ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ p–ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Акопян[1], Г. Шахголян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 5, 2001

Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ и L^∞-функции $\mu \geq 0$ с компактным носителем ($\subset \overline{\Omega}$), рассматривается следующая переопределённая краевая задача со свободной границей :

$$\begin{cases} div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - D_t u = -\mu(x,t) & \text{в } \Omega, \\ u = 0 \text{ и } -\partial u/\partial\nu = 1 & \text{на } \partial\Omega \cap \{t > 0\}, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

где $1 < p < \infty$, $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, а ν – пространственный внешний единичный нормальный вектор к $\partial\Omega$. При некоторых геометрических условиях доказывается, что эта задача имеет не более одного решения (u,Ω).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи. Рассмотрим переопределённую краевую задачу p–параболического типа со свободной границей, связанную с прицессом сгорания при нелинейном энергетическом законе. В настоящей статье получены некоторые результаты, касающиеся единственности решений, вытекающие из геометрических свойств решений данной задачи. Полагая $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, рассмотрим следующую задачу : для заданной ограниченной функции $\mu \geq 0$ и $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ найти и описать свойства области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ и функции

$$u \in C(0,T; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^p(0,T; W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$$

(определения этих пространств см. [4] ; стр. 2 и 7), удовлетворяющие следующей

[1]Работа А. Акопяна поддержана шведским фондом Горан Густафсон.

переопределённой краевой задаче

$$\begin{cases} \Delta_p u - D_t u = -\mu(x,t) & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega \cap \{t>0\}, \\ -\partial u/\partial\nu = 1 & \text{на } \partial\Omega \cap \{t>0\}, \\ u(x,0) = f(x), \\ supp\mu \subset \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad 1<p<\infty$$

является p-Лапласианом, а ν – пространственный внешний единичный нормальный вектор к $\partial\Omega$ (полагаем, что $\partial\Omega$ является C^1 по пространственному направлению). Решение понимается в слабом смысле : для любого $T>0$ и любой функции

$$v \in W^{1,2}(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n))$$

(вновь см. [4], стр. 2 и 7) требуем

$$\iint\limits_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v - uD_t v)\,dxdt - \int_{\Omega\cap\{t=0\}} fv\,dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega\cap\{\mathbb{R}^n\times(0,T)\}} |\nabla u|^{p-2} v\,d\sigma(\cos\alpha) + \iint\limits_{\Omega} \mu v\,dx\,dt,$$

где $d\sigma$ – элемент площади на $\partial\Omega\cap\{\mathbb{R}^n\times(0,T)\}$, а α – угол, образованный внешней нормалью $\nu(x,t)$ в точке $(x,t)\in\partial\Omega\cap\{\mathbb{R}^n\times(0,T)\}$ и гиперплоскостью $\mathbb{R}^n\times\{t\}$. Вопросы существования, единственности и регулярности решений подобных задач изучались многими авторами. В частности, при $p=2$, $\mu\equiv 0$ и $u\geq 0$, существование слабых решений доказано в [3]. Для уравнения

$$\Delta u + \sum_i a_i u_{x_i} - u_t = 0$$

в [8] были получены некоторые результаты единственности. Аналогичные результаты известны в эллиптическом случае : в работах [5] и [9] получены результаты, касающиеся существования решений, зависящих от μ, в случае, когда оператор является оператором Лапласа. Некоторые результаты единственности получены также в [6] и [7] для p–лапласиана ($1<p<\infty$).

Мы используем некоторые методы из вышеупомянутых статей, видоизменённые для целей настоящей статьи : 1) Принцип строгого сравнения и 2) Лемма Хопфа о граничной точке. По поводу 1) отметим, что принцип строгого сравнения не имеет места для сингулярных/вырожденных операторов, таких как p-параболический (см., например, [2]). Тем не менее, в нашей ситуации, используя условие на градиент решения в (1.1), получаем, что наше уравнение является невырожденным вблизи границы в локальном смысле. Следовательно, выполняется принцип строгого сравнения.

Мы не рассматриваем вопросы существования или регулярности решений задачи (1.1), а исследуем только вопрос о единственности решений, при условии их существования, налагая геометрические условия, такие как выпуклость и монотонность (по времени).

§2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введём следующие обозначения. Положим $\Omega_i(\tau) = \Omega_i \cap \{t = \tau\}$ и всюду предполагаем, что $\Omega_1(\tau) \cap \Omega_2(\tau)$ (для $\tau > 0$) выпукло, $\partial\Omega$ является C^1 в пространственном направлении. Для заданной точки

$$(x^1, t^1) \in \Omega_i(t^1) \cap \partial\Omega_j(t^1), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2,$$

обозначим через $\Pi(x^1, t^1)$ опорную плоскость к $\Omega_1(t^1) \cap \Omega_2(t^1)$ в точке (x^1, t^1). Предположим также, что $\Pi^+(x^1, t^1)$ – n-мерное полупространство в $\mathbb{R}^{n+1}$, непересекающее множество $\Omega_1(t^1) \cap \Omega_2(t^1)$, граница которой есть $\Pi(x^1, t^1)$. Каждое Ω_i предполагается неубывающей по t, т.е. $\Omega_i(t_1) \subseteq \Omega_i(t_2)$, при $t_1 \leq t_2$.

Для ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через Q_T цилиндрическую область $Q \times (0, T)$, для $T > 0$. Параболическую границу $\partial_p\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ определим как множество всех точек $(x, t) \in \partial\Omega$ таких, что для всех $\varepsilon > 0$ цилиндр $B(x, \varepsilon) \times (-\varepsilon + t, t)$ не содержит точек из Ω.

Теорема. Пусть $\mu \geq 0$ – ограниченная функция с компактным носителем. Предположим, что

$$u_j \in C\left(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)\right) \cap L^p\left(0, T; W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\right), \quad 1 < p < \infty, \quad j = 1, 2$$

суть решения задачи (1.1), $\overline{\Omega}_j(\tau)$ ограничены для всех $\tau \geq 0$, и каждое Ω_j – неубывающая по t. Тогда

a) если $\Omega_1(\tau)$ выпукла для всех $\tau > 0$, то $\Omega_2 \subset \Omega_1$,

b) если $\Omega_1(\tau) \cap \Omega_2(\tau)$ выпукла для всех $\tau > 0$, то $\Omega_1 \equiv \Omega_2$,

c) если и $\Omega_1(\tau)$ и $\Omega_2(\tau)$ выпуклы для всех $\tau > 0$, то $\Omega_1 \equiv \Omega_2$ и $u_1 \equiv u_2$.

В [4] показано, что из условия (1.1) вытекает, что $u_j(x, t)$ принадлежит $C_x^{1,\alpha} \cap C_t^{0,\alpha}(\Omega_j)$ (при некотором $0 < \alpha < 1$, $j = 1, 2$).

Лемма 1. Пусть $Q_T \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ – цилиндрическая область и

$$v_1, v_2 \in C(0,T; L^2(Q'_T)) \cap L^p(0,T; W^{1,p}(Q'_T)), \quad \overline{Q}_T \subset Q'_T,$$

причём

$$\Delta_p v_1 - D_t v_1 \leq \Delta_p v_2 - D_t v_2 \quad \text{в } Q_T. \tag{2.1}$$

Тогда имеют место следующие принципы :

a) **Принцип слабого сравнения.** Если $v_1 \geq v_2$ на $\partial_p Q_T$, то $v_1 \geq v_2$ в Q_T.

b) **Принцип сравнения Хопфа.** Предположим, что $v_1 > v_2$ в Q_T, $v_1(x_0,t_0) = v_2(x_0,t_0)$ для некоторой точки $(x_0,t_0) \in \partial_p Q_T$, и $|\nabla v_2| > 0$ в Q_T. Тогда имеем

$$\frac{\partial v_1}{\partial \nu}(x_0,t_0) < \frac{\partial v_2}{\partial \nu}(x_0,t_0),$$

где ν – единичный внешний нормальный вектор к ∂Q_T в точке (x_0,t_0).

c) **Принцип строгого сравнения.** Если $v_1 \geq v_2$, $v_1 \not\equiv v_2$ на $\partial_p Q_T$ и $|\nabla v_2| > 0$ в Q_T, то $v_1 > v_2$ в Q_T.

Доказательство аналогично эллиптическому случаю (см. [10], Лемма 3.2, Предложения 3.3.1, 3.3.2). Принцип слабого сравнения рассматривался в [4], стр. 160, Лемма 3.1, а принципы Хопфа и строгого сравнения – в [1], Леммы 2.1 и 1.1.

Замечание. В b) и c) условие $|\nabla v_2| > 0$ существенно. При использовании этих принципов мы можем рассматривать малую подобласть с (x_0,t_0) на её границе. Так как градиент любого решения задачи (1.1) аппроксимирует его около границы непрерывно, требуемое условие выполняется.

Лемма 2. Пусть (u,Ω) является решением задачи (1.1). Рассмотрим гиперплоскость H, ортогональную к $\mathbb{R}^n$, и отсекающую часть Ω' из Ω такую, что $\overline{\Omega'} \cap supp(\mu) = \emptyset$, $\overline{\Omega'} \cap \{t=0\} = \emptyset$. Тогда

$$d(\tau) := \sup_{x \in \partial\Omega'(\tau)} dist(x,H) < \sup_{H \cap \{t \leq \tau\}} u. \tag{2.2}$$

Кроме того, если точка $(x^0,t^0) \in H$ такая, что $u(x^0,t^0) = \sup_{H \cap \{t \leq \tau\}} u$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x^0,t^0) < -1, \tag{2.3}$$

где l – единичный нормальный вектор к H, направленный вовнутрь области Ω'.

Доказательство : В силу инвариантности относительно вращений вокруг оси t и параллельных переносов, мы можем предположить, что $H = \{x_1 = 0\}$, и $\Omega' = \{x_1 > 0\} \cap \Omega(\tau)$. Пусть теперь $(z,\tau) \in \partial\Omega'(\tau)$ такова, что $d(\tau) = dist(z, H)$ и заметим, что из граничного условия задачи (1.1) следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(z,\tau) = -1$. Тогда определим

$$h(x,t) = s(d(\tau) - x_1), \quad s = \frac{\sup_{H\cap\{t\le\tau\}} u}{d(\tau)}.$$

Очевидно, что

$$\Delta_p h - D_t h = \Delta_p u - D_t u = 0 \quad \text{в } \Omega', \quad u(z,\tau) = h(z,\tau) = 0. \tag{2.4}$$

Так как $h = \sup_{H\cap\{t\le\tau\}} u$ на H, $h \ge 0$ и $u = 0$ на $\partial\Omega$, то имеем

$$h \ge u \quad \text{на} \quad \partial\Omega' \cap \{t \le \tau\}. \tag{2.5}$$

Теперь используя Лемму 1 a) – c), получаем

$$-s = \frac{\partial h}{\partial x_1}(z,\tau) < \frac{\partial u}{\partial x_1}(z,\tau) = -1,$$

т.е.

$$\frac{\sup_{H\cap\{t\le\tau\}} u}{d(\tau)} = s > 1, \tag{2.6}$$

что доказывает (2.2). Далее, используя (2.4) - (2.6) и $u(x^0,t^0) = h(x^0,t^0)$ (здесь $x^0 = 0$, $t^0 \le \tau$), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x^0,t^0) \le \frac{\partial h}{\partial l}(x^0,t^0) = \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^0,t^0) = -s < -1,$$

т.е (2.3).

Лемма 3. Пусть u – решение задачи (1.1), продолженное на всё $\mathbb{R}^{n+1}_+$ приписыванием значения нуль в $\mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus \Omega$. Тогда

$$\Delta_p(u - c) - D_t(u - c) \ge -\mu,$$

для любой постоянной c.

Доказательство : Выберем малую окрестность N границы $\partial\Omega$ такую, что $\operatorname{supp}(\mu) \cap N = \emptyset$, и определим

$$v = \begin{cases} \max(u,0) & \text{в } N \cap \Omega, \\ 0 & \text{в } \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Тогда v является p-субкалорической функцией в N (см. [4], стр. 18). Следовательно, $v - c$ является p-субкалорической функцией в N, что и требовалось доказать.

Доказательство Теоремы : Доказательства утверждений (a) и (b) аналогичны, следовательно докажем только утверждение (a), (c) следует из (a) или (b). Предположим, что $\Omega_2 \setminus \Omega_1 \neq \emptyset$. Продолжим u_j на $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_j$, приписывая значения нуль ($j = 1, 2$), и пусть точка $(x^0, t^0) \in \partial\Omega_1$ такая, что $u_2(x^0, t^0) = \sup_{\partial\Omega_1} u_2$. По принципу слабого максимума, применённого для u_2 в $\Omega_2 \setminus \Omega_1$, получим $u_2(x^0, t^0) > 0$. Теперь обозначим $w(x, t) = u_2(x, t) - u_2(x^0, t^0)$ в $\overline{\Omega}_1$. Тогда по Лемме 3 имеем $\Delta_p w - D_t w \geq -\mu$. Следовательно

$$\Delta_p w - D_t w \geq \Delta_p u_1 - D_t u_1 \text{ в } \Omega_1, \quad w \leq u_1 \text{ на } \partial\Omega_1 \cap \{t > 0\},$$

и

$$w(x^0, t^0) = u_1(x^0, t^0) = 0.$$

По Лемме 1

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu}(x^0, t^0) = \frac{\partial w}{\partial \nu}(x^0, t^0) > \frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x^0, t^0) = -1,$$

т.е.

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu}(x^0, t^0) > -1. \tag{2.7}$$

Теперь используя выпуклость, свойство неубывания $\Omega_1(t)$ и что $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$, мы можем взять опорную плоскость $\Pi(x^0, t^0)$ такую, что

$$\Omega_1(t_0) \cap \Omega_2(t_0) \subset \Pi^+(x^0, t^0),$$

т.е. предположения Леммы 2 выполнены (при $t \leq t^0$). Но тогда (2.7) противоречит (2.3). Доказательство Теоремы завершено.

ABSTRACT. Given a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ and an L^∞-function $\mu \geq 0$ with compact support ($\subset \overline{\Omega}$), the following overdetermined (free) boundary value problem is considered :

$$\begin{cases} div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - D_t u = -\mu(x, t) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 \text{ and } -\partial u/\partial \nu = 1 & \text{on } \partial\Omega \cap \{t > 0\}, \\ u(x, 0) = f(x), & \end{cases}$$

where $1 < p < \infty$, $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ and ν is the spatial outward unit normal vector on $\partial\Omega$. Under certain geometrical conditions, the above problem has at most one solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Alessandrini, N. Garofalo, "Symmetry for degenerate parabolic equations", Arch. for Rational Mechanics and Analysis, vol. 108, no 2, pp. 161 – 174, 1989.
2. Г. Баренблатт, "О полуподобных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде", Акад. Наук СССР, Прикл. Матем. Мех., том 16, стр. 679 – 698, 1952.
3. L. Caffarelli, L. Vazquez, "A free-boundary problem for the heat equation arising in flame propagation", Trans. American Math. Society, vol. 347, no 2, pp. 411 – 441. 1995.
4. E. DiBenedetto, Degenerate Parabolic Equations, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1993.
5. B. Gustafsson, H. Shahgholian, "Existence and geometric properties of solutions of a free boundary problem in potential theory", J. Reine Angew. Math., vol. 473, pp. 137 – 179, 1996.
6. H. Hosseinzadeh, H. Shahgholian, "Two related minimum problems with free boundaries governed by the p-Laplace operator", J. Sci. Univ. Tehran 126, vol. 3, no 2, pp. 123 – 137, 1998.
7. H. Hosseinzadeh, H. Shahgholian, "Some qualitative aspects of a free boundary problem for the p-Laplace operator", Annales Academiae Scientiarum, vol. 24, pp. 109 – 121, 1999.
8. C. Lederman, J. Vazquez, N. Wolanski, "Uniqueness of solution to a free boundary problem from combustion", Trans. American Math. Society, vol. 353, no 2, pp. 655 – 692, 2001.
9. H. Shahgholian, "Existence of quadrature surfaces for positive measures with finite support", Potential Anal., vol. 3, pp. 245 – 255, 1994.
10. P. Tolksdorf, "On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points", Comm. Partial Differential Equations, vol. 8(7), pp. 773 – 817, 1983.

21 сентября 2001

Ереванский государственный университет
Армения
E–mail : hakobyan@arminco.com,

Королевский институт технологий
Стокгольм, Швеция
E–mail : henriks@math.kth.se