

УДК: 521.14

ГРУШЕВИДНЫЕ ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ С ВНУТРЕННИМИ ТЕЧЕНИЯМИ. I. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Б. П. КОНДРАТЬЕВ

Поступила 27 июня 1989

Припята к печати 7 июня 1990

Поставлена и в первом по возмущению приближении решена задача о существовании двумерных грушевидных фигур равновесия с внутренним полем скоростей. Разработан прямой метод определения точек бифуркации грушевидных фигур от равновесных жидких эллиптических цилиндров с внутренними течениями. Проведено вычисление таких точек и, в частности, установлено, что в интервале отношения полуосей $1/3 < \frac{a_2}{a_1} < 0.4844544$ бифуркация от эллиптических цилиндров с любым значением величины $\bar{l} = \zeta/\Lambda$ не происходит. Для грушевидных фигур, бесконечно близких к исходным эллиптическим цилиндрам, найдены все характеристики, в том числе геометрическая форма линий тока, само поле скоростей и гравитационный потенциал. Обнаружено существование двумерного вихревого движения жидкости с однородной завихренностью в полостях неэллипсоидальной формы.

1. *Введение.* Прошло более века, как А. М. Ляпунов [1] и А. Пуанкаре [2] независимо друг от друга установили, что в окрестности определенных сфероидов Маклорена и эллипсоидов Якоби (их множество бесконечное, но все-таки счетное) существуют диковинные неэллипсоидальные фигуры равновесия*. Это блестящее открытие дало толчок развитию новых аналитических методов. К слову, возможности математического аппарата до сих пор не позволяют провести полный нелинейный анализ данной проблемы и пока остается тайной, что же представляют собой неэллипсоидальные фигуры на большинстве экзотических последовательностей вне малой окрестности от исходных эллипсоидов. Численные расчеты японских авторов [4—8] лишь отчасти прояснили ситуацию.

* В указанных работах исследователи ограничились лишь первым приближением. Безукоризненно строгое доказательство существования неэллипсоидальных фигур от носительного равновесия дано Ляпуновым [3].

Пристальное внимание исследователей привлекла уже первая точка бифуркации на последовательности эллипсоидов Якоби, где берет начало последовательность грушевидных конфигураций. Согласно гипотезе Пуанкаре и Дарвина, если деформация исходного эллипсоида уже началась, то вдоль означенной последовательности грушевидность формы будет выявляться все более отчетливо и это приведет к делению вращающейся «груши» на две отдельные жидкие массы. В дальнейшем гипотеза не подтвердилась. С нашей точки зрения, намек на иную судьбу грушевидной фигуры виден уже в том, что перешеек «груши», едва угадываемый у первого члена ряда [9], отнюдь не становится более выраженным у фигуры во втором приближении [10]. Как известно, Ляпунов в полемике с теми же Пуанкаре и Дарвином пришел к заключению о вековой неустойчивости всех грушевидных фигур данной последовательности; так что говорить о квазиравновесной эволюции вдоль нее вообще не имеет смысла. Правда, как считается в [11], при некоторых благоприятствующих обстоятельствах деление грушевидной фигуры могло бы произойти катастрофически быстро за характерное время динамической эволюции. Однако и такая возможность деления не может быть реализована, т. к. последовательность грушевидных фигур «заканчивается» членом, у которого на суженном конце появляется «носик» (особая точка, где центробежная и гравитационная силы уравновешены) [6].

Выше речь шла исключительно о неэллипсоидальных фигурах относительного равновесия, ответвляющихся от эллипсоидальных фигур без внутренних течений. Но последние — лишь частный случай среди многочисленного класса равновесных эллипсоидов с внутренним линейным полем скоростей, названных Чандрасекаром [12] эллипсоидами Римана. Вопрос, который нас интересует, заключается в следующем: существуют ли фигуры равновесия после малой деформации эллипсоидов Римана, превращающей их поверхности в поверхности третьего, четвертого и более высокого порядка? Аналитическими методами эта проблема, представляющая собой существенное расширение задачи Ляпунова и Пуанкаре, до нас не рассматривалась. В связи с этим с сожалением приходится заметить, что попытка японских авторов [13] исследовать численным методом некоторые последовательности неэллипсоидальных фигур равновесия с внутренними течениями, является, как мы доказали, совершенно ошибочной. Ошибка у этих авторов — в самом подходе к проблеме: совершенно не исследуя сложного механизма бифуркации трехосных эллипсоидов в грушевидные (в частности!) фигуры, они полагают поле скоростей в последних тем же двумерным, каким оно является исходных у S -эллипсоидов Римана. Но как мы доказываем во второй части работы, при деформации S -эллипсоидов Римана в грушевидные фигуры двумерный характер внутреннего поля скоростей неизбежно будет нарушен.

В данной работе, состоящей из двух частей, задача о грушевидных фигурах с внутренними течениями поставлена и решена аналитическим методом. Задача оказалась весьма непростой, поэтому она решалась в два этапа. На первом этапе исследуется двумерный случай, что объясняется значительным упрощением технических трудностей при изучении двумерных аналогов грушевидных фигур. Кстати, для цилиндров с внутренними течениями ранее не были известны даже нейтральные точки по отношению к третьим гармоникам. Во второй части данной работы исследуются трехмерные грушевидные конфигурации.

2. *Невозмущенный эллиптический цилиндр с внутренними течениями.* Равновесие и устойчивость этой фигуры подробно исследовалось в монографии [14]. На срезе сечения цилиндра с полуосями $a_1 \geq a_2$ семейство линий тока описывается формулой

$$S(x_1, x_2, m) = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - m^2 = 0, \quad (1)$$

где параметр $0 \leq m \leq 1$. При $m = 1$ получим граничное сечение цилиндра. Поле скоростей в собственной вращающейся системе координат цилиндра

$$u_1 = \frac{\lambda}{n} x_2, \quad u_2 = -\lambda n x_1, \quad (n = a_2/a_1), \quad (2)$$

где величина λ связана с вихрем поля скоростей $\zeta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$:

$$\lambda = -\frac{n}{1+n^2} \zeta. \quad (3)$$

Данная фигура равновесия имеет два свободных параметра n и f :

$$0 \leq n \leq 1; \quad 0 \leq |f| = \frac{|\zeta|}{\Omega} < \infty. \quad (4)$$

Квадрат угловой скорости цилиндра с внутренними течениями равен

$$\Omega^2 = \frac{\Omega_0^2}{1 + \Phi^2}, \quad \text{где } \Phi = -\frac{\lambda}{\Omega} = \frac{nf}{1+n^2}, \quad (5)$$

причем

$$\Omega_0^2 = \pi G \rho \frac{4n}{(1+n)^2} \quad (6)$$

есть квадрат угловой скорости цилиндра того же сечения, но без внутренних течений. Давление представлено формулой

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right), \quad (7)$$

в которой давление на оси симметрии цилиндра равно

$$p_0 = 2\pi G \rho^2 a_1^2 \frac{n^2}{(1+n)^2} \cdot \frac{(1-\Phi)^2}{1+\Phi^2}. \quad (8)$$

Выражение для гравитационного потенциала однородного цилиндра

$$\varphi(\vec{x}) = 2G\rho \int_S \int \ln \frac{1}{r} dS', \quad (r^2 = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2) \quad (9)$$

в итоге записывается формулой

$$\varphi(\vec{x}) = \pi G\rho (\text{const} - A_1 x_1^2 - A_2 x_2^2); \quad A_1 = \frac{2n}{1+n}, \quad A_2 = \frac{2}{1+n}. \quad (10)$$

3. *Линии тока и поле скоростей в грушевидной фигуре.* Всем точкам жидкого эллиптического цилиндра придадим бесконечно малое компланарное лагранжево смещение $\vec{\xi}(\vec{x})$; в результате элемент с координатами $\vec{x}$ переместится в новое положение $\vec{x} + \vec{\xi}(\vec{x})$. Подчеркнем, что мы имеем дело со стационарным полем вектора смещения $\vec{\xi}(\vec{x})$, т. е. координаты и другие свойства сравниваемых смещенного и несмещенного жидкого элемента мы фиксируем в один и тот же момент времени. В частности, при таком смещении должны сохраняться периоды обращения жидких частиц (нетривиальное обстоятельство, на которое обратим особое внимание). Условие малости смещения играет роль связующего звена между исходной и возмущенной конфигурациями и позволит нам воспользоваться рядами Тейлора.

По определению, деформированное семейство линий тока находится из формулы

$$\tilde{S}(x_1, x_2, m) = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - m^2 - \xi_i \frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} - \dots \quad (11)$$

Эйлерова же вариация (когда изменение величины определяется в фиксированной точке $\vec{x}$) скорости может быть представлена рядом

$$\delta \vec{u} = \Delta \vec{u} - \xi_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_i \partial x_j} - \dots, \quad (12)$$

где через

$$\Delta \vec{u} = \frac{d\vec{\xi}}{dt} = u_1 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x_2} \quad (13)$$

обозначена лагранжева вариация, выражающая изменение скорости у фиксированного элемента жидкости при возмущении.

Обратим внимание на главное: в нашем случае в силу линейности невозмущенного поля скоростей (2) вторые производные в формуле (12) исчезнут, так что эйлерова вариация скорости будет содержать только линейные по компонентам ξ_i члены; в то же время, согласно (11), выражение для возмущенных линий тока, в силу вторых степеней по x_i в (1), наряду с линейными членами ξ_i будет содержать еще и квадратичные ξ_i^2 . Это означает, что если в первом по возмущению приближении найденное поле скоростей будет удовлетворять граничному условию

$$(u_1 + \delta u_1) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x_1} + (u_2 + \delta u_2) \frac{\partial \tilde{S}'}{\partial x_2} = 0, \quad (14)$$

то уже во втором приближении (т. е. с учетом членов ξ_i^2) это граничное условие удовлетворяться не будет. Другими словами, предложенный метод не работает уже во втором по возмущениям приближении (это относится не только к гармоникам третьего, но и более высокого порядка). Сами серии неэллипсоидальных фигур здесь не обрываются, просто наш аналитический метод не позволяет идти далее первого приближения. Поэтому далее нам следует ограничиться грушевидными фигурами лишь в линейном по возмущению приближении*.

Конкретно, для получения грушевидных фигур смещение $\vec{\xi}(x)$ должно быть квадратичным по координатам и иметь вид

$$\xi_1 = S_0 + S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2; \quad \xi_2 = -2 S_1 x_1 x_2, \quad (15)$$

где бесконечно малые величины S_0 , S_1 и S_2 не зависят от координат. Смещение (15) удовлетворяет требованию $\text{div } \vec{\xi} = 0$, что выражает сохранение плотности ρ при деформации однородного цилиндра в однородную же грушевидную фигуру.

Ограничиваясь, как уже говорилось выше, первым приближением, после подстановки ξ_1 и ξ_2 из (15) в формулы (11—13) находим: линии тока

* В частном случае отсутствия внутренних течений граничное условие (14) будет удовлетворяться тождественно.

$$\begin{aligned} \bar{S}(x_1, x_2, m) = & \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - m^2 - \\ & - \frac{2x_1}{a_1^2} \left[S_0 + S_1 x_1^2 + \left(S_2 - \frac{2S_1}{n^2} \right) x_2^2 \right] = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

поправки к исходному полю скоростей (2)

$$\delta u_1 = -2\lambda n \left(S_2 - \frac{2S_1}{n^2} \right) x_1 x_2, \quad (17)$$

$$\delta u_2 = \lambda n \left[S_0 + 3S_1 x_1^2 + \left(S_2 - \frac{2S_1}{n^2} \right) x_2^2 \right].$$

Для контроля легко убедиться, что найденные характеристики удовлетворяют граничному условию (14).

Теперь легко находим вихрь внутри грушевидной фигуры

$$\zeta = -\lambda n \left[1 + \frac{1}{n^2} - 2x_1 \left\{ S_2 + \left(3 - \frac{2}{n^2} \right) S_1 \right\} \right]. \quad (18)$$

Большого кинематические соображения дать нам не могут, и далее обратимся к уравнениям гидродинамики. Именно из них следует, в частности, существенное ограничение на величину вихря (18).

4. Уравнения гидродинамики и их первый интеграл. Движение однородной идеальной гравитирующей жидкости во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}(0, 0, \Omega)$ системе отсчета описывается уравнением

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \text{grad} \left[-\frac{P}{\rho} + \varphi + \frac{\Omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right] + 2[\vec{u} \vec{\Omega}]. \quad (19)$$

Здесь p —давление, φ —гравитационный потенциал, движение стационарно. С помощью известного тождества

$$(\vec{u} \nabla) \vec{u} = \frac{1}{2} \text{grad } \vec{u}^2 - [\vec{u} \text{ rot } \vec{u}], \quad (20)$$

уравнение (19) записывается в виде

$$\text{grad} \left[-\frac{P}{\rho} + \varphi + \frac{\Omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{\vec{u}^2}{2} \right] + [\vec{u} (2\vec{\Omega} + \zeta)] = 0. \quad (21)$$

Полагая $u_3 = 0$ и считая движение жидкости двумерным, введем функцию тока $\psi(x_1, x_2)$

$$u_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}. \quad (22)$$

Тогда:

$$[u(2\vec{\Omega} + \vec{\zeta})] = -(2\Omega + \zeta) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \vec{i}_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \vec{i}_2 \right) = -(2\Omega + \zeta) \text{grad} \Psi, \quad (23)$$

где $\zeta_3 = \zeta$ и $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$. В итоге уравнение (21) приводится к виду

$$\text{grad} F = (2\Omega + \zeta) \text{grad} \Psi, \quad (24)$$

где мы обозначили

$$F = -\frac{P}{\rho} + \varphi + \frac{\Omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}. \quad (25)$$

Из уравнения (24) сразу видно, что $\text{grad} F \parallel \text{grad} \Psi$. Далее, взяв rot от обеих частей (24), приходим к равенству $[\text{grad} \Psi, \text{grad} \zeta] = 0$. Таким образом, геометрические места точек

$$F(\vec{x}) = \text{const},$$

$$\Psi(\vec{x}) = \text{const}, \quad (26)$$

$$\zeta(\vec{x}) = \text{const},$$

совпадают. Отсюда, в частности,

$$\zeta = \zeta(\Psi), \quad (27)$$

т. е. угловая скорость спинового вращения жидких частиц должна оставаться постоянной на линиях тока.

Выяснив это, вернемся к формуле (18). Легко видеть: чтобы удовлетворить требованию (27), надо положить

$$S_1 \left(3 - \frac{2}{n^2} \right) + S_2 = 0. \quad (28)$$

Мы приходим к интересному заключению: хотя внутреннее поле скоростей у грушевидной фигуры заведомо нелинейное и описывается полиномом второй степени от координат (см. формулы (17)), тем не менее завихренность этого поля от координат не зависит. Таким образом, течения с однородной завихренностью могут существовать как в эллипсоидальной, так при определенных условиях, и в неэллипсоидальной полостях. В нашем примере: сечение грушевидной фигуры — кривая третьего порядка. Более подробно об этом эффекте в нашей заметке [15].

Учитывая, что внутри исследуемого аналога грушевидной фигуры завихренность ζ не зависит от координат, из (24) получим первый интеграл

$$\frac{P}{\rho} = \gamma + \frac{\Omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} - (\zeta + 2\Omega) \Psi + \text{const.} \quad (29)$$

Соотношение (29) выполняется в любой точке грушевидной конфигурации и, конечно, описывает невозмущенный эллиптический цилиндр.

5. *Варьирование первого интеграла.* Прежде всего обратим внимание на одно обстоятельство, упрощающее последующие выкладки. Ни одна из интегральных характеристик, даваемых вириальным уравнением второго порядка [12]

$$\begin{aligned} 2T_{11} + \Omega^2 I_{11} + W_{11} + 2\Omega \int \rho u_2 x_1 dS = \\ = 2T_{22} + \Omega^2 I_{22} + W_{22} - 2\Omega \int \rho u_1 x_2 dS = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

не должна иметь отличной от нуля первой вариации, поскольку деформация исходного эллиптического цилиндра в грушевидную фигуру осуществляется квадратичным по координатам лагранжевым смещением (15). Это происходит по той простой причине, что интеграл от нечетной функции координат, взятый по площади эллипса, конечно равен нулю. Следовательно, в нашем случае

$$\delta\Omega^2 = \delta\zeta = 0, \quad (31)$$

причем второе равенство следует просто из условия сохранения вихря. Полный вихрь $\zeta^{(0)} = 2\Omega + \zeta$ в нашей задаче также сохраняется.

Варьируя теперь выражение (29), с учетом равенств (31) получаем

$$\frac{\delta P}{\rho} = \delta\varphi - u_1 \delta u_1 - u_2 \delta u_2 - \Omega(2 + f) \cdot \delta\Psi. \quad (32)$$

Полное давление внутри грушевидной конфигурации получим, прибавив к δp из (32) невозмущенное давление p из (7):

$$p_i = p + \delta p. \quad (33)$$

Полное давление должно оставаться постоянным (или равным нулю, что безразлично) на поверхности грушевидной фигуры. Удовлетворяя последнему требованию, можно получить уравнение для определения точек бифуркации. Поучительно, однако, вывести такое уравнение несколько иначе. Вспомним, что вариация давления в сжимаемой жидкости дается уравнением

$$\delta p = -\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} - \vec{\xi} \operatorname{grad} p, \quad (34)$$

где γ есть отношение удельных теплоёмкостей. При переходе к жидкости несжимаемой $\gamma \rightarrow \infty$, поэтому, хотя у нас $\operatorname{div} \vec{\xi} = 0$, предел произведения $\gamma \operatorname{div} \vec{\xi}$ остаётся неопределённым. Однако, если мы хотим получить вариацию давления на границе грушевидной фигуры, где $p=0$, то неопределённость перехода от сжимаемой жидкости к несжимаемой исчезает и

$$\delta p|_s = -\vec{\xi} \operatorname{grad} p. \quad (35)$$

Подставляя в (35) выражения из (7) и (15), находим

$$\delta p'_s = 2p_0 \frac{x_1}{a_1^2} \left[S_0 + S_1 x_1^2 + \left(S_2 - \frac{2S_1}{n^2} \right) x_2^2 \right]. \quad (36)$$

Теперь, сравнивая $\delta p/\rho$ из (36) с правой частью выражения (32), мы также сможем вывести уравнение для определения точек бифуркации.

Но для достижения этой цели требуется вычислить все вариации из правой части выражения (32). Прежде всего, с учетом (2) и (17) получим

$$u_1 \delta u_1 + u_2 \delta u_2 = -\lambda^2 x_1 \left[S_0 n^2 + 3S_1 n^2 x_1^2 + \left(S_2 - \frac{2S_1}{n^2} \right) (2 + n^2) x_2^2 \right]. \quad (37)$$

Далее, в силу

$$\delta u_1 = \delta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \delta \Psi, \quad \delta u_2 = -\delta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \delta \Psi, \quad (38)$$

после интегриации найдем и вариацию от функции тока

$$\delta \Psi = -\lambda n x_1 \left[S_0 + S_1 x_1^2 + \left(S_2 - \frac{2S_1}{n^2} \right) x_2^2 \right]. \quad (39)$$

Конечно, последний результат получается и непосредственно из (16).

6. *Вариация гравитационного потенциала.* Вычисление этой вариации требует внимания. По определению,

$$\delta \varphi = 2G \rho \delta \int \ln \frac{1}{r} dS', \quad (40)$$

где интегрирование по площади невозмущенного эллипса. Далее,

$$\begin{aligned} \delta \varphi &= 2G \rho \int \xi_i(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \frac{1}{r} dS' = -2G \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \int \xi_i(\vec{x}') \ln \frac{1}{r} dS' = \\ &= -2G \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int \xi_1(\vec{x}') \ln \frac{1}{r} dS' + \frac{\partial}{\partial x_2} \int \xi_2(\vec{x}') \ln \frac{1}{r} dS' \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения для смещений (15), получим

$$\delta\varphi = -S_0 \delta\varphi^{(0)} - S_1 \delta\varphi^{(1)} - S_2 \delta\varphi^{(2)}, \quad (41)$$

где обозначено

$$\delta\varphi^{(0)} = 2 G \rho \frac{\partial}{\partial x_1} \int \ln \frac{1}{r} dS' = -\pi G \rho \frac{4n}{1+n} x_1; \quad (42)$$

$$\delta\varphi^{(1)} = 2G \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int x_1'^2 \ln \frac{1}{r} dS' - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \int x_1' x_2' \ln \frac{1}{r} dS' \right\}; \quad (43)$$

$$\delta\varphi^{(2)} = 2G \rho \frac{\partial}{\partial x_1} \int x_2'^2 \ln \frac{1}{r} dS'. \quad (44)$$

Способом Феррерса (о нем см. [12], стр. 72) находим интегралы типа

$$D_{ij}(\vec{x}) = 2G \rho \int x_i' x_j' \ln \frac{1}{r} dS'. \quad (45)$$

Получим выражения

$$\begin{aligned} \frac{D_{11}}{\pi G \rho} = & a_1^4 (A_{11} - A_{111} x_1^2 - A_{112} x_2^2) x_1^2 + \frac{a_1^2}{4} [B_1 - 2 \cdot B_{11} x_1^2 + B_{12} x_2^2] + \\ & + B_{111} x_1^4 + 2B_{112} x_1^2 x_2^2 + B_{122} x_2^4; \end{aligned} \quad (46)$$

$$\frac{D_{12}}{\pi G \rho} = a_1^2 a_2^2 (A_{12} - A_{112} x_1^2 - A_{122} x_2^2) x_1 x_2; \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_{22}}{\pi G \rho} = & a_2^4 (A_{22} - A_{122} x_1^2 - A_{222} x_2^2) x_2^2 + \frac{a_2^2}{4} [B_2 - 2 (B_{12} x_1^2 + B_{22} x_2^2) + \\ & + B_{112} x_1^4 + 2B_{122} x_1^2 x_2^2 + B_{222} x_2^4]. \end{aligned} \quad (48)$$

Употребляющиеся здесь интегральные символы (где обозначено $\Delta^2 = (a_1^2 + u) \cdot (a_2^2 + u)$).

$$\begin{aligned} A_{ijk} = & a_1 a_2 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta (a_i^2 + u) (a_j^2 + u) (a_k^2 + u)}; \\ B_{ijk} = & a_1 a_2 \int_0^\infty \frac{u \cdot du}{\Delta (a_i^2 + u) (a_j^2 + u) (a_k^2 + u)} \end{aligned} \quad (49)$$

оказываются равными (выпишем только те, которые понадобятся далее)

$$a_1^2 A_{11} = \frac{2n(2+n)}{3(1+n)^2}; \quad a_1^2 A_{12} = \frac{2}{(1+n)^2}; \quad a_2^2 A_{22} = \frac{2(1+2n)}{3(1+n)^2}. \quad (50)$$

$$B_{11} = \frac{2n(1+2n)}{3(1+n)^2}; B_{12} = \frac{2n}{(1+n)^2}; B_{22} = \frac{2(2+n)}{3(1+n)^2}. \quad (51)$$

$$a_1^4 A_{111} = \frac{2n}{15(1+n)^3} (3n^2 + 9n + 8); a_1^4 A_{112} = \frac{2(3+n)}{3(1+n)^3};$$

$$a_1^2 a_2^2 A_{122} = \frac{2(1+3n)}{3(1+n)^3}. \quad (52)$$

$$a_1^2 B_{111} = \frac{4n}{15(1+n)^3} (n^2 + 3n + 1); a_1^2 B_{112} = \frac{4n}{3(1+n)^3};$$

$$a_1^2 B_{122} = \frac{4}{3(1+n)^3}. \quad (53)$$

В итоге, выражение для вариации потенциала будет равно

$$\frac{\delta\varphi}{\pi G\rho} = x_1 \left\{ \frac{4n}{1+n} S_0 + S_1 a_1^2 \left[\frac{4n}{(1+n)^3} \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{12n_3}{(1+n)^3} \frac{x_2^2}{a_2^2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{2n}{(1+n)^3} (1-2n) \right] +$$

$$\left. + S_2 a_2^2 \left[- \frac{4n}{3(1+n)^3} \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{4n^3}{(1+n)^3} \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{2n}{(1+n)^3} \right] \right\}. \quad (54)$$

Легко проверить, что $\delta\varphi$ из (54) удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \delta\varphi = 0 \quad (55)$$

7. Уравнение для определения точек бифуркации. Подставляя найденные первые вариации из (36), (37), (39) и (54) в уравнение (32), после преобразований приходим к такому уравнению

$$x_1 \left(Q_1 \frac{x_1^2}{a_1^2} + Q_2 \frac{x_2^2}{a_2^2} + Q_0 \right) = 0, \quad (56)$$

где обозначено

$$Q_1 = \left[\frac{2p_0}{\rho a_1^2} - \frac{4n}{(1+n)^3} - 3\lambda^2 n^3 - 2\lambda n(2+f) \right] S_1 a_1^2 + \frac{4n}{3(1+n)^3} S_2 a_2^2; \quad (57)$$

$$Q_2 = \left[- \frac{4p_0}{\rho a_1^2} + \frac{12n^3}{(1+n)^3} + 2\lambda^2 (2+n^2) + 2\lambda n(2+f) \right] S_1 a_1^2 +$$

$$+ \left[\frac{2p_0}{\rho a_1^2} - \frac{4n^3}{(1+n)^3} - \lambda^2 (2+n^2) - 2\lambda n(2+f) \right] S_2 a_2^2; \quad (58)$$

$$Q_0 = \left[\frac{2p_0}{\rho a_1^2} - \frac{4n}{1+n} - n^2 \lambda^2 - \Omega \lambda n (2+f) \right] S_0 + \\ + \frac{2n(1-2n)}{(1+n)^2} S_1 a_1^2 - \frac{2n}{(1+n)^2} S_2 a_2^2. \quad (59)$$

Так как в нашем случае уравнение (32) записано на границе конфигурации, достаточно теперь потребовать, чтобы уравнение

$$Q_1 \frac{x_1^2}{a_1^2} + Q_2 \frac{x_2^2}{a_2^2} + Q_0 = 0 \quad (60)$$

совпадало с уравнением невозмущенного эллипса (1) при $m = 1$; отсюда сразу следует два уравнения для трех неизвестных S_0 , S^1 и S_2 :

$$Q_1 + Q_0 = Q_2 + Q_0 = 0. \quad (61)$$

Третье уравнение для неизвестных дано в (28). Итак, мы имеем систему трех однородных алгебраических уравнений для трех неизвестных:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & (3n^2 - 2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 a_1^2 \\ S_2 a_2^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (62)$$

Чтобы существовало ненулевое решение этой системы, потребуем равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & (3n^2 - 2) & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (63)$$

Коэффициенты

$$d_{21} = d_{11} = \frac{2p_0}{\rho a_1^2} - \frac{4n}{1+n} - n^2 \lambda^2 - \Omega \lambda n (2+f); \\ d_{12} = \frac{2p_0}{\rho a_1^2} - \frac{4n}{(1+n)^3} - 3n^2 \lambda^2 - \Omega \lambda n (2+f) + \frac{2n}{(1+n)^2} (1-2n); \\ d_{13} = - \frac{2n}{3(1+n)^3} (3n+1); \\ d_{23} = \frac{2p_0}{\rho a_1^2} - \frac{4n^3}{(1+n)^3} - \lambda^2 (2+n^2) - \Omega \lambda n (2+f) - \frac{2n}{(1+n)^2}; \\ p_{22} = - \frac{4p_0}{\rho a_1^2} + \frac{12n^3}{(1+n)^3} + 2\lambda^2 (2+n^2) + 2\Omega \lambda n (2+f) + \frac{2n}{(1+n)^2} (1-2n), \quad (64)$$

с помощью известных нам из разд. 2 формул будут равны

$$\begin{aligned}
 d_{11} = d_{21} &= -\frac{4n}{(1+n)^2(1+\Phi^2)}; \quad d_{23} = -\frac{2n}{(1+n)^3(1+\Phi^2)}[\Phi^2(n+3)-n+1]; \\
 d_{12} &= -\frac{2n}{(1+n)^3(1+\Phi^2)}[\Phi^2(4n^3+4n^2-3n-1)-n+1]; \\
 d_{22} &= \frac{2n}{(1+n)^3(1+\Phi^2)}[\Phi^2(5-n)-5n+1]; \\
 d_{13} &= -\frac{2n}{3(1+n)^3}(3n+1).
 \end{aligned} \tag{65}$$

Подставляя d_{ij} из (65) в (63) и раскрывая определитель, получим в итоге искомое уравнение

$$\frac{4n}{3 \cdot (1+n)^3(1+\Phi^2)} \{2\Phi^2(3n^3+9n^2-3n-1) + (1-3n)(1+3n^2)\} = 0. \tag{66}$$

С учетом вида Φ из (5), последнее уравнение записывается в таком виде

$$f^2 = \frac{(3n-1)(3n^2+1)(1+n^2)^2}{2n^2(3n^3+9n^2-3n-1)}. \tag{67}$$

8. *Результаты расчетов для точек бифуркации.* Из уравнения (67) видно, что знак величины f не влияет на положение точек бифуркации, т. е. положение последних не зависит от направления внутренних течений в цилиндре. Неожиданный результат!

Из уравнения (67) непосредственно следует, что бифуркация грушевидной фигуры от эллиптического цилиндра относительного равновесия ($f=0$) осуществляется при $n_1 = 1/3^*$. В противоположном случае, когда цилиндр не вращается (у такой фигуры $|f| = \infty$) и поддерживает свою форму за счет одних только внутренних течений, точка бифуркации находится из уравнения

$$3n^3 + 9n^2 - 3n - 1 = 0. \tag{68}$$

Решая его, находим $n_2 = 0.4844544$. И так как $n_1 < n_2$, то цилиндр относительного равновесия более устойчив по отношению к превращению в грушевидную фигуру в сравнении с цилиндром, имеющим одни только внутренние течения. Во второй части работы мы убедимся, что та же ситуация и у трехмерных эллипсоидов.

* Этот частный результат ранее получил Джинс [16].

В табл. 1 приведены некоторые из решений уравнения (67). Зависимость $|f|$ от n показана, кроме того, на рис. 1. Существо дела заключается в том, что пока

Таблица 1

СВОЙСТВА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ
С ВНУТРЕННИМИ ТЕЧЕНИЯМИ: НЕЙТРАЛЬНЫЕ
ТОЧКИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ТРЕТЬИМ
ГАРМОНИКАМ, КВАДРАТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ
И МОДУЛЬ ВИХРЯ

n	$ f $	$\frac{\Omega^2}{\pi G \rho}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi G \rho}}$
0.01	68.668	0.0266	11.209
0.05	12.357	0.1315	4.4807
0.10	5.5198	0.2546	2.7344
0.15	3.3203	0.3667	2.0106
0.20	2.2318	0.4691	1.5287
0.25	1.5332	0.5663	1.1538
0.30	0.9115	0.6680	0.7450
1/3	0	0.7500	0
0.4844544	∞	0	0.8660
0.50	4.6771	0.1975	2.0787
0.55	2.4662	0.4393	1.6346
0.60	1.9821	0.5316	1.4447
0.70	1.6222	0.6129	1.2700
0.80	1.4840	0.6478	1.1551
0.90	1.4287	0.6628	1.1631
0.99	1.4143	0.6656	1.1547

$$0 \leq f^2 < 2 \quad (69)$$

— существует лишь один бифуркационный цилиндр; если же

$$2 \leq f^2 < \infty \quad (70)$$

— для каждого $|f|$ есть два бифуркационных цилиндра.

9. Величины, характеризующие грушевидную фигуру. Согласно уравнению (67), для каждого f существует один или два бифуркационных эллиптических цилиндра. Грушевидная фигура имеет то же f , что и исходный цилиндр. В дальнейшем целесообразно исключить величину f с помощью уравнения (67) из выражений, характеризующих грушевидную фигуру.

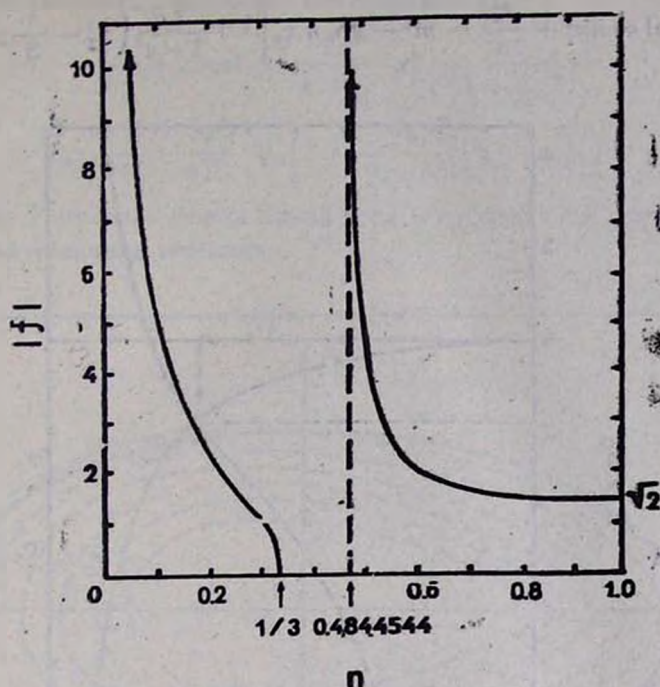


Рис. 1. Изменение $|f|$ с n у бифуркационных эллиптических цилиндров, нейтральных по отношению к третьим гармоникам. График состоит из двух ветвей. Точки $n = 0$ и $n_2 = 0.4844544$ — особые, интервал $1/3 < n < 0.4844544$ является запретным для нейтральных точек.

Для удобства примем

$$a_1 a_2 = 1, \text{ т. е. } a_1^2 = 1/n, a_2^2 = n. \quad (71)$$

Из уравнений (63) найдем отношения

$$\frac{S_1}{S_0} = -\frac{4n}{3(1-n^2)}; \quad \frac{S_2}{S_0} = -\frac{4(2-3n^2)}{3n(1-n^2)}. \quad (72)$$

Графики этих величин показаны на рис. 2. С учетом этого, выражение для лагранжева смещения, деформирующего цилиндр в грушевидную фигуру, будет иметь вид

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = S_0 \left\{ \left[1 - \frac{4n}{3(1-n^2)} x_1^2 - \frac{4(2-3n^2)}{3n(1-n^2)} x_2^2 \right] \vec{i}_1 + \frac{8n}{3(1-n^2)} x_1 x_2 \vec{i}_2 \right\}. \quad (73)$$

Уравнение для линий тока принимает вид

$$\tilde{S}(\vec{x}, m, n) = n x_1^2 + \frac{x_2^2}{n} - m^2 - 2S_0 n x_1 \left[1 + \frac{4n}{1-n^2} \left(x_2^2 - \frac{1}{3} x_1^2 \right) \right] = 0. \quad (74)$$

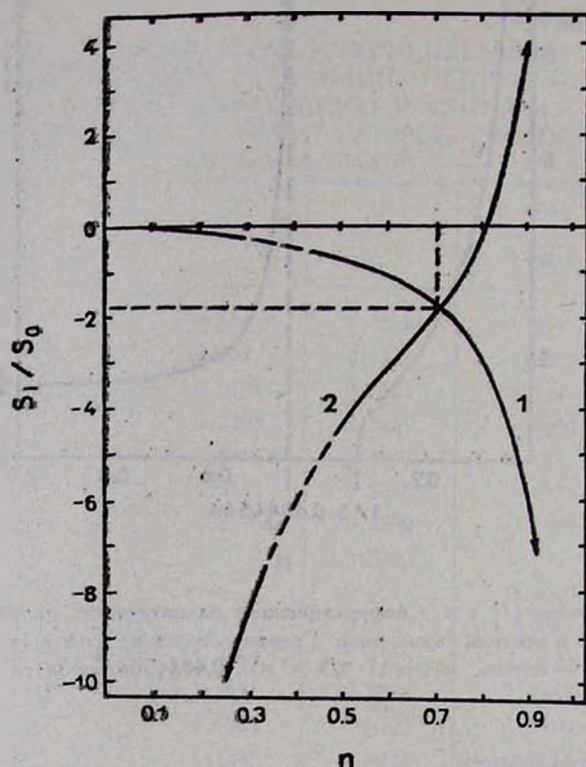


Рис. 2. Зависимость от n отношений бесконечно малых величин S_1/S_0 (цифра 1) и S_2/S_0 (цифра 2), характеризующих лагранжево смещение.

Кроме того, поле скоростей описывается формулами

$$u_1 = \frac{\lambda}{n} x_2 \left(1 - \frac{8n^2}{1-n^2} S_0 n x_1 \right); \quad (75)$$

$$u_2 = -\lambda n \left\{ x_1 - S_0 \left[1 + \frac{4n}{1-n^2} \left(x_2^2 - x_1^2 \right) \right] \right\},$$

причем λ находится по формулам разд. 2. Давление внутри фигуры суть

$$p_z(\vec{x}) = p_0 \left\{ 1 - n x_1^2 - \frac{x_2^2}{n} + 2S_0 n x_1 \left[1 + \frac{4n}{1-n^2} \left(x_2^2 - \frac{x_1^2}{3} \right) \right] \right\}, \quad (76)$$

где ρ_0 из (8). Наконец, выражение для потенциала

$$\frac{\varphi}{\pi G \rho} = \text{const} - \frac{2n}{1+n} x_1^2 - \frac{2}{1+n} x_2^2 + S_0 \frac{4n(1+3n^2)}{3(1+n)^2} x_1 \left[1 + \frac{4n}{1-n^2} \left(x_2^2 - \frac{x_1^2}{3} \right) \right] \quad (77)$$

На рис. 3 показана форма линий тока у грушевидной фигуры с одними только внутренними течениями.

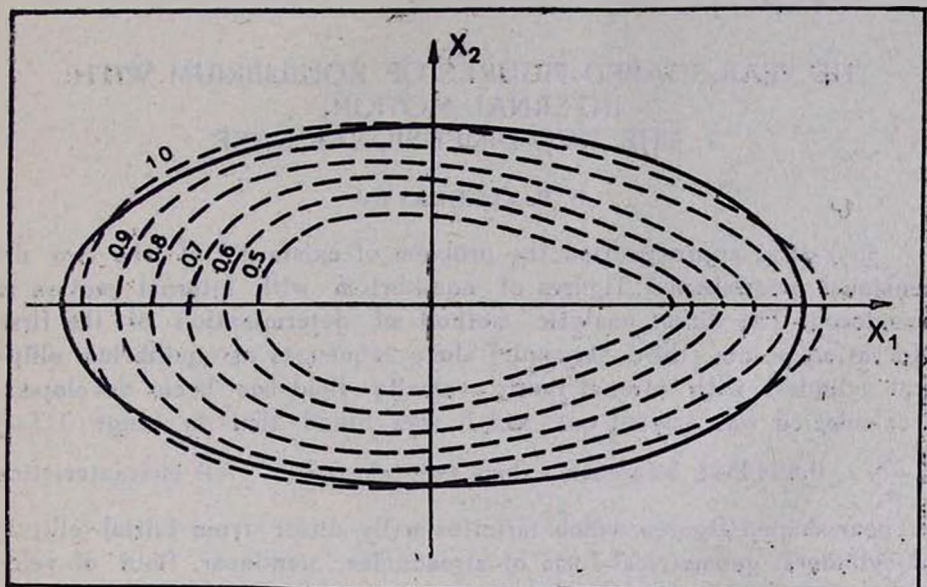


Рис. 3. Геометрическая форма линий тока (штриховая кривая) у грушевидной фигуры, поддерживающей равновесие за счет одной гравитации и внутренних течений (вращение отсутствует). Цифрами отмечено значение параметра m из формулы (1). Линии тока при $m < 0.5$ изображать на данном рисунке не имеет смысла, так как вместо бесконечно малого значения величины S_0 для наглядности было взято $S_0 = 0.1$. Сплошной кривой показано сечение невозмущенного эллиптического цилиндра.

10. Заключение. Как мы убедились, от равновесных гравитирующих цилиндров с внутренними течениями действительно ответвляются последовательности грушевидных фигур. Наш метод с исчерпывающей полнотой позволил исследовать такие грушевидные фигуры лишь вблизи исходных цилиндров, однако уже здесь были обнаружены любопытные свойства первых. Ярким и весьма характерным — нелинейность по координатам при однородной завихренности — следует считать свойство внутреннего поля

скоростей в грушевидных фигурах. Нет сомнения в том, что оно будет иметь место и вдоль всей последовательности грушевидных (и не только их, правильнее было бы говорить о всем классе двумерных конфигураций!) фигур. Однако в трехмерном случае, как мы увидим из второй части работы, ситуация с полем скоростей гораздо сложнее.

Заметим, наконец, что далее первого приближения серии неэллипсоидальных фигур могут быть прослежены численными, например, методами. Однако это — тема уже отдельной статьи.

Педагогический институт,
г. Глазов

THE PEAR-SHAPED FIGURES OF EQUILIBRIUM WITH INTERNAL MOTION.

1. THE TWO-DIMENSIONAL CASE

В. П. KONDRAT'EV

In a first approximation the problem of existence of the two dimensional pear-shaped figures of equilibrium with internal motion is considered. The direct analytic method of determination of the first bifurcation points (third harmonic) along sequences of equilibrium elliptical cylinders with internal linear velocity field has been developed. A calculation was carried out and it was found that in range $1/3 < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 0.4844544$ bifurcation does not take place. All characteristics

of pear-shaped figures which infinitesimally differ from initial elliptical cylinders: geometrical form of streamlines, nonlinear field of velocity, pressure and gravitational potential are determined. In particular, a possibility of plane fluid motion with uniform vorticity in nonellipsoidal cavities is revealed.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов, Собр. соч., Изд-во АН СССР, М., 1959, т. 3, с. 5—113.
2. H. Poincaré, Acta Mathematica, t. 7, 1885.
3. А. М. Ляпунов, Собр. соч., Изд-во АН СССР, М., 1959, т. 4, с. 5—644.
4. Y. Eriguchi, D. Sugimoto, Prog. Theor. Phys., 65, 1870, 1981.
5. Y. Eriguchi, I. Hachisu, Prog. Theor. Phys., 67, 844, 1982.
6. Y. Eriguchi, I. Hachisu, D. Sugimoto, Prog. Theor. Phys., 67, 1068, 1982.
7. I. Hachisu, Y. Eriguchi, M. N. R. A. S., 204, № 2, 583, 1983.
8. I. Hachisu, Y. Eriguchi, Publ. Astron. Soc. Jpn., 36, 239, 1984.
9. G. H. Darwin, Scientific papers, Cambridge: at the Univer. press, v. 3, p. 314.
10. G. H. Darwin, ibid., p. 384.

11. Ж.-Л. Тассуль, Теория вращающихся звезд, Мир, М., 1982, с. 271.
12. С. Чандрасекар, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
13. Y. Eriguchi, I. Hachisu, *Astron. Astrophys.* 142, 256, 1985.
14. Б. П. Кондратьев, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Наука, М., 1989, гл. 5.
15. Б. П. Кондратьев, *Астрофизика*, 32, 183, 1990.
16. J. H. Jeans. *Problems of cosmogony and stellar dynamics*, Cambridge: at the University, Press, 1919, p. 112.