}$$

$$\lambda' = -\frac{2m_1}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{14}$$

$$m_1' = 4\pi r^2 (\rho - P)\, e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}}, \tag{15}$$

$$2r(m-m_1) + (m_1^2 - 2mm_1)\, e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}} = 8\pi r^4 e^{\frac{\nu+3\lambda}{2}}. \tag{16}$$

Как видим, величина $m(r)$ имеет смысл «накопленной» толмановской массы. Функция $m_1(r)$ не имеет непосредственного физического смысла.

Вначале рассмотрим решение уравнений (12)—(16) в пустоте ($\rho=P=0$). Уравнения при этом имеют вид:

$$\nu' = \frac{2m}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}, \tag{17}$$

$$m' = 0, \tag{18}$$

$$\lambda' = -\frac{2m_1}{r^2} e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}. \tag{19}$$

$$m_1' = \frac{m-m_1}{r}, \tag{20}$$

$$2r(m-m_1) + (m_1^2 - 2mm_1)\, e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}} = 0. \tag{21}$$

Из (18) следует

$$m(r) = M, \tag{22}$$

где M—полная масса конфигурации. С учетом (22) легко интегрируется уравнение (20):

$$m_1(r) = M - \frac{2C}{r}, \tag{23}$$

где C—постоянная интегрирования, которая определится путем сшивки внутреннего и внешнего решений (так же, как и масса M). Сложив теперь (17) и (19) и учтя (22) и (23), после интегрирования получим

$$e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} = 1 - \frac{C}{r^2}. \tag{24}$$

При интегрировании принято во внимание, что на бесконечности $\nu=\lambda=0$. С помощью (24) и (17) можем теперь определить e^ν и e^λ:

$$e^\nu = \left(\frac{r-\sqrt{C}}{r+\sqrt{C}}\right)^{\frac{M}{\sqrt{C}}}, \tag{25}$$

$$e^\lambda = \left(1-\frac{C}{r^2}\right)^2 \left(\frac{r+\sqrt{C}}{r-\sqrt{C}}\right)^{\frac{M}{\sqrt{C}}}. \tag{26}$$

При нахождении этих решений мы использовали первые четыре уравнения системы (17)—(21). Подставляя (22)—(24) в неиспользованное уравнение (21), получим

$$C = \frac{M^2}{4}. \tag{27}$$

В результате, во внешней области будем иметь следующее известное решение [1]:

$$e^\nu = \left(\frac{1-\frac{M}{2r}}{1+\frac{M}{2r}}\right)^2, \tag{28}$$

$$e^\lambda = \left(1-\frac{M^2}{4r^2}\right)^2 \left(\frac{1+\frac{M}{2r}}{1-\frac{M}{2r}}\right)^2 = \left(1+\frac{M}{2r}\right)^4, \tag{29}$$

$$m_1(r) = M - \frac{M^2}{2r}. \tag{30}$$

Как видно из (30), в отличие от толмановской массы $m(r)$ «накопление» $m_1(r)$ происходит и во внешней области, причем любопытно, что на бесконечности она равна

$$m_1(\infty) = M.$$

Рассмотрим теперь решение внутри распределения вещества. Из (13) получим:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r (\rho + 3P)\, r^2 e^{\frac{\nu + 3\lambda}{2}}\, dr, \tag{31}$$

откуда из непрерывности при $r = r_s$ следует

$$M = 4\pi \int_0^{r_s} (\rho + 3P)\, r^2 e^{\frac{\nu + 3\lambda}{2}}\, dr. \tag{32}$$

При $e^\nu \approx e^\lambda \simeq 1$ и $P \ll \rho$ из (32) получаем ньютоновское выражение (4).

Разность уравнений (13) и (15) можно привести к виду

$$[r(m - m_1)]' = 16\pi P r^3 e^{\frac{\nu + 3\lambda}{2}}, \tag{33}$$

откуда после интегрирования от центра до r_s получим:

$$m_1(r) = m(r) - \frac{16\pi}{r} \int_0^{r_s} P r^3 e^{\frac{\nu + 3\lambda}{2}}\, dr. \tag{34}$$

Из непрерывности (30) и (34) на границе $r = r_s$ получим

$$M^2 = 32\pi \int_0^{r_s} P r^3 e^{\frac{\nu + 3\lambda}{2}}\, dr. \tag{35}$$

Эта формула является релятивистским обобщением (5) и в пределе $e^\nu \approx e^\lambda \approx 1$ совпадает с ней. Следует напомнить, что соотношение (35) имеет место в изотропных координатах.

В биметрической теории Розена [2] наряду с метрикой g_{ik} искривленного пространства вводится метрика γ_{ik}, описывающая плоское пространство. В рассматриваемом случае статического сферически-симметричного распределения эти метрики удобно записать в виде:

$$ds^2 = e^{2\varphi(r)}\, dt^2 - e^{2\psi(r)}\, [dr^2 + r^2\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{36}$$

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{37}$$

В выбранных координатах уравнения теории Розена имеют вид:

$$\Phi'' + \frac{2}{r}\Phi' = 4\pi\, (\rho + 3P)\, e^{\Phi + 3\psi}, \tag{38}$$

$$\psi'' + \frac{2}{r}\psi' = -4\pi\, (\rho - P)\, e^{\Phi + 3\psi}, \tag{39}$$

$$P' = -\Phi'\, (P + \rho). \tag{40}$$

Последнее уравнение является уравнением гидродинамики. Необходимо отметить, что в отличие от теории Эйнштейна, в теории Розена уравнения гидродинамики $T^k_{i;k} = 0$ не следуют из уравнений поля, поэтому при решении задачи их использование является обязательным.

Опять введем удобные переменные $m(r)$ и $m_1(r)$, имеющие размерность массы:

$$\Phi' = \frac{m}{r^2}, \tag{41}$$

$$m' = 4\pi\, r^2\, (\rho + 3P)\, e^{\Phi + 3\psi}, \tag{42}$$

$$\psi' = -\frac{m_1}{r^2}, \tag{43}$$

$$m_1' = 4\pi r^2\, (\rho - P)\, e^{\Phi + 3\psi}, \tag{44}$$

$$P' = -\frac{m\, (P + \rho)}{r^2}. \tag{45}$$

Как видно из (42), величина $m(r)$ имеет смысл массы конфигурации. Величина $m_1(r)$, как и в теории Эйнштейна, не имеет физического смысла.

В пустоте уравнения поля принимают вид:

$$\Phi' = \frac{m}{r^2}, \tag{46}$$

$$m' = 0, \tag{47}$$

$$\psi' = -\frac{m_1}{r^2}, \tag{48}$$

$$m_1' = 0, \tag{49}$$

откуда с учетом условий $\Phi(\infty)=\psi(\infty)=0$ получим

$$m(r)=M, \quad m_1(r)=M_1, \tag{50}$$

$$\Phi(r)=-\frac{M}{r}, \quad \psi(r)=\frac{M_1}{r}.$$

Постоянные M и M_1 определяются из сшивки внешнего и внутреннего решений:

$$M=4\pi\int_0^{r_s}(\rho+3P)\, r^2\, e^{\Phi+3\psi}\, dr, \tag{51}$$

$$M_1=4\pi\int_0^{r_s}(\rho-P)\, r^2\, e^{\Phi+3\psi}\, dr. \tag{52}$$

При малых давлениях ($P\ll\rho$) M и M_1 совпадают. Различие между ними наблюдается в случае сверхплотных конфигураций, когда $P\approx\rho$.

Рассмотрим теперь внутреннее решение. Умножим уравнение гидродинамики (45) на $r^4 \exp(\Phi+3\psi)$ и проинтегрируем от $r=0$ до границы $r=r_s$. Интеграл, стоящий слева, можно проинтегрировать по частям и учесть (41) и (43). Перенеся затем один из интегралов в правую часть, получим:

$$4\int_0^{r_s}Pr^3\, e^{\Phi+3\psi}\, dr=\int_0^{r_s}r^2\, e^{\Phi+3\psi}\,[m(\rho+P)+(3m_1-m)\,P]dr. \tag{53}$$

Используя уравнения (42) и (44), найдем P и $P+\rho$ и подставим их в правую часть

$$4\int_0^{r_s}Pr^3\, e^{\Phi+3\psi}\, dr=\frac{1}{16\pi}\int_0^{r_s}[2m(m'+m_1')+(3m_1-m)(m'-m_1')]\, dr=$$

$$=\frac{1}{16\pi}\int_0^{r_s}[(m+3m_1)(m'+3m_1')-12m_1 m_1']\, dr.$$

Правая часть легко интегрируется и с учетом $m(r_s)=M$ и $m_1(r_s)=M_1$ получим:

$$M^2+6MM_1-3M_1^2=128\pi\int_0^{r_s}Pr^3\, e^{\Phi+3\psi}\, dr. \tag{54}$$

В случае малых давлений $P \ll \rho$, когда M и M_1 равны, для M^2 получаем выражение, совпадающее с (35). Численные же значения для массы M в разных теориях, разумеется, отличаются.

Ереванский государственный университет

A NEW EXPRESSION FOR THE MASS IN THE THEORY OF GRAVITATION

R. M. AVAKIAN

A new expression for the mass of a static spherically—symmetric configuration is found. It determinates the mass as a function of the pressure distribution in the configuration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, М., 1973.
2. *N. Rosen*, Gen. Rel. Grav., 4, 435, 1973.; 7, 839, 1976, 10, 639, 1979.