

УДК: 52:53

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ. IV. ПРЕДЕЛЬНОЕ РАЗРЕШЕНИЕ ПРИ ЗАДАННОЙ АЛЬТЕРНАТИВЕ

В. Ю. ТЕРЕБИЖ

Поступила 13 сентября 1990

Получен формальный критерий для выделения размытого и зашумленного изображения произвольного объекта в случае, когда альтернативный объект заранее задан. Критерий обобщает аналогичный результат Дж. Харриса [9] на ситуации, в которых неизвестны априорные вероятности присутствия разных объектов и допустимы произвольные вероятности ошибок I и II рода (соответственно α и β). Найдено явное выражение для предельно достижимого разрешения при фиксированных α , β и отношении сигнала к шуму Ψ . Показано, что предельное разрешение зависит только от комбинации $i \equiv (z_\alpha + z_\beta)/\Psi$, где z_α — квантиль нормального распределения. Для ярких объектов предельное разрешение пропорционально $\Psi^{-1/2}$. Рассмотрены примеры, представляющие самостоятельный практический интерес.

1. *Введение.* Изложенная в [1] постановка задачи максимально правдоподобного восстановления изображений (MLIR) дает основания надеяться, что при адекватной реализации процесса восстановления будет достигнуто пространственное разрешение, близкое к его естественному пределу (см. также [2, 3]). Действительно, MLIR не вводит дополнительных субъективных предположений, и в этом смысле выгодно отличается не только от линейных методов восстановления изображений, но и от информационного подхода и метода максимума энтропии (подробный анализ относящихся сюда вопросов будет дан в частях V и VI этой серии публикаций). Однако прежде всего нужно пояснить смысл, в котором используются оба упомянутых выше понятия — «разрешение» и «естественный предел разрешения».

Опыт показывает, что принятое в какой-либо области исследований определение разрешающей силы не всегда оказывается удовлетворительным при других обстоятельствах. Классическое определение разрешения, предложенное Рэлеем [4], исходит из рассмотрения ситуации, когда разделяются два близких точечных источника, изображение каждого из которых предварительно размыто системой формирования изображения и представляется аппаратной функцией $h(x)$ или, как ее чаще называют, функцией рассеяния точки (ФРТ, Point Spread Function). Рэлеевский

(дифракционный) предел разрешения ρ_R фактически считается равным выбранной подходящим образом ширине ФРТ. Очевидно, при этом не учитываются ни внутренние флуктуации сигнала, обусловленные квантовой природой света, т. е. *радиационный шум*, ни внешние помехи—*аддитивный шум*. Если бы оба вида шума совершенно отсутствовали, то мы могли бы различить присутствие сколь угодно близких источников, т. к. изображение двойного объекта в принципе всегда отлично от $h(x)$. Это означает, что при отсутствии шума действительное разрешение бесконечно высоко и не ограничено шириной ФРТ. Но уже сколь угодно малый шум делает различие близких источников практически невозможным, так что разрешение является конечным, но может и превосходить рэлеевский предел (в том смысле, что предельно обнаружимое разделение источников $\rho_{\min} < \rho_R$). При очень низком отношении сигнала к шуму трудно обнаружить источники и с разделением компонентов $\rho > \rho_R$. Таким образом, рэлеевский предел характеризует разрешение лишь в некоторой ограниченной области условий (скажем, когда решение о виде объекта принимается чисто визуально). Это обстоятельство было ясно прежде всего самому Рэлею, который указывал, что «данное правило удобно благодаря его простоте и достаточно точно, если иметь в виду неизбежную неопределенность понятия разрешения» ([4], стр. 420).

Важно подчеркнуть, что предельное разрешение $\rho_{\min}$ в указанном выше смысле можно ввести лишь при наличии априорной информации о существовании двух заданных типов объектов, что фактически сводит проблему разрешения к задаче *распознавания образов*. Более широкое обсуждение роли априорной информации было дано в превосходной работе Торальдо ди Франчия [5]. Формальное доказательство существования и обсуждение физического смысла решений в области $\rho < \rho_R$ (т. н. *явления сверхразрешения*) содержится в пионерских исследованиях Целкунова [6], Торальдо ди Франчия [5, 7], Волтера [8], Дж. Харриса [9, 10], Фридена [11], Рашфорта и Р. Харриса [12], а также в ряде новых работ (см., например, [13—15]).

Вместе с тем ясно, что в более общей ситуации, когда альтернативное изображение не задано заранее, единственный параметр $\rho_{\min}$, как бы его ни определять, недостаточно полно характеризует возможность выделения тонких деталей изображения. В современной оптике считается, что информацию о таких свойствах дает *частотно-контрастная характеристика* объекта, опирающаяся на спектральное представление Фурье его пространственного описания. Если говорить о методах восстановления изображения, каждый из которых сопоставляет исходному изображению—объекту $s(x)$ —некоторую его оценку $\hat{s}(x)$, то спектральную характеристику качества процедуры восстановления можно ввести следующим об-

разом. Пусть $S(f)$ и $\hat{S}(f)$ — спектры Фурье соответственно объекта и его средней оценки в зависимости от пространственной частоты f . Тогда отношение

$$R(f) \equiv \frac{|\hat{S}(f)|^2}{|S(f)|^2}, \quad (1)$$

которое назовем *частотной функцией восстановления* (Frequency Restoration Function), показывает степень восстановления деталей характерного размера f^{-1} при помощи данного метода.

Функция $R(f)$, как и более простая величина $\rho_{\min}$, зависят от следующих факторов: 1) априорной информации относительно объекта; 2) его яркости, задающей радиационный шум; 3) свойств внешнего, в частности, аддитивного шума; 4) функции рассеяния точки и 5) конкретного вида объекта. Есть основания предполагать, что два последних фактора сказываются в меньшей степени, чем первые. Указанная зависимость и подразумевалась, когда мы говорили выше о естественном пределе разрешения.

Ограничимся еще одним замечанием. Ясно, что при наличии шума вопрос обнаружения данного объекта не может быть решен в детерминированной постановке: при одном и том же значении отношения сигнала к шуму Ψ и любом критерии выбора объекта, мы будем отдавать предпочтение то одной, то другой альтернативе в зависимости от конкретной реализации шума. Поэтому задача обнаружения объекта по необходимости является статистической, и мы будем ее рассматривать в рамках аппарата, изложенного в стандартных руководствах (см., например, [16, 17]).

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы изучить процедуру выделения объекта при заданной альтернативе в зависимости от вида объекта, ФРТ, отношения сигнала к шуму Ψ и надежности обнаружения. В ряде отношений полученные результаты развивают и обобщают результаты Дж. Харриса [9]. В частности, найден формальный критерий, позволяющий наиболее эффективно проводить разделение альтернатив. Показано, что предельно достижимое разрешение зависит только от определенной комбинации надежности обнаружения и Ψ (см. (34)), а при фиксированной надежности в широкой области условий пропорционально $\Psi^{-1/2}$. Наконец, рассмотрены примеры, представляющие самостоятельный интерес для вопроса о предельном разрешении. Более общий подход будет изложен в последующих публикациях.

2. Постановка задачи. С целью упрощения записи мы рассматриваем ниже одномерные изображения. Введение второго измерения не вносит принципиальных трудностей и проводится очевидным образом; основные результаты вообще не зависят от размерности изображения.

Априорная информация относительно объекта $g(x)$, выделяемого из шума, предполагает возможное присутствие только двух детерминиро-

ванных типов оригинала— $g_0(x)$ и $g_1(x)$. Это могут быть, скажем, одиночные и двойные звезды или квазары и звезды. Априорные вероятности присутствия g_0 и g_1 считаются неизвестными, как это чаще всего и бывает в действительности. Объект $g(x)$ может, вообще говоря, представлять собой изображение, размытое системой формирования с произвольной ФРТ.

Наблюдаемое изображение $y(x)$ включает в себя объект $g(x)$ и не зависящий от него шум $\xi(x)$, так что $y(x)$ есть реализация некоторой случайной функции $\eta(x)$, относительно структуры которой делается простейшее предположение:

$$\eta(x) = g(x) + \xi(x). \quad (2)$$

Стационарная случайная функция $\xi(x)$ считается гауссовским частотно-ограниченным белым шумом с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Это означает, что спектр мощности шума постоянен вплоть до некоторой максимальной пространственной частоты f_N , а при более высоких частотах пренебрежимо мал.

Задача состоит в том, чтобы на основании априорной информации и наблюдаемого изображения $y(x)$ наиболее целесообразным образом решить, с каким из двух объектов— $g_0(x)$ или $g_1(x)$ —мы в данном случае имеем дело. В статистике обычно говорят об испытании нулевой гипотезы H_0 (присутствует g_0) против альтернативы H_1 (присутствует g_1), но ниже, чтобы не усложнять запись, употребляются непосредственно обозначения g_0 и g_1 для двух гипотез. Выбор одного из объектов в качестве «нулевого», разумеется, произволен.

Итак, мы должны построить решающее правило (критерий) для выбора одной из двух гипотез и затем оценить его качество, т. е. связанные с его применением ошибки. Наиболее общий способ сформулировать критерий выбора сводится к следующему правилу: если наблюдаемое изображение $y(x)$ принадлежит некоторой заданной критической области возможных значений w , то гипотеза g_0 отвергается. Следует только конкретно указать критическую область w , иначе говоря, определить, какие отклонения y от g_0 уже несовместимы с предпочтением этого объекта. Задание w должно включать, вообще говоря, сведения о самих объектах g_0 и g_1 , изображении y и свойствах шума ξ .

Очевидно, какой бы критерий выбора ни применялся, возможны ошибки следующих двух видов: I) объект g_0 будет отвергнут, когда присутствует именно g_0 ; II) объект g_0 будет выбран, когда в действительности присутствует g_1 . Обозначим вероятность совершить ошибку I рода через α , или условно, $\alpha = Pr(g_1|g_0)$. Аналогично вероятность совершить ошибку II рода обозначим посредством $\beta = Pr(g_0|g_1)$. Величину α обыч-

но называют *уровнем значимости* критерия, а величину $1-\beta = Pr(g_1 | g_1)$ — его *мощностью*.

Мы пришли к основному вопросу теории статистических решений: как определить критерий выбора между альтернативами g_0 и g_1 с учетом относительной важности ошибок I и II рода?

Прежде чем проводить дальнейшее рассмотрение, остановимся кратко на подходе, принятом Дж. Харрисом [9]. Во-первых, в указанной работе считаются заданными (и равными $1/2$) *априорные* вероятности появления g_0 и g_1 . Во-вторых, Харрис ограничивается случаем, когда вероятности совершения ошибок I и II рода равны друг другу ($\alpha = \beta$). Такая постановка задачи вполне корректна, однако она далеко не исчерпывает все важные практические проблемы. Так, априорная информация о частоте типов объектов (например, звезд и квазаров в изучаемой выборке слабых компактных источников) обычно отсутствует. Далее, в решаемой задаче может совершенно по-разному оцениваться опасность ошибок I и II рода. Например, при поиске квазаров (g_1) в выборке, состоящей преимущественно из звезд (g_0), значительно опаснее «потерять» квазар (т. е. совершить ошибку II рода), чем включить в подлежащий дальнейшему изучению список кандидатов в квазары звезду (т. е. совершить ошибку I рода). Аналогично обстоит дело и при поисках других объектов, представляющих особый интерес.

Общепринятый сейчас подход Дж. Неймана и Э. Пирсона к проблеме проверки гипотез исходит из того, что следует наперед задать уровень значимости α , а затем искать такую критическую область ω , чтобы вероятность ошибки II рода β была минимальна (т. е. мощность критерия $1-\beta$ была максимальной). Выбор значения α принимает во внимание относительную важность двух типов ошибок.

В соответствии со сказанным будем считать значение α фиксированным ($0 \leq \alpha \leq 1$) и найдем сначала *наилучшую критическую область* (НКО) ω , а затем получим явное выражение для β при фиксированных α и НКО. В статистической терминологии соответствующий критерий является *наиболее мощным*. Конечная цель заключается в том, чтобы по заданным вероятностям α , β и отношению сигнала к шуму Ψ определить в явном виде минимально обнаружимую разницу между объектами.

3. Решение задачи о бинарном выборе. Введем необходимую на практике дискретизацию изображения. Пусть Δx — постоянный для простоты шаг дискретизации по x и

$$g_{0k} = g_0(x_k) \cdot \Delta x, \quad g_{1k} = g_1(x_k) \cdot \Delta x, \quad y_k = y(x_k) \cdot \Delta x, \quad (3)$$

$$\xi_k = \int_{x_k}^{\xi(x)} dx, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

— потоки соответственно от объектов, наблюдаемого изображения и шума в отдельных пикселах. Нетрудно показать, что дисперсия σ^2 величины ξ_k равна

$$\sigma^2 = B \cdot \Delta x, \quad (4)$$

где $B = \sigma^2 / (2\pi/N)$ — пространственный аналог коэффициента диффузии. Модель (2) формирования изображения сводится теперь к следующей:

$$\eta_k = g_k + \xi_k, \quad (5)$$

причем изображение $y \equiv \{y_k\}$ представляет собой реализацию $\{\eta_k\}$. Отсчеты шума ξ_k взаимно независимы и нормальны с нулевым средним и постоянной дисперсией σ^2 .

Выкладки, отнесенные в Приложение, показывают, что наилучшая критическая область ω , задается неравенством

$$\Omega \geq z_\alpha, \quad (6)$$

где

$$\Omega = \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - g_{0k}) \cdot (g_{1k} - g_{0k})}{\sigma \left[\sum_{k=1}^n (g_{1k} - g_{0k})^2 \right]^{1/2}}, \quad (7)$$

величина z_α — корень уравнения

$$\Phi(z) = 1 - \alpha \quad (8)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt \quad (9)$$

— интеграл вероятностей (рис. 1). В соответствии с изложенным выше это означает, что при выполнении неравенства (6) принимается объект g_1 , а при выполнении противоположного неравенства — принимается g_0 .

Минимальное значение вероятности совершить ошибку II рода при заданном уровне значимости α равно

$$\beta = 1 - \Phi(q - z_\alpha), \quad (10)$$

где

$$q = \frac{1}{\sigma} \left[\sum_{k=1}^n (g_{1k} - g_{0k})^2 \right]^{1/2}. \quad (11)$$

Естественно, что мощность критерия $1 - \beta$ растет с увеличением количества измерений n , уровня значимости α и расстояния между тестируемыми объектами, а также при уменьшении дисперсии шума,

Заметим, что с учетом (11) выражение (7) можно записать в виде:

$$\Omega = \frac{1}{q\sigma^2} \sum_1^n (y_k - g_{0k}) \cdot (g_{1k} - g_{0k}). \quad (12)$$

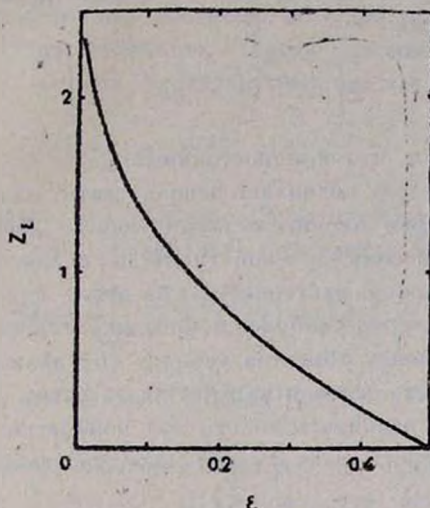


Рис. 1. Решение уравнения $\Phi(x) = 1 - x$, где Φ — интеграл вероятностей.

Смысл условия (6) достаточно прозрачен. Определение (7) напоминает по структуре формулу для коэффициента корреляции. Если отклонения $(y_k - g_{0k})$ чаще имеют тот же знак, что и отклонения $(g_{1k} - g_{0k})$, то сумма в числителе (7) будет велика и ввиду (6) мы должны отвергнуть g_0 и выбрать g_1 . Но корреляция знаков указанных отклонений как раз и означает, что объект g_1 предпочтительнее g_0 . Таким образом, интуитивный и формальный подходы в данном случае вполне согласуются между собой.

Следует обратить также внимание на тот факт, что задание критической области согласно (6) в неявном виде включает в себя отношение сигнала к шуму. Действительно, если нормировать потоки на суммарную величину $F = \sum g_k$, то статистика Ω будет пропорциональна F/σ .

В случае, когда сравниваемые объекты имеют постоянную поверхностную яркость, т. е. $g_{0k} \equiv g_0 = \text{const}$, $g_{1k} \equiv g_1 = \text{const}$ и для определенности $g_1 > g_0$, мы имеем:

$$\Omega = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_1^n (y_k - g_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{y} - g_0), \quad (13)$$

где $\bar{y}$ — выборочное среднее значение отсчетов изображения. При этом определение (6) НКО принимает вид:

$$\bar{y} \geq g_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha. \quad (14)$$

Мы пришли к широко известному критерию выбора одного из двух значений среднего в нормальной выборке. В рассматриваемом случае из (10) и (11) следует также:

$$\beta = 1 - \Phi \left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (g_1 - g_0) - z_\alpha \right]. \quad (15)$$

Весьма существенно, что при постоянных g_0 и g_1 определение (14) НКО не содержит g_1 . Это позволяет использовать один и тот же критерий (14) для проверки любого конкурирующего значения из класса $g_1 > g_0$. Критерий сравнения нулевой гипотезы с классом альтернатив, имеющий для произвольной альтернативы из этого класса одну и ту же НКО, называется *равномерно наиболее мощным критерием* (РНМК). К сожалению, для произвольных объектов условие (6) включает и $g_1(x)$, так что РНМК не может быть основан на этом неравенстве. Другими словами, с помощью (6) можно сравнивать только два конкретных объекта, но не, скажем, одиночный источник сразу со всей совокупностью возможных двойных объектов.

Как уже отмечалось, для принятой Харрисом [9] постановки задачи следует положить $\alpha = \beta$. При этом из общих формул (8) и (10) следует $z_\alpha = q/2$, а (6), (7) и (11) дают для рассматриваемого частного случая определение НКО:

$$2 \sum_1^n (y_k - g_{0k}) \cdot (g_{1k} - g_{0k}) \geq \sum_1^n (g_{1k} - g_{0k})^2 \quad (16)$$

и мощность критерия

$$1 - \beta = \Phi(q/2). \quad (17)$$

В указанной выше работе получены соотношения, эквивалентные (16) и (17).

Нетрудно выполнить и переход к непрерывным распределениям, что удобно при теоретических расчетах. Для этого введем сокращенные обозначения:

$$\Delta y_0(x) = y(x) - g_0(x), \quad \Delta g(x) = g_1(x) - g_0(x), \quad (18)$$

подставим (3) и (4) в (11) и (12), а затем устремим Δx к нулю. Тогда получим;

$$\Omega = \frac{1}{qB} \int \Delta y_0(x) \cdot \Delta g(x) dx, \quad (19)$$

$$q = \left\{ B^{-1} \int [\Delta g(x)]^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (20)$$

Здесь и ниже бесконечные пределы интегрирования не указываются.

Нередко $g_0(x)$ и $g_1(x)$ заданы не сами по себе, а как размытые изображения некоторых исходных объектов, которые мы обозначим посредством $s_0(x)$ и $s_1(x)$ соответственно. Тогда целесообразно сразу проводить рассмотрение в области пространственных частот. Пусть

$$G(f) = \int e^{-i \cdot 2\pi f x} g(x) dx \quad (21)$$

—общий вид преобразования Фурье. Тогда известное равенство Парсеваля (см., например, [18]) позволяет представить (19) и (20) в виде:

$$\Omega = \frac{1}{qB} \int \Delta Y_0^*(f) \cdot \Delta G(f) df. \quad (22)$$

$$q = \left\{ B^{-1} \int |\Delta G(f)|^2 df \right\}^{1/2}, \quad (23)$$

где звездочкой отмечена операция комплексного сопряжения.

Наконец, пусть $\Delta s = s_1(x) - s_0(x)$ — разность исходных объектов, а $T(f)$ — оптическая передаточная функция (ОПФ, Modulation Transfer Function) системы формирования изображения. Как известно, в частотной области размывание линейной системой описывается просто умножением на ОПФ:

$$\Delta G(f) = T(f) \cdot \Delta S(f), \quad (24)$$

и мы получаем окончательно:

$$\Omega = \frac{1}{qB} \int \Delta Y_0^*(f) \cdot T(f) \cdot \Delta S(f) df, \quad (25)$$

$$q = \left[\frac{1}{B} \int |T(f)|^2 \cdot |\Delta S(f)|^2 df \right]^{1/2}. \quad (26)$$

Как и ранее, объект $s_0(x)$ следует отвергнуть, если $\Omega \geq z_\alpha$, и принять если $\Omega < z_\alpha$. Мощность критерия $1 - \beta = Pr(s_1 | s_1) = \Phi(q - z_\alpha)$.

4. Минимальное расстояние между объектами. Приведенные формулы дают полное решение задачи о двоичном выборе объекта в том смысле, что при заданных α , $S/N \equiv \Psi$ и метрическом расстоянии между объектами Θ можно выполнить наиболее эффективным образом выбор одной из альтернатив, а затем и оценить допускаемую при этом вероятность ошибки II рода β . Однако при выяснении предельного разрешения в данных условиях нас скорее интересует минимальное расстояние Θ , еще

обнаружимое при фиксированных Ψ и надежности. Соответствующее выражение можно получить из (10), если переписать его в виде:

$$q = z_\alpha + z_\beta, \quad (27)$$

где z_β — корень уравнения $\Phi(z) = 1 - \beta$ (см. (8)). Подставляя сюда (11), находим для случая дискретного представления данных:

$$\left[\sum_1^n (g_{1k} - g_{0k})^2 \right]^{1/2} = \sigma(z_\alpha + z_\beta). \quad (28)$$

Левая часть (28) есть расстояние между функциями g_0 и g_1 в средне-квадратическом смысле, а правая часть определяется условиями обнаружения.

Из формул (20) и (27) следует непрерывный аналог последнего соотношения:

$$\left\{ \int [\Delta g(x)]^2 dx \right\}^{1/2} = \sqrt{B} (z_\alpha + z_\beta). \quad (29)$$

Наконец, предположим, что изображения объектов $s_0(x)$ и $s_1(x)$ формируются системой с передаточной функцией $T(f)$. Тогда из (26) и (27) получаем:

$$\left\{ \int |T(f)|^2 \cdot |\Delta S(f)|^2 df \right\}^{1/2} = \sqrt{B} (z_\alpha + z_\beta). \quad (30)$$

Это общее соотношение особенно полезно при анализе оптических систем, когда дифракция света строго ограничивает ОПФ некоторым верхним пределом пространственных частот f_R , за которым система полностью непрозрачна [19]. Полагая $T(f) \equiv 0$ при $|f| > f_R$ и нормируя S на полную яркость источника F , перепишем (30) в виде:

$$\Theta = \frac{z_\alpha + z_\beta}{\Psi}, \quad (31)$$

где

$$\Theta \equiv \left\{ \int_{-f_R}^{f_R} |T(f)|^2 \cdot |\Delta S(f)/F|^2 df / f_R \right\}^{1/2} \quad (32)$$

есть мера предельно обнаружимой близости изображений двух объектов, формируемых данной оптической системой, а

$$\Psi \equiv F \sqrt{f_R B} \quad (33)$$

—отношение сигнала к шуму на элементе порядка ширины функции рассеяния точки $\rho_R \equiv f_R^{-1}$ (см. уравнение (4)).

Весьма показательно, что все внешние условия, определяющие разрешение, группируются в виде комбинации

$$t \equiv \frac{z_1 + z_2}{\Psi}, \quad (34)$$

так что параметр Θ или любая функция от него, более удобная для описания предельного разрешения, зависят лишь от t .

Этот важный вывод иллюстрируется в последующих пунктах примерами, представляющими и самостоятельный интерес для практики.

5. Смещение произвольного объекта. Предположим, что различие сравниваемых объектов может заключаться лишь в смещении одного из них относительно другого на расстояние ρ , так что $S_1(x) = S_0(x - \rho)$ и соответственно $S_1(f) = \exp(-i2\pi\rho f) \cdot S_0(f)$. Отсюда следует:

$$|\Delta S(f)| = 4 \sin^2(\pi\rho f) |S_0(f)|, \quad (35)$$

а подстановка этого выражения в (32) дает:

$$\Theta = 4 \left[\int_{-f_R}^{f_R} |T(f)|^2 \cdot |S_0(f)/F|^2 \sin^4(\pi\rho f) df / f_R \right]^{1/2}. \quad (36)$$

Согласно (31), минимальное смещение $\rho_{\min}$, обнаружимое при данных α , β и Ψ , определяется соотношением $\Theta(\rho_{\min}) = (z_1 + z_2)/\Psi$. Мы не будем его исследовать в общем виде и укажем лишь асимптотическое выражение для $\rho_{\min}$ в пределе $\Psi \gg 1$. Полагая $\rho_R \equiv f_R^{-1}$, обобщим определение Харриса [9] и введем *рэлеевский фактор*

$$r \equiv \rho_{\min}/\rho_R, \quad (37)$$

равный минимальному обнаружимому смещению объектов в долях ширины функции рассеяния точки. В пределе $r \ll 1$, отвечающем условию $\Psi \gg 1$, имеем:

$$r \cong K \sqrt{\frac{z_1 + z_2}{\Psi}}, \quad \Psi \gg 1, \quad (38)$$

где постоянная

$$K = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-f_R}^{f_R} |T(f)|^2 \cdot |S_0(f)/F|^2 (f/f_R)^4 d(f/f_R) \right]^{-1/4}. \quad (39)$$

Таким образом, для относительно ярких объектов предельно малое смещение обратно пропорционально квадратному корню из отношения сигнала к шуму (в частности, выражением (38) дается точность определения положения спектральной линии при заданном уровне надежности). Мы увидим далее, что этот «закон $\Psi^{-1/2}$ » является общим для вопросов, связанных с однопараметрическим описанием предельного разрешения.

6. *Разделение двух близких точечных источников.* Простой и вместе с тем важный для практики пример доставляет нам рассмотрение ситуации, когда объект может представлять собой либо два некогерентных точечных источника интенсивности $F/2$ каждый, расположенных на угловом расстоянии ρ друг от друга (гипотеза H_0), либо одиночный точечный источник интенсивности F (гипотеза H_1). Тогда ошибка I рода заключается в том, что двойной источник будет принят за одиночный; ошибка II рода будет совершена, если одиночный в действительности источник будет принят за двойной с разделением компонентов ρ . Подход Неймана—Пирсона предполагает, что при заданной вероятности α «потерять» двойной источник разыскивается такое решающее правило, которое максимизирует вероятность $1-\beta$ правильного отождествления одиночного источника. В несколько ином контексте этот пример рассматривается в [9].

Подчеркнем, что в данном случае имеется весьма значительная априорная информация о возможных видах объектов, и именно этот факт в значительной мере определяет достижимое разрешение.

Считая x угловой координатой, примем

$$\begin{cases} s_0(x) = \frac{F}{2} [\delta(x - \rho/2) + \delta(x + \rho/2)] \\ s_1(x) = F \delta(x), \end{cases} \quad (40)$$

где $\delta(x)$ —функция Дирака. Ввиду известного «подстановочного» свойства δ -функции получаем для трансформанты Фурье разности объектов $\Delta s(x) \equiv s_1(x) - s_0(x)$ простое выражение:

$$|\Delta S(f)| = F \cdot 2 \sin^2(\pi \rho f / 2). \quad (41)$$

Возьмем для определенности в качестве формирующей изображение системы щель шириной b . Соответствующая функция рассеяния линии (ФРЛ, Line Spread Function) имеет вид $[\sin(\pi z)/(\pi z)]^2$, где $z = x/\rho_R$ и $\rho_R = \lambda/b$ — рэлеевская ширина изображения щели. Известно (см., например, [20]), что ОПФ щели представляет собой «треугольный» фильтр:

$$T(f) = \begin{cases} 1 - f/f_R, & |f| \leq f_R \\ 0, & |f| > f_R \end{cases} \quad (42)$$

где по-прежнему $f_R \equiv \rho_R^{-1}$. Вновь вводя рэлеевский фактор r согласно (37), находим из (32):

$$\Theta = \left[8 \int_0^1 (1-u)^2 \sin^4(\pi r u/2) du \right]^{1/2} =$$

$$= \left[1 + 8 \frac{\sin(\pi r) - \pi r}{(\pi r)^3} - 2 \frac{\sin(2\pi r) - 2\pi r}{(2\pi r)^3} \right]^{1/2} \quad (43)$$

С учетом обозначения (34) основное соотношение (31) принимает вид:

$$\Theta(r) = t, \quad t \equiv (z_\alpha + z_\beta)/\Psi, \quad (44)$$

а его обращение

$$r = \Theta^{-1}(t) \quad (45)$$

и определяет минимально допустимое разделение компонентов, совместимое с заданными вероятностями ошибок и отношением сигнала к шуму.

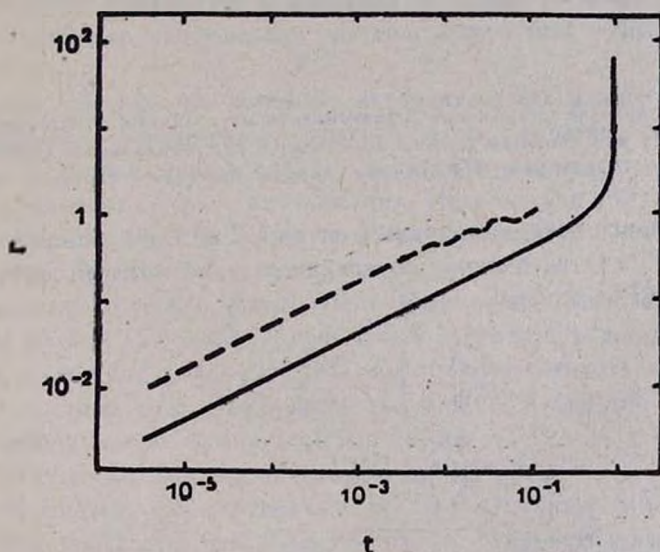


Рис. 2. Рэлеевский фактор r как функция параметра $t = (z_\alpha + z_\beta)/\Psi$ для двойного (сплошная линия) и синусоидального (пунктир) источников.

Значения $s(\alpha, \beta) \equiv z_\alpha + z_\beta$ можно найти при помощи таблицы нормального распределения, имеющейся во многих руководствах, или непосредственно из таблицы обратного нормального распределения [21]. Для приближенных оценок достаточно рис. 1.

Универсальная функция $\Theta^{-1}(t)$, заданная соотношениями (43)—(45), представлена на рис. 2; для удобства мы выделили из нее на рис. 3 зависимость $r(\Psi)$ для ряда значений $s(\alpha, \beta)$.

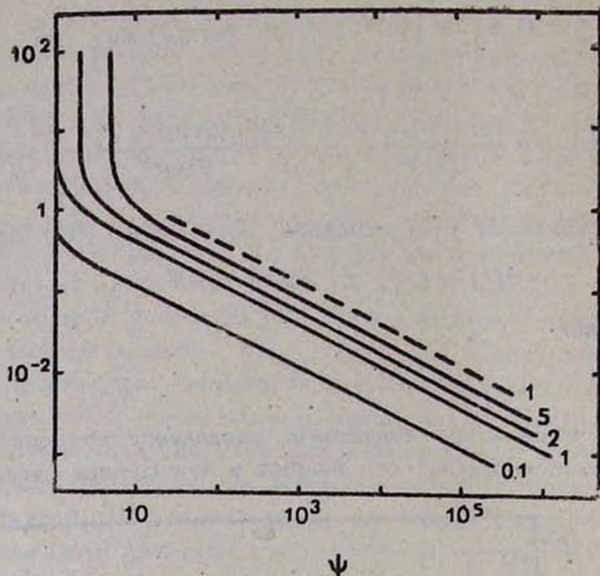


Рис. 3. Предельное разрешение в зависимости от величины отношения сигнала к шуму для двойного (сплошные линии) и синусоидального (пунктир) источников. На рисунке указаны значения $s(\alpha, \beta)$.

Характерное поведение кривых на рис. 2 и 3 для «ярких» ($\Psi \gg 1$) и «слабых» ($\Psi \simeq 1$) источников определяется асимптотикой функций $\Theta(r)$ и $\Theta^{-1}(t)$. Из (43) следует:

$$\Theta(r) \simeq \begin{cases} \frac{\pi^2 r^2}{\sqrt{210}} \left[1 - \frac{5\pi^2 r^2}{144} \right], & r \ll 1, \\ 1 - \frac{15}{4\pi^2 r^2}, & r \gg 1. \end{cases} \quad (46)$$

так что обратная функция

$$\Theta^{-1}(t) \simeq \begin{cases} 1.212\sqrt{t}, & t \ll 1, \\ 0.616/\sqrt{1-t}, & 1-t \ll 1. \end{cases} \quad (47)$$

Обсуждение соответствующих зависимостей для слабых объектов целесообразно отложить до тех пор, когда в рассмотрение будут включены и

собственные флуктуации изображения, обусловленные квантовой природой света (радиационный шум). В области же высокого отношения сигнала к шуму мы имеем:

$$r \simeq 1.212 \sqrt{(z_1 + z_2)/\Psi}, \quad \Psi \gg 1. \quad (48)$$

При значениях α и β в диапазоне 0.02—0.10 коэффициент пропорциональности в (48) между r и $\Psi^{-1/2}$ приблизительно равен 1.9—2.3, так что для ориентировочных расчетов можно принять просто

$$r \simeq 2/\sqrt{\Psi}, \quad \Psi \gg 1. \quad (49)$$

Как и следовало ожидать, в принципе достижимо сколь угодно высокое разрешение, однако продвижение в область малых значений рэлеевского фактора требует очень быстрого увеличения отношения сигнала к шуму $\Psi \sim r^{-2}$. Характер этой зависимости сохраняется и в случае произвольной системы формирования изображения; при этом справедливы соотношения (38) и (39), где следует принять $|S_0(f)/F| = 1/8$. Поскольку численное значение K слабо зависит от вида ОПФ, мы приходим к важному выводу: в проблеме разделения источников главную роль играет не формирующая изображение система, а величина отношения сигнала к шуму.

Заметим, наконец, что точечные источники (40) можно расположить на произвольном «пьедестале» — фиксированном объекте, — и тогда рассмотренная в данном пункте задача сводится к нахождению условия обнаружения точечных деталей изображения. Поскольку в (30) входит только разность распределений яркости в сравниваемых объектах, основные соотношения сохраняют свою силу.

7. *Выделение цепочки источников.* Рассмотрим альтернативные объекты, один из которых представляет собой «ступеньку» шириной L и высотой F/L , а другой — ряд из N равномерно расположенных на интервале длиной L точечных источников интенсивности F/N каждый. Полное количество источников N предполагается четным. Пусть $\rho = L/(N-1)$ — расстояние между соседними источниками, а $r = \rho/\rho_R$, $\rho_R = \lambda/b$ — рэлеевский фактор для системы формирования изображения в виде щели.

Нетрудно показать, что в данном случае (32) принимает вид:

$$\Theta^2(r) = 2 \int_0^1 (1-u)^2 \cdot \left| \frac{\sin[(N-1)\pi ru]}{(N-1)\pi ru} - \frac{\sin(N\pi ru)}{N \sin(\pi ru)} \right|^2 du, \quad (50)$$

и уравнение, определяющее предельное разрешение, по-прежнему записывается в форме (44). Мы не будем решать его для всех возможных зна-

чений r , а остановимся только на области высокого отношения сигнала к шуму, представляющей сейчас наибольший интерес.

Из последнего соотношения следует:

$$\Theta(r) \simeq \frac{2\pi^2}{3\sqrt{210}} (N-1) \cdot r^2, \quad r \ll 1, \quad (51)$$

так что вместо (48) мы имеем в случае N источников:

$$r \simeq 1.484 \sqrt{\frac{z_s + z_p}{(N-1)\Psi}}, \quad \Psi \gg 1. \quad (52)$$

Уменьшение предельного рэлеевского фактора приблизительно в $\sqrt{N}$ раз вполне соответствует интуитивно ожидаемому результату: ряд точечных источников проще обнаружить на равномерном фоне, чем только два таких объекта.

Обратим внимание, что характер зависимости $r(\Psi) \sim \Psi^{-1/2}$ в данном примере сохранился.

8. *Выделение синусоидального объекта.* Последний из рассматриваемых здесь примеров—выделение объекта с чисто гармоническим распределением яркости—представляет особый интерес ввиду того, что в области пространственных частот добавка к спектру мощности локализована. Это позволит в дальнейшем перейти к обсуждению вопроса о предельно достижимой частоте в случайном шуме.

Итак, пусть

$$\Delta s(x) = \begin{cases} a \cos(2\pi f_0 x), & |x| \leq L/2, \\ 0, & |x| > L/2, \end{cases} \quad (53)$$

где a , L , и $P_0 \equiv f_0^{-1}$ —соответственно амплитуда, протяженность и период «возмущения» профиля яркости объекта; полное количество периодов Lf_0 предполагается для простоты целым числом. Соответствующая трансформанта Фурье равна

$$\Delta S(f) = \frac{aL}{2} \left\{ \text{sinc}[L(f-f_0)] + \text{sinc}[L(f+f_0)] \right\}, \quad (54)$$

где $\text{sinc}(x) \equiv \sin(\pi x)/(\pi x)$. Поскольку $\text{sinc}(0) = 1$, $\text{sinc}(1) \approx 0$, мы имеем в спектре разности два пика шириной $\Delta f \approx L^{-1}$ и высотой $aL/2$ каждый. Подстановка (54) в (30) дает:

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-1}^1 |T_u|^2 \frac{u^2 \sin^2(\pi L f_R u)}{(u_0^2 - u^2)^2} du \right\}^{1/2} = (z_s + z_p) \cdot \frac{\sqrt{B f_R}}{a}, \quad (55)$$

где $u_0 = f_0/f_R P_R/P_0$. Для интересующей нас области $u_0 > 1$ интеграл в (55) слабо зависит от Lf_R и для T_u вида (42), $Lf_R > 1$ левая часть этого

соотношения равна приблизительно $(\pi \sqrt{30} \cdot u_0^2)^{-1}$. Полагая $\Psi = \sqrt{B f_R} / a$ получаем условие обнаружения для больших значений Ψ вида:

$$\left(\frac{f_0}{f_R}\right)^2 \simeq \frac{1}{\pi \sqrt{30}} \cdot \frac{\Psi}{z_a + z_g}. \quad (56)$$

Поскольку $(f_0/f_R)^{-1} = (\rho_R/\rho_0^{min})^{-1}$ в данном случае можно считать величиной, совпадающей по смыслу с рэлеевским фактором r , перепишем (56) следующим образом:

$$r \simeq 4.15 \sqrt{(z_a + z_g)/\Psi}, \quad \Psi \gg 1. \quad (57)$$

Таким образом, в области «сверхразрешения» ($\rho_0 < \rho_R$) зависимость $r(t)$ имеет приблизительно тот же вид, что и в предыдущих примерах (рис. 2, 3).

Более полное обсуждение этих результатов будет дано в последующих публикациях.

Крымская лаборатория Государственного
астрономического института им. П. К. Штернберга

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь дан вывод соотношений (6)—(11); поскольку выкладки типичны для задач рассматриваемого типа, они приводятся в максимально сжатом виде.

Функции правдоподобия при гипотезах g_0 и g_1 имеют вид:

$$L(y|g_v) = (\sigma \sqrt{2\pi})^{-n} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_1^n (y_k - g_{vk})^2 \right], \quad v=0,1, \quad (\Pi 1)$$

где через y обозначен вектор $(y_1, \dots, y_n)$. Прежде всего следует найти область w_a такую, что при заданном

$$\alpha = \int_{w_a} L(y|g_0) dy \quad (\Pi 2)$$

величина

$$1 - \beta = \int_{w_a} L(y|g_1) dy = \int_{w_a} \frac{L(y|g_1)}{L(y|g_0)} \cdot L(y|g_0) dy \quad (\Pi 3)$$

максимальна. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы w_a включала в себя все точки, для которых отношение $L(y|g_1)/L(y|g_0)$ принимает наибольшие значения. Требуя, чтобы указанное отношение было

не менее некоторой (зависящей от α) постоянной, получаем условие для w_α вида:

$$\sum_1^n (y_k - g_{1k})^2 - \sum_1^n (y_k - g_{0k})^2 \leq C_\alpha = \text{const.} \quad (\Pi 4)$$

Таким образом, НКО представляет собой часть пространства $\{y_k\}$, ограниченную плоскостью (П4).

Вычисление интеграла в правой части (П2) по области (П4) дает:

$$\alpha = \Phi\left(\frac{C_\alpha - x}{2\sigma\sqrt{x}}\right), \quad (\Pi 5)$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (9) и

$$x = \sum_1^n (g_{1k} - g_{0k})^2. \quad (\Pi 6)$$

Полагая $\Phi(z_\alpha) \equiv 1 - \alpha$, находим из (П5):

$$C_\alpha = x - 2\sigma\sqrt{x} \cdot z_\alpha. \quad (\Pi 7)$$

Наконец, подстановка двух последних выражений в условие (П4) преобразует его к виду (6) и (7), принятому в основном тексте.

Вычисление интеграла в (П3) дает для мощности критерия следующее выражение:

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{C_\alpha + x}{2\sigma\sqrt{x}}\right), \quad (\Pi 8)$$

что с учетом (П6) и (П7) сводится к (10) и (11).

MAXIMUM LIKELIHOOD IMAGE RESTORATION. IV. LIMITING RESOLVING POWER UNDER GIVEN ALTERNATIVE

V. Yu. TEREBIZH

The formal criterion is found for the choice of the blurred and noised object in the case when the alternative object is known. The criterion generalizes the analogous result by J. Harris [9] to situations when a priori probabilities of the objects presence are not given and for arbitrary probabilities of a I and II type mistakes (α and β correspondingly). The exact expression for the limiting resolving power under given α , β and signal to noise ratio Ψ is found. The limiting resolving power depends only from $t = (z_\alpha + z_\beta)/\Psi$, where z_i is quantile of the normal distribution. For bright objects limiting resolution is proportional to $\Psi^{-1/2}$. A number of examples is considered that have self-dependent significance for practice.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ю. Теремин, *Астрофизика*, 32, 327, 1990.
2. В. Ю. Теремин, *Астрофизика*, 33, 113, 1990.
3. В. Ю. Теремин, В. В. Бирюков, *Астрофизика*, 33, 305, 1990.
4. Lord Rayleigh (Strutt J. W.), *Scientific Papers*, v. 1, Dover, New-York, 1964.
5. G. Toraldo di Francia, *J. Opt. Soc. Amer.*, 45, 497, 1955.
6. S. A. Schelkunoff, *Bell System Tech.*, 22, 80, 1943.
7. G. Toraldo di Francia, *Nuovo Cimento*, Suppl. 9, 426, 1952.
8. H. Wolter, In *"Progress in Optics"*, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, v. 1, ch. 5, 1961.
9. J. L. Harris, *J. Opt. Soc. Amer.*, 54, 606, 1964.
10. J. L. Harris, *J. Opt. Soc. Amer.*, 54, 931, 1964.
11. B. R. Frieden, *J. Opt. Soc. Amer.*, 57, 1013, 1967.
12. C. K. Rushforth, R. W. Harris, *J. Opt. Soc. Amer.*, 58, 539, 1968.
13. B. R. Frieden, In *"Picture Processing and Digital Filtering"*, ed T. S. Huang, Springer, 1979, pp. 179—249.
14. А. М. Сороко, *Физ. элем. частиц и атомного ядра*, 12, 754, 1981.
15. Г. И. Василенко, А. М. Тараторин, *Восстановление изображений*, Радио и связь, М., 1986.
16. M. G. Kendall, A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Griffin, London 1969.
17. D. R. Cox, D. V. Hinkley, *Theoretical, Statistics*, Chapman and Hall, London, 1974.
18. I. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1951.
19. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, London, 1964.
20. E. L. O'Neill, *Introduction to Statistical Optics*, Addison-Wesley, 1963.
21. А. Н. Большев, Н. В. Смирнов, *Таблицы математической статистики*, Наука, М. 1965.