А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 33 ОКТЯБРЬ, 1990 ВЫПУСК 2

УДК: 52:53:51

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ. III. АЛГОРИТМ. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

В. Ю. ТЕРЕБИЖ, В. В. БИРЮКОВ

Поступила 9 июля 1990

Предложен метод численного решения задачи максимизации функционала при вероятностных ограничениях, возникающей в методе максимально правдоподобного (ММП) восстановления изображений. Анализ тестов показал эффективность и устойчивость восстановления при помощи ММП. Дано предварительное сопоставление эффективности ММП и других методов восстановления изображений.

1. *Введение*. Настоящая работа является продолжением статей [1, 2], формулы, таблицы и рисунки которых цитируются ниже с добавлением соответствующего номера статьи I и II.

В I задача нахождения наиболее правдоподобной оценки относительного распределения яркости $(s_1, \ldots, s_n)$ в исходной картине (оригинале) была приведена к максимизации функционала

$$\Phi(s_1, \cdots, s_n) = \sum_{j=1}^{m} [f_j \cdot \ln(1-\mu) \cdot \Lambda \cdot p_j + \mu \cdot \beta_j] - (1-\mu) \cdot \ln \Lambda \qquad (1)$$

при естественных для всякой плотности распределения $\{s_k\}$ «вероятностных» условиях

$$0 \leqslant s_k \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \cdots, n, \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} s_k = 1. \qquad (3)$$

Здесь $m \geqslant n$ — количество пикселов в размытом и зашумленном изображении $\{N_j\}$, полная яркость которого $N = \sum_1^m N_j$, а относительное распределение яркости описывается совокупностью $\{f_j = N_j/N\}$. Заданными считаются параметры $\beta_j = b_j/B$, $B = \sum_1^m b_j$, где b_j — средняя яркость шума в заданном пикселе, и $\mu = B/N$ — относительная яркость аддитивного шума. Распределение

$$p_j = \sum_{k=1}^{n} h_{jk} \cdot s_k, \quad \sum_{j=1}^{m} h_{jk} = 1, \tag{4}$$

где (h_{jk}) — функция рассеяния точки (ФРТ, см. II). Наконец $\Lambda(s_1, \cdots, s_n)$ — корень уравнения

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{f_j \cdot \beta_j}{(1-\mu) \cdot \Lambda \cdot p_j + \mu \cdot \beta_j} = 1, \quad \mu \neq 0. \tag{5}$$

При $\mu = 0$ следует принять $\Lambda = 1$.

Оценка полной яркости оригинала дается соотношением

$$\widehat{N}_* = (1 - \mu) \cdot N. \tag{6}$$

Мы предполагаем, что шум не проходит через систему формирования, т. е. рассматривается основная задача, обозначенная в I как SHNR. Более простая задача SNHR (см. раздел 6 статьи I) будет рассмотрена в дальнейшем.

В настоящей статье предлагается метод численного решения описанной задачи максимизации, путем решения модельных задач выясняется эффективность подхода, основанного на методе максимума правдоподобия (ММП), и дается предварительное сопоставление ММП с другими методами, часто применяемыми на практике. Рассматривается также пример анализа данных наблюдений.

Мы ограничиваемся здесь рассмотрением одномерной задачи восстановления изображения. С принципиальной точки зрения нет разницы между одномерными и двумерными задачами, и соотношения (1)—(6) справедливы в обоих случаях, однако восстановление двумерных изображений требует разработки некоторых специальных способов ускорения расчетов. Эти вопросы будут обсуждаться в последующей нашей работе.

2. *Алгоритм.* Известно, что основная трудность при решении экстремальных задач связана с необходимостью соблюдать заданные ограничения, т. е. тем обстоятельством, что разыскивается условный экстремум функционала. В данном случае условия (2) и (3) означают, что некоторое решение $(\widehat{s}_1, ..., \widehat{s}_n) \equiv \{\widehat{s}_k\}$, представляющее собой точку n-мерного пространства $\{s_k\}$, лежит на той части гиперплоскости (3), которая находится в первом (положительном) гиперквадранте. Возможен формальный учет ограничений путем введения в (1) множителей Лагранжа и выбранных подходящим образом «штрафных» функций (см., например, [3, 4]), однако более продуктивным оказывается предлагаемый ниже метод, осно-

ванный на сведении задачи (1)—(3) к хорошо изученной задаче *безусловной* максимизации.

Указанный переход выполняется в два этапа. Сначала примем

$$s_k = x_k^2, \quad -1 \leqslant x_k \leqslant 1, \quad k = 1, \cdots, n, \tag{7}$$

преобразовав тем самым область (2) в n-мерный гиперкуб, симметрично расположенный относительно начала координат в пространстве $\{x_k\}$. При этом равенство (3) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1, \tag{8}$$

означающий с очевидностью, что искомое решение должно находиться на $(n-1)$-мерной гиперсфере единичного радиуса с центром в начале координат. Теперь становится совершенно естественным второй шаг: введем в пространстве $\{x_k\}$ сферические координаты на поверхности (8) по формулам [5]:

$$\begin{cases} x_1 = \cos\varphi_1, \\ x_2 = \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2, \\ x_3 = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cdots \cdot \sin\varphi_{n-2} \cdot \cos\varphi_{n-1}, \\ x_n = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2, \cdots, \sin\varphi_{n-2} \cdot \sin\varphi_{n-1}, \end{cases} \tag{9}$$

где область изменения угловых переменных задана неравенствами

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \varphi_k \leqslant \pi, \quad k = 1, 2, \cdots, n-2, \\ &0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда автоматически будет выполнено условие (8), а поиск максимума функционала (1) в $(n-1)$-мерном пространстве $\{\varphi_k\}$ не ограничен особыми условиями. Для разыскания безусловного экстремума можно применить один из многих апробированных методов [4]; в данном случае мы использовали метод скорейшего подъема.

Подчеркнем, что предлагаемый способ сведения условной задачи поиска экстремума к безусловной никак не связан с видом функционала и применим к произвольной задаче с вероятностными ограничениями (2) и (3). Там, где эти ограничения не вытекают естественно из постановки задачи, нередко удается все же придти к ним после соответствующей нормировки. Метод не ограничен также размерностью изучаемой задачи.

Численная максимизация (1) с одновременным решением уравнения (5) проводилась последовательными итерациями. Условием остановки процесса может служить статистическая неразличимость нескольких последовательных итераций по многомерному критерию χ^2 [6]. Достаточно глубокое восстановление обычно требует порядка 100—300 итераций.

Проблема единственности решения, связанная с возможным существованием локальных максимумов функционала (1) требует специального изучения. В практической раобте нам пока не приходилось подозревать наличие нескольких решений. Такая ситуация представляется нереальной и на основании общих соображений о характере вероятностного распределения, ведущего к (1). Однако этот вопрос нуждается в строгом исследовании.

3. Модельные задачи. Для предварительной оценки степени неопределенности проблемы восстановления целесообразно ввести характеристику типа отношения сигнала к шуму. Следует, однако, иметь в виду, что в нелинейных задачах корректное определение указанного отношения далеко не очевидно [7]. Поэтому здесь для простоты мы ограничились одной из линейных оценок, получаемой на основании следующих соображений. Среднее значение сигнала для одного пиксела примерно равно N_* / m, а стандартного отклонения интенсивности $-\sqrt{N_*/m + \langle b \rangle} = \sqrt{(N_*+B)/m}$. Таким образом, при *стохастическом* механизме размывания изображения отношение S/N в одном пикселе приблизительно равно

$$\Psi_{st} = \frac{N_*}{\sqrt{m\cdot(N_*+B)}} \simeq \frac{\hat{N}_*}{\sqrt{m\cdot N}} \simeq (1-\mu)\cdot\sqrt{N/m}, \qquad (11)$$

где N—полная яркость изображения и $\mu = B/N$—относительная яркость шума. При сравнении нашего подхода с другими методами мы будем иногда применять *детерминированное* сглаживание интегральным оператором вида (I. 1). Тогда вместо (11) следует принять

$$\Psi_{det} = \frac{N_*}{\sqrt{m\cdot B}} \simeq \frac{\hat{N}_*}{\sqrt{m\cdot B}} \simeq (1-\mu)\cdot\sqrt{N/(m\cdot\mu)}. \qquad (12)$$

Ввиду оказанного выше эти оценки полезны лишь на качественном уровне обсуждения.

Наиболее строгой проверкой эффективности всякого метода служат модельные задачи, когда исходная картина известна заранее. Применение ММП к некоторым из таких задач иллюстрируется рис. 1—4, а также рис. (I, 1), где приведен пример No.9. Значения соответствующих численных параметров даны в табл. 1, которая последовательно содержит: 1) рабочий номер примера, 2) количество пикселов в исходном (n) и наблюдаемом (m) изображениях, 3) полное количество событий в реализации оригинала N_*, 4) указание на характер сглаживания, 5) эквивалентную ширину ФРТ в пикс. (см. [II]), соответствующую рэлеевскому пределу

Таблица 1

ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕСТИРУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

№	n/m	N_*	Сглаживание	W_l пикс	B	μ	Ψ	$\hat{N}_*$	Рис.
8	100/100	5000	st	25.1	1000	0.17	6.4	5024	1
9	100/100	5000	st	25.1	4000	0.44	5.2	5130	I.1
7	100/100	5046	det	25.0	4000	0.44	8.0	5158	2
12	218/218	180510	det	12.5	109000	0.38	37.0	180291	3
10	161/161	16100	det	50.1	8050	0.33	14.1	16129	4

разрешения, 6) количество событий B пуассоновского шума в изображении, 7) относительную яркость шума $\mu = B/N$, 8) отношение S/N согласно (11) или (12), 9) оценку полной яркости оригинала $\hat{N}_*$, 10) номер соответствующего рисунка.

Напомним, что предложенный в I подход учитывает внутренние флуктуации сигнала (радиационный шум) при сглаживании, так что последнее, как и в действительности, имеет стохастический характер. Лишь в случае очень ярких изображений можно пренебречь радиационным шумом и проводить сглаживание вида (I, 1), т. е. использовать закон больших чисел.

Во всех рассматриваемых ниже примерах априорная информация предполагает лишь неотрицательность оригинала.

В первых двух однотипных примерах No.8, 9 оригинал представляет собой суперпозицию двух гауссовских функций со стандартным отклонением $\sigma = 2$ пикс., расположенных на расстоянии $a = 15$ пикс. друг от друга. ФРТ для этих примеров также имеет вид гауссовского распределения (II ,61, 62) со стандартом $\sigma = 10$ пикс.

В частотной области указанному виду ФРТ отвечает передаточная функция гауссовского же вида (II, 62), стремящаяся к нулю лишь при бесконечно больших частотах. Это означает, что модельная система формирования изображения в примерах No. 8, 9 сохраняет информацию о весьма мелких деталях оригинала (впрочем, функция Гаусса убывает быстро, так что *эффективный* частотный диапазон в присутствии шума сравнительно невелик). Если конкретизировать общую постановку обратной задачи и рассматривать восстановление *оптических* изображений, то, как известно [11], следует принять во внимание полную непрозрачность оптических систем для пространственных частот выше некоторого предельного значения $\sim D/\lambda$ (см. часть II настоящей работы). Таким образом, в оптических изображениях информация о мелких деталях, казалось бы, безвозвратно теряется. В качестве соответствующего примера мы выбирали

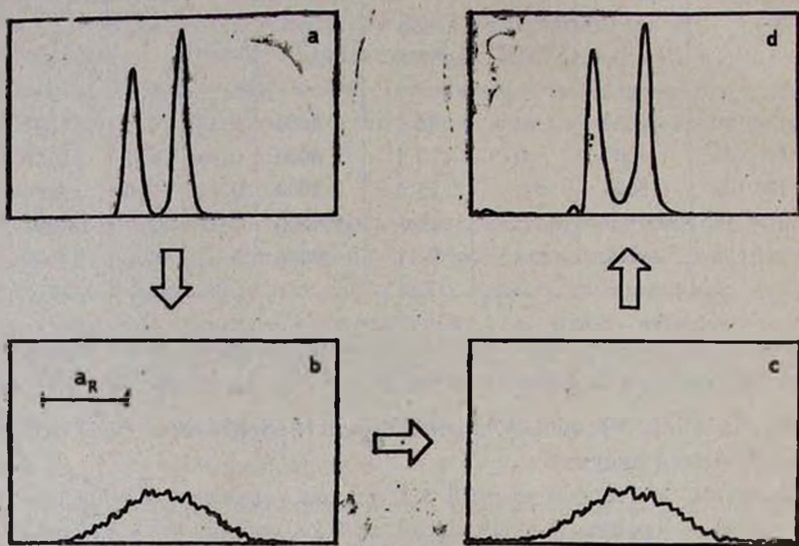

Рис. 1. Оригинальное изображение (a) в примере № 8 реализовано (b) в виде конечного числа событий и одновременно размыто ФРТ с рэлеевской шириной α_R. После внесения аддитивного шума (c) с помощью ММП получена оценка оригинала (d). Информация об оригинале предполагала лишь его неотрицательность.

случай дифракции на щели (II. 56, 57) с характерной шириной функции рассеяния линии $\alpha_* = 25$ пикс. Этому значению отвечает полная ширина на уровне первого нулевого значения $2\cdot\alpha_* = 50$ пикс. Табл. II. 1 дает также эквивалентную ширину $W_l = 25$ пикс. и квадратичную ширину $\Delta_l = 17$ пикс. Пример No. 7 иллюстрируется рис. 2. Заметим, что к этому примеру очень близок важный для астрономических наблюдений случай дифракции на круге, где изображение точечных источников дается функцией Эйри (II. 44).

Принимая во внимание скудость априорной информации об оригинале (предполагалась лишь его неотрицательность) и значительную относительную ширину ФРТ, результаты восстановления на рис. 1, 2 и I. 1 следует признать вполне удовлетворительными. Здесь в полной мере проявляется *эффект сверхразрешения*, когда удается восстановить детали оригинала, характерный размер которых существенно меньше ширины ФРТ, т. е. рэлеевского (дифракционного) предела. В частотном диапазоне эта ситуация эквивалентна восстановлению информации в области пространственных частот, лежащей выше частоты среза передаточной функции.

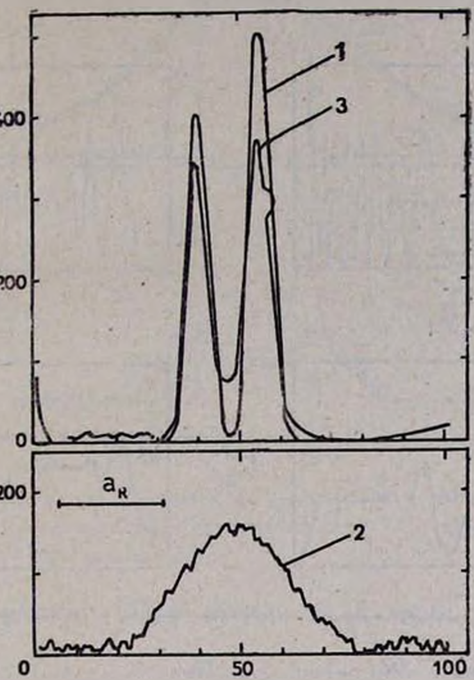

Рис. 2. Пример № 7. Оригинал (1) размыт дифракцией с рэлеевской шириной $a_к$ и зашумлен (2). При помощи ММП получена оценка (3).

Природа эффекта сверхразрешения кратко обсуждалась в I и более подробно в [8, 9]. Мы покажем в дальнейшем, что обеспечиваемое ММП разрешение достигает теоретического предела, обусловленного заданными априорной информацией и отношением сигнала к шуму.

Пример No. 12 (рис. 3) включает в качестве оригинала повторяющуюся синусоиду возрастающей частоты:

$$s(k) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 1, \cdots, 10;\ 209, \cdots, 218; \\ \dfrac{1000}{N_*} \cdot \left\{1 - \cos\left[2\pi\left(\dfrac{k - a_k}{35}\right)^2\right]\right\}, & k = 11, \cdots, 208, \\ a_k = 10,\ k = 11, \cdots, 109;\ a_k = 109,\ k = 110, \cdots, 208. \end{cases} \quad (13)$$

Систематическое уменьшение периода позволяет оценить предельное разрешение при восстановлении, а дублирование оригинала — отделить случайные эффекты. Сглаживание здесь проводилось с помощью гауссовской

ФРТ (II. 61, 62) со стандартом $\sigma = 5$ пикс. После сглаживания на рис. 3b удается заметить не более четырех максимумов исходной картины, из которых два наиболее широких сохраняются и после внесения аддитивного пуассоновского шума.

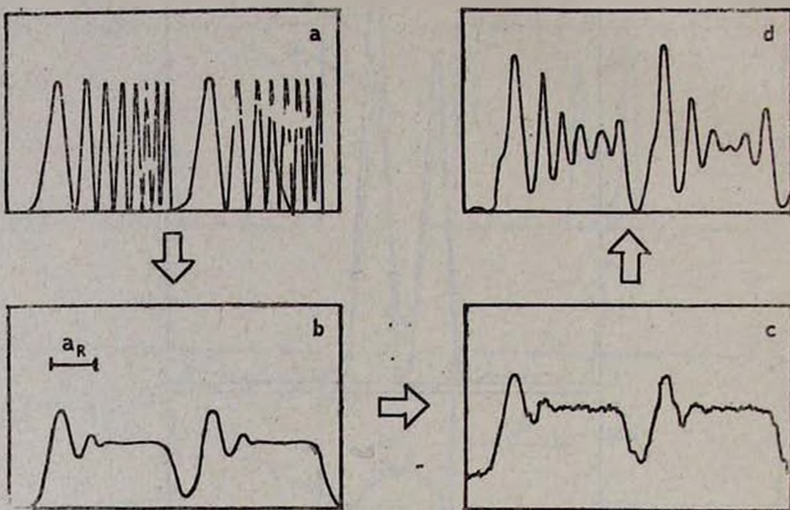

Рис. 3. То же, что на рис. 1, для примера № 12; сглаживание детерминированное.

Восстановленное изображение содержит 6 из 8 исходных максимумов. Вместе с тем ширина высокочастотных деталей уже не изменяется и составляет величину порядка 1/4 дифракционного предела.

Пример No. 10 (рис. 4) рассматривался в работе Демченко и Курчакова [10] с целью выяснить эффективность различных методов восстановления изображения. Оригинал в этом примере представляет собой два точечных источника:

$$s(k) = \frac{1}{2} \cdot [\delta_{k,\,65} + \delta_{k,\,97}], \tag{14}$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Стандартное отклонение гауссовской ФРТ равно 20 пикс. Рис. 4 показывает, что эффективность нескольких популярных методов восстановления приблизительно одинакова и значительно уступает эффективности ММП. В дальнейшем мы предполагаем детально сравнить эти данные и с результатами восстановления при помощи метода максимума энтропии, получившего наибольшее распространение в мировой практике.

Последний пример (рис. 5) показывает применение ММП к анализу реальных данных наблюдений. Двойная звезда π Boo с разделением ком-

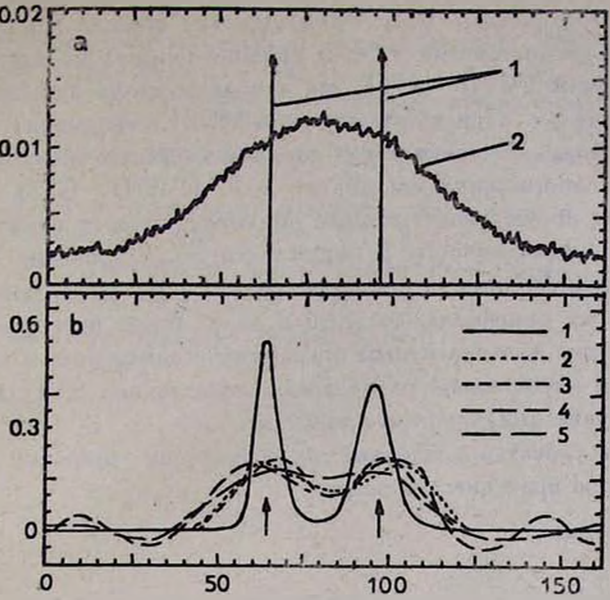

Рис. 4. Пример № 10. a) Оригинал (1), размытое и зашумленное изображение (2); b) результаты восстановления методами ММП (1), логарифмическим (2), Монте-Карло (3), Винера (4) и Тихонова (5).

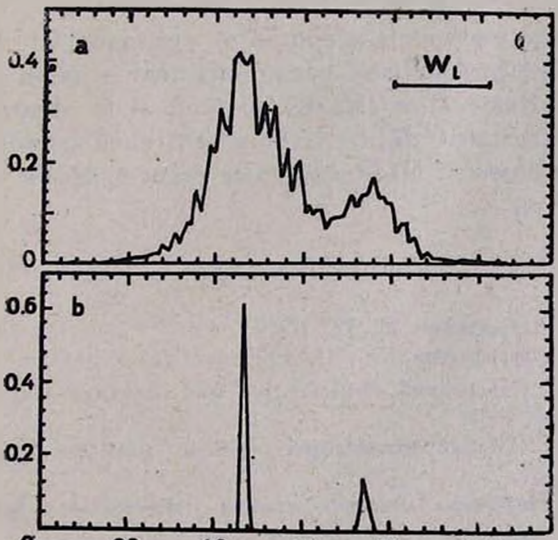

Рис. 5. Фотоэлектрический скан двойной звезды π Boo с разделением компонентов 5."6 при плохих изображениях (a) и результат восстановления при помощи ММП (b).

понентов 5.″6 сканировалась узкой щелью при помощи сканирующего фотометра со счетом фотонов [12]. Эквивалентная ширина одиночных звездных изображений составляла ~ 4.″5 (полная ширина на уровне половинной интенсивности FWHI ~ 4.″6), так что даже столь широкая пара частично перекрывалась. При восстановлении ММП информация о двойственности *не вводилась*. Эквивалентная ширина звездных профилей для восстановленного изображения составляет ~0.″ (FWHI ~ 0.″3).

Резюмируя обсуждение тестовых примеров, следует отметить, что помимо высокой *эффективности и надежности* восстановление ММП обладает свойством *устойчивости:* применение этого метода к восстановлению одного и того же оригинала, который в дальнейшем подвергался различным статистически эквивалентным операциям сглаживания и внесения шума, приводит к идентичным (в пределах естественных для данного отношения S/N флуктуаций) оценкам оригинала.

Указанные свойства позволяют надеяться на широкое применение ММП к решению практических задач.

Крымская лаборатория
ГАИШ

MAXIMUM LIKELIHOOD IMAGE RESTORATION. III. ALGORITHM. ONE-DIMENSIONAL TEST CASES

V. Yu. TEREBIZH, V. V. BIRYUKOV

The numerical method is proposed of searching for the maximum of functional under probabilistic constraints that arise in the Maximum Likelihood Image Restoration (MLIR) method. It is shown by analysis of the test examples that MLIR is an efficient and stable method. The preliminary comparison of MLIR and some other methods of the image restoration is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Ю. Теребиж*, Астрофизика, 32, 327, 1990.
2. *В. Ю. Теребиж*, Астрофизика, 33, 113, 1990.
3. *D. P. Bertsecas*, Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Academic Press, 1982;
   Д. Бертсекас. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа, Радио и связь, М., 1987.
4. *Ф. П. Васильев*, Численные методы решения экстремальных задач, Наука, М., 1988.
5. *Г. М. Фихтенгольц*, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. Физматгиз, М.—Л., 1960, стр. 401.

6. *H. Cramer*, Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Pr., Princeton, New Jersey, 1954;
Г. Крамер, Математические методы статистики, Мир, М., 1975.
7. *В. Ю. Теребиж*, Астрон. ж., 58, 221, 1981.
8. *Г. И. Василенко, А. М. Тараторин*, Восстановление изображений, Радио и связь, М., 1986.
9. *В. Ю. Теребиж*, Анализ временных рядов в астрофизике, Наука, М., 1991 (в печати).
10. *Б. И. Демченко, А. В. Курчаков*, О реставрации изображений в астрономии, Астрофиз. ин-т., Алма-Ата, 1983.
11. *M. Born, E. Wolf*, Principles of Optics, Pergamon Press, London, 1984; *М. Борн, Э. Вольф*, Основы оптики, Наука, М., 1973.
12. *В. Ю. Теребиж*, Астрон. циркуляр, № 1188, 3, 1981.