АСТРОФИЗИКА

ТОМ 33 ОКТЯБРЬ, 1990 ВЫПУСК 2

УДК: 524.37—852—652

СВЕЧЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ТУМАННОСТИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЗВЕЗДЫ

А. К. КОЛЕСОВ, В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 15 сентября 1990

Рассматривается задача о диффузии излучения в однородной сферической туманности оптического радиуса x, находящейся под воздействием центральной звезды. Дается интегро-дифференциальное уравнение, определяющее непосредственно интенсивность диффузного излучения, выходящего из туманности. С помощью этого уравнения при $x \gg 1$ получаются асимптотические формулы для интенсивности излучения, выходящего из туманности, и для ее светимости. При этом используется асимптотическое выражение для коэффициента отражения туманности, найденное нами ранее. Значения светимости, вычисленные по асимптотической формуле, сравниваются с ее точными значениями. Это сравнение показывает, что асимптотические формулы, полученные в настоящей статье, дают хорошие результаты уже при не очень больших значениях x.

1. *Введение.* В нашей предыдущей статье [1] была рассмотрена задача о свечении сферической туманности при внешних источниках энергии. В результате были получены асимптотические формулы для коэффициента отражения туманности большого оптического радиуса. Знание этой функции позволяет определять интенсивности выходящего из туманности излучения при источниках, обладающих сферической симметрией, а также светимость туманности (т. е. полную энергию, рассеянную туманностью) при произвольных внешних источниках. Примером таких источников может служить звезда, расположенная на любом расстоянии от туманности.

В настоящей статье, которую можно считать продолжением статьи [1], рассматривается задача о свечении сферической туманности, находящейся под воздействием центрального источника энергии. Этот случай наиболее важен для астрофизических применений, так как он соответствует планетарным туманностям и звездам с протяженными оболочками. В данном случае находятся асимптотические формулы для интенсивности излучения, выходящего из туманности, и для ее светимости. При этом используются асимптотические выражения для коэффициента отражения, полученные ранее [1]. Для оценки точности полученных асимптотических формул сравниваются значения светимости, найденные по этим формулам, с ее точными значениями.

Задача о свечении шара (или сферической оболочки) при центральном источнике энергии рассматривалась раньше в ряде работ [2—7] различными методами. В работах [8] и [9, 10] были получены асимптотические формулы для интенсивности излучения, выходящего наружу. Асимптотические формулы, найденные в данной статье, отличаются от них более высокой точностью.

2. *Основные уравнения.* Будем считать, что однородная сферическая туманность оптического радиуса x освещена центральной звездой со светимостью L_*. Пусть в туманности происходит изотропное рассеяние и истинное поглощение света, причем отношение коэффициента рассеяния к сумме коэффициентов рассеяния и истинного поглощения равно λ.

Обозначим через $I(x, \eta)$ интенсивность излучения, выходящего из туманности под углом $\arccos \eta$ к радиусу-вектору. Уравнение для определения функции $I(x, \eta)$ может быть получено путем мысленного добавления к шару сферического слоя бесконечно-малой оптической толщины и рассмотрения происходящих в нем процессов. Это уравнение имеет вид

$$\eta \frac{\partial I(x, \eta)}{\partial x} + \frac{1-\eta^2}{x} \cdot \frac{\partial I(x, \eta)}{\partial \eta} + I(x, \eta) =$$

$$= \frac{\lambda}{2} D(x) \left[\varphi_s(x, \eta) + e^{-2x\eta}\right], \tag{1}$$

где

$$D(x) = \int_0^1 I(x, \eta)\, d\eta, \tag{2}$$

$$\varphi_s(x, \eta) = 1 + 2\eta \int_0^1 \rho_s(x, \eta, \zeta)\, d\zeta \tag{3}$$

и $\rho_s(x, \eta, \zeta)$ — коэффициент отражения шара. Член $e^{-2x\eta}$ учитывает излучение, проходящее через шар без рассеяния из одного места добавочного слоя в другое. Уравнение (1) (без дополнительного члена) было получено ранее в работе [7].

Коэффициент отражения шара $\rho_s(x, \eta, \zeta)$ определяется уравнением, подобным уравнению (1). В нашей статье [1] уравнение для $\rho_s(x, \eta, \zeta)$

было подробно изучено. Там же дан список предыдущих работ, посвященных этому уравнению.

В статье [1] коэффициент отражения был представлен в виде

$$\rho_s(x, \eta, \zeta) = a_s(x, \eta, \zeta) + b_s(x, \eta, \zeta)\, e^{-2x\eta} + \\ + b_s(x, \zeta, \eta)\, e^{-2x\zeta} + c_s(x, \eta, \zeta)\, e^{-2x(\eta+\zeta)} \tag{4}$$

и были получены уравнения для определения функций $a_s(x, \eta, \zeta)$, $b_s(x, \eta, \zeta)$, $c_s(x, \eta, \zeta)$.

Как видно из уравнения (1), при учете выражения (4), величина $I(x, \eta)$ представляется в виде

$$I(x, \eta) = I_0(x, \eta) - I_1(x, \eta)\, e^{-2x\eta}, \tag{5}$$

где $I_0(x, \eta)$ и $I_1(x, \eta)$ — искомые функции.

Подстановка в уравнение (1) выражений (4) и (5) приводит к следующим уравнениям для определения функций $I_0(x, \eta)$ и $I_1(x, \eta)$:

$$\eta \frac{\partial I_0}{\partial x} + \frac{1-\eta^2}{x} \cdot \frac{\partial I_0}{d\eta} + I_0(x, \eta) = \\ = \frac{\lambda}{2} D(x) \left[1 + 2\eta \int_0^1 a_s(x, \eta, \zeta)\, d\zeta + 2\eta \int_0^1 b_s(x, \zeta, \eta)\, e^{-2x\zeta}\, d\zeta\right], \tag{6}$$

$$\eta \frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{1-\eta^2}{x} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \eta} - I_1(x, \eta) = \\ = \frac{\lambda}{2} D(x) \left[1 + 2\eta \int_0^1 b_s(x, \eta, \zeta)\, d\zeta + 2\eta \int_0^1 c_s(x, \eta, \zeta)\, e^{-2x\zeta}\, d\zeta\right], \tag{7}$$

где

$$D(x) = \int_0^1 [I_0(x, \eta) - I_1(x, \eta)\, e^{-2x\eta}]\, d\eta. \tag{8}$$

Уравнения (6) и (7) могут быть решены численными методами. Этому будет посвящена другая наша статья. Сейчас же, пользуясь уравнениями (6) и (7), мы получим асимптотические формулы для функций $I_0(x, \eta)$ и $I_1(x, \eta)$ при $x \gg 1$.

3. Асимптотические формулы. В статье [1] при получении асимптотических формул для функций $a_s(x, \eta, \zeta)$, $b_s(x, \eta, \zeta)$, $c_s(x, \eta, \zeta)$ при $x \gg 1$ в разложении этих функций по степеням $1/x$ сохранялись только нулевой и первый члены. Теперь при получении асимптотических формул для величин $I_0(x, \eta)$ и $I_1(x, \eta)$ мы представим их в виде

$$I_0(x, \eta) = F(x)\left[u(\eta) + \frac{1}{x} u^*(\eta)\right], \tag{9}$$

$$I_1(x, \eta) = F(x)\left[v(\eta) + \frac{1}{x} v^*(\eta)\right], \tag{10}$$

где функция $F(x)$ учитывает ослабление потока излучения, выходящего из шара, вследствие возрастания радиуса шара и происходящего в нем истинного поглощения излучения (в случае чистого рассеяния $F(x) \sim \sim 1/x^2$).

При подстановке в уравнения (6) и (7) выражений (9) и (10), а также найденных в [1] выражений для функций a_s, b_s, c_s, получаются четыре уравнения с разделяющимися переменными. Это дает возможность определить все пять функций, входящих в формулы (9) и (10), т. е. $F(x)$, $u(\eta)$, $u^*(\eta)$, $v(\eta)$, $v^*(\eta)$.

В результате имеем

$$F(x) = \frac{C}{x} \cdot \frac{e^{-kx}}{1 - Ne^{-2kx}}, \tag{11}$$

$$u(\eta) = \frac{\lambda}{2} u_0 \frac{\varphi(\eta)}{1 - k\eta}, \qquad v(\eta) = \frac{\lambda}{2} u_0 \frac{\omega(\eta)}{1 + k\eta}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}(1 - k\eta) u^*(\eta) = \eta u(\eta) - (1 - \eta^2) u'(\eta) - \\ - \frac{\lambda}{4} u_0 \eta \frac{d}{d\eta}[(1 - \eta^2) \varphi'(\eta)],\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}(1 + k\eta) v^*(\eta) = - \eta v(\eta) + (1 - \eta^2) v'(\eta) + \\ + \frac{\lambda}{4} u_0 \eta \frac{d}{d\eta}[(1 - \eta^2) \omega'(\eta)],\end{aligned} \tag{14}$$

где $\varphi(\eta)$ — функция Амбарцумяна для случая полубесконечной среды, а $\omega(\eta)$ — введенная в статье [1] функция, выражающаяся через $\varphi(\eta)$ с помощью формулы

$$\omega(\eta) \varphi(\eta) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta}\right) = 1. \tag{15}$$

Входящие в формулы (11)—(14) постоянные k, u_0, N определяются соотношениями

$$\frac{\lambda}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}=1, \tag{16}$$

$$\lambda u_0\int\limits_0^1\frac{\varphi(\eta)}{(1-k\eta)^2}\eta\,d\eta=1, \tag{17}$$

$$N=\lambda u_0\int\limits_0^1\frac{\varphi(\eta)}{1-k^2\eta^2}\eta\,d\eta. \tag{18}$$

Эти постоянные часто встречаются в теории переноса излучения. Они табулированы (в других обозначениях) в книге Г. ван де Хюлста [11].

Для определения постоянной C, входящей в формулу (11), можно использовать результаты работ [8] и [10], в которых разными методами изучалось свечение сферической туманности при анизотропном рассеянии света. В этих работах были получены асимптотические формулы для величин $\rho_s(x, \eta, \zeta)$ и $I(x, \eta)$ при пренебрежении членами порядка $1/x$ и $e^{-2x\eta}$. Формула для величины $I(x, \eta)$ была найдена в виде $I(x, \eta)=F(x)\,u(\eta)$, где функция $u(\eta)$ дается первой из формул (12), а функция $F(x)$ — формулой (11) с вполне определенным значением C. Оказывается, что

$$C=\frac{L_*\alpha^2 k}{2\pi^2\lambda}, \tag{19}$$

где α — коэффициент поглощения света в туманности.

Подстановка выражений (9), (10), (11) и (19) в формулу (5) приводит к следующей асимптотической формуле для интенсивности излучения, выходящего из туманности:

$$I(x, \eta)=\frac{L_*\alpha^2 k}{2\pi^2\lambda\,x}\cdot\frac{e^{-kx}}{1-Ne^{-2kx}}\left\{u(\eta)+\frac{1}{x}u^*(\eta)-\right.$$
$$\left.-\left[v(\eta)+\frac{1}{x}v^*(\eta)\right]e^{-2x\eta}\right\}, \tag{20}$$

где функции $u(\eta)$, $u^*(\eta)$, $v(\eta)$, $v^*(\eta)$ определяются соотношениями (12)—(14).

Асимптотическая формула для величины $I(x, \eta)$ в случае чистого рассеяния (т. е. при $\lambda=1$) может быть получена из (20) при $k\to 0$. Она имеет вид

$$I(x, \eta) = \frac{L_* \alpha^2}{8\pi^2 x (\varphi_1 x + \varphi_2)} \left\{ \varphi(\eta) + \frac{1}{x} \chi(\eta) - \right.$$
$$\left. - \left[\omega(\eta) + \frac{1}{x} \psi(\eta) \right] e^{-2x\eta} \right\}, \qquad (21)$$

где

$$\chi(\eta) = \eta\varphi(\eta) - (1 - 2\eta^2)\, \varphi'(\eta) - \frac{\eta}{2} (1 - \eta^2)\, \varphi''(\eta), \qquad (22)$$

$$\psi(\eta) = - \eta\omega(\eta) + (1 - 2\eta^2)\, \omega'(\eta) + \frac{\eta}{2} (1 - \eta^2)\, \omega''(\eta), \qquad (23)$$

φ_1 и φ_2 — первый и второй моменты функции $\varphi(\eta)$.

При переходе от (20) к (21) обозначено $u^*(\eta) = \frac{u_0}{2} \chi(\eta)$ и $v^*(\eta) = \frac{u_0}{2} \psi(\eta)$ и принято во внимание, что при малом истинном поглощении $N = 1 - 2 \frac{\varphi_2}{\varphi_1} k$, а при чистом рассеянии $\varphi_1 u_0 = 1$.

4. *Светимость туманности.* С помощью асимптотической формулы (20) для интенсивности излучения, выходящего из туманности, можно получить асимптотическое выражение для ее светимости L. Для этого следует воспользоваться формулой

$$L(x) = 4\pi r_0^2 \cdot 2\pi \int_0^1 I(x, \eta)\, \eta\, d\eta, \qquad (24)$$

где r_0 — геометрический радиус туманности.

Подставляя (20) в (24) и пренебрегая при интегрировании экспонентой $e^{-2x\eta}$ (вследствие отбрасывания членов порядка $1/x^2$), имеем

$$L(x) = \frac{4k}{\lambda} L_* \frac{x e^{-kx}}{1 - N e^{-2kx}} \int_0^1 \left[u(\eta) + \frac{1}{x} u^*(\eta) \right] \eta\, d\eta, \qquad (25)$$

где принято во внимание, что $x = \alpha r_0$.

Вводя в (25) выражения (12) и (13) для функций $u(\eta)$ и $u^*(\eta)$ и производя интегрирование, находим искомую асимптотическую формулу для светимости туманности

$$L(x) = L_* \frac{4 u_0 \sqrt{1 - \lambda}}{\lambda} \cdot \frac{x e^{-kx}}{1 - N e^{-2kx}} \left[1 + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{k} - \frac{\lambda \varphi_1}{2 \sqrt{1 - \lambda}} \right) \right], \qquad (26)$$

где постоянные k, u_0, N определяются формулами (16), (17) и (18).

Напомним, что при получении асимптотических формул (20) и (26) отбрасывались члены порядка L_* / x^2 и $L_* e^{-x}$. Поэтому можно считать, что формулой (26) определяется полная светимость туманности (так как она отличается от светимости, обусловленной рассеянным излучением, на величину видимой светимости звезды, равную $L_* e^{-x}$).

Для оценки погрешности асимптотической формулы (26) можно найти точные значения светимости L. Согласно [3], светимость туманности в случае расположения звезды на оптическом расстоянии y от центра туманности может быть найдена по формуле

$$L(y, x) = \frac{L_*}{\lambda} [1 - (1 - \lambda) N(y, x)], \tag{27}$$

где $N(y, x)$ — среднее число рассеяний фотона, определяемое из уравнения

$$yN(y, x) = \frac{\lambda}{2} \int_0^x [E_1(|y - y'|) - E_1(y + y')] N(y', x) y' \, dy' + y. \tag{28}$$

Уравнение (28) было решено численным способом для ряда значений x и λ, а затем для случая расположения звезды в центре туманности (т. е. при $y = 0$) были получены точные значения светимости туманности $L(0, x)$.

В табл. 1 приведены для сравнения величины L / L_*, найденные как по асимптотической формуле (26), так и с помощью формулы (27) при $y = 0$ и уравнения (28). Из таблицы видно, что даже при не очень больших значениях оптического радиуса шара x асимптотическая формула для светимости дает удовлетворительные результаты.

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ L/L_*

x	$\lambda = 0.8$		$\lambda = 0.9$		$\lambda = 0.95$		$\lambda = 1$	
	Асимптотические	Точные	Асимптотические	Точные	Асимптотические	Точные	Асимптотические	Точные
1	0.703	0.773	0.843	0.875	0.919	0.934	1	1
2	0.514	0.540	0.704	0.716	0.834	0.840	1	1
3	0.340	0.350	0.549	0.554	0.726	0.728	1	1

Заметим, что в работе [12] было получено асимптотическое выражение для функции $N(y, x)$ путем использования асимптотики для резольвентной функции $\Phi(y, x)$. Подставляя величину $N(0, x)$ в формулу (27), мы снова приходим к асимптотической формуле (26).

Авторы выражают благодарность В. Ю. Перову за вычисления, сделанные для настоящей статьи.

Ленинградский государственный
университет

THE RADIATION FROM A SPHERICAL NEBULA DUE TO A CENTRAL STAR

A. K. KOLESOV, V. V. SOBOLEV

The problem of radiation transfer in a homogeneous spherical nebula of an optical radius x has been considered on condition that the nebula is illuminated by a central star. The integro-differential equation for the intensity of the diffuse radiation exiting from the nebula has been given. This equation is used to obtain asymptotic formulae for the intensity of the radiation exiting from the nebula and for the nebula luminosity in the case of $x \gg 1$. The asymptotic expression for the reflection coefficient of the nebula derived in our previous paper [1] has been also used. Values of the luminosity calculated by means of the asymptotic formula have been compared with its exact values. This comparison has shown that the asymptotic formulae obtained in the present paper are sufficiently accurate even in the case of not too large values of x.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. К. Колесов, В. В. Соболев*, Астрофизика, 32, 277, 1990.
2. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 37, 3, 1960.
3. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 8, 197, 1972.
4. *Д. И. Нагирнер*, Уч. зап. ЛГУ, № 328, 66, 1965.
5. *Т. А. Гермогенова*, Астрофизика, 2, 251, 1966.
6. *J. Dorschner*, Astron. Nachr., 292, 225, 1971.
7. *S. Ueno, H. Kagiwada, R. Kalaba*, J. Math. Phys., 12, 1279, 1971.
8. *В. В. Соболев*, Докл. АН СССР, 273, 573, 1983.
9. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 21, 309, 1984.
10. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 22, 177, 1985.
11. *H. C. van de Hulst*, Multiple Light Scattering, v. 1, Academic Press, New-York, 1980.
12. *В. М. Лоскутов, Д. И. Нагирнер*, Расчет поля излучения при монохроматическом рассеянии. III. Средние числа рассеяний. Сравнение вычислений с асимптотической теорией, Л., 1976, 46 стр.—Деп. в ВИНИТИ 25.02.76, № 286—76.