ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 4, 1989 Математика

УДК 517. 948. 32

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ

ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ В ЛИПШИЦЕВЫХ КЛАССАХ

В настоящей работе исследуются операторы свертки в классах функций, липшицевых порядка $\mu \in (0, 1]$ в L_p-норме, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, причем рассматривается как случай локальной на R^n (класс $H_{\mu, p}(R^n)$), так и глобальной на $\dot{R}^n$ (класс $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$) липшицевости, где $\dot{R}^n$ — пополнение R^n бесконечно удаленной точкой (по поводу пространств $H_{\mu, p}(R^n)$ см., например, [1]—[2]). Основное внимание уделяется случаю $p < \infty$. В n^{0}1 приводятся различные свойства рассматриваемых пространств (вложение, пополнение $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$ по метрике $H_{\nu, p}(R^n)$ и др.). В частности, компактность вложения $H_{\mu, p}(\dot{R}^n) \subset H_{\nu, p}(\dot{R}^n)$, $\nu < \mu$, имеющая место при $p = \infty$, в случае $p < \infty$ получается выделением (см. определение 1) некоторого подкласса $H^0_{\nu, p}(\dot{R}^n)$ функций, сдвиги которых $\tau_h \varphi = \varphi(x - h)$ стремятся к нулю почти всюду при $h \to \infty$. Этот подкласс играет важную роль и в дальнейшем. В n^0 2 приводятся результаты о плотности $C^\infty(R^n)$ и $C_0^\infty(R^n)$ в некоторых подпространствах функций из $H_{\mu, p}(R^n)$ и $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$. В n^0 3 рассмотрен вопрос о компактности в рассматриваемых классах операторов вида $T_a \varphi = a(x) K\varphi$, $K\varphi = k * \varphi$, и получены достаточные для этого условия на $a(x)$ и $k(x)$. Условия на $k(x)$ — это обычные условия ограниченности оператора свертки K, а условия на $a(x)$, помимо того, чтобы обеспечить ограниченность оператора T_a, связаны еще и с характером убывания $a(x)$ на ∞. В частности для пространств $H_{\mu, p}(R^n)$ достаточно, чтобы $a(\infty) = 0$, а для пространств $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$ — чтобы $a(x) = O(|x|^{-\mu - \varepsilon})$, $x \to \infty$, с каким либо $\varepsilon > 0$ (ср. с [3], где $p = \infty$, $n = 1$). Отметим, что условие типа убывания $a(x)$ на ∞ необходимо, поскольку (см. лемму 8) среди операторов, инвариантных относительно сдвига и ограниченных в $H_{\mu, p}(R^n)$, $p < \infty$, нет компактных (нулевых) операторов. Наконец, в n^0 4 рассмотрен случай операторов свертки на полуоси. Уже в вопросах ограниченности здесь появляются дополнительные (по сравнению со случаем оси) условия, связанные с наличием граничной точки (в случае $p = \infty$, см. [3] - [4]). Здесь приведены также необходимые и достаточные условия продолжимости функций из $H_{\mu, p}(R^1_+)$ нулем до функций из $H_{\mu, p}(\dot{R}^1)$.

Используются следующие обозначения: x — точка в R^n; $x^* = x|x|^{-2}$ — инверсия; $(\tau_h\varphi)(x) = \varphi(x-h)$ — оператор сдвига на вектор $h \in R^n$; $(\Delta_h\varphi)(x) = (\tau_h - I)\varphi = \varphi(x+h) - \varphi(x)$; $p' = p(p-1)^{-1}$; $\|\cdot\|_p$ — норма в $L_p(R^n)$; $\|\cdot\|_{\mu,p}$ ($\|\cdot\|_{\mu,p}$) — норма в $H_{\mu,p}(R^n)$ (в $H_{\mu,p}(\dot{R}^n)$), $v(x,h) = b^{\mu}(x,h)$, $b(x,h) = |h|^{-1}(1+|x|)(1+|x+h|)$; $L_p^{\nu}(R^n) = \{f: (1+|x|)^{\nu} f(x) \in L_p(R^n)\}$, ν — вещественное число.

1°. Вспомогательные сведения. Пусть $H_{\mu,p}(R^n)$, $0<\mu\leqslant 1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, обозначает пространство функций $\varphi(x)\in L_p(R^n)$, липшицевых в L_p-норме, для которых $\|\varphi\|_{\mu,p} = \|\varphi\|_p + \|\varphi\|^0_{\mu,p} < \infty$, где $\|\varphi\|^0_{\mu,p} = \sup\limits_{|h|>0} \|(\Delta_h\varphi)(x)\,|h|^{-\mu}\|_p$. Через $\dot{H}_{\mu,p}(R^n)$ обозначаем аналогичный класс функций с нормой $\|\varphi\|_{\mu,p} = \|\varphi\|_p + \|\varphi\|^0_{\mu,p}$, где

$$\|\varphi\|^0_{\mu,p} = \sup_{|h|>0} \|(\Delta_h\varphi)(x)\,v(x,h)\|_p \tag{1}$$

и $v(x,h) = |h|^{-\mu}(1+|x|)^{\mu}(1+|x+h|)^{\mu}$. При $p=\infty$ мы будем для удобства считать, что $\varphi(x)\in C(\dot{R}^n)$ и соответствующие классы $H_{\mu,\infty}(R^n)$, $H_{\mu,\infty}(\dot{R}^n)$ обозначать просто $H_{\mu}(R^n)$, $H_{\mu}(\dot{R}^n)$. Заметим, что пространство $H_{\mu}(\dot{R}^n)$ отличается от $H_{\mu}(R^n)$ тем, что входящие в него функции глобально гельдеровы, т. е. гельдеровы в любом шаре $f(x)$ и $f(x^*)$. Последнее означает, что $|f(x^*) - f(x+h)^*)| \leqslant c|h|^{\mu}$ или, что то же, $|\Delta_h f)(x)| \leqslant c|x^* - (x+h)^*|$. Это условие глобальной гельдеровости может быть записано [5] с помощью (1), если учесть, что при больших $|x|$, $|x+h|$

$$\frac{1}{3}\, b(x,h) \leqslant |x^* - (x+h)^*|^{-1} \leqslant C_1 b(x,h) \tag{2}$$

(левое неравенство имеет место [5] для всех $x,\ h\in R^n$).

Через $h_{\mu,p}(R^n)$, $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ будем обозначать подпространства функций из $H_{\mu,p}(R^n)$, $H_{\mu,p}(\dot{R}^n)$, соответственно, для которых

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{|h|<\delta} \|\Delta_h\varphi)(x)\,|h|^{-\mu}\|_p = 0,\quad \lim_{\delta\to 0}\sup_{|h|<\delta} \|(\Delta_h\varphi)(x)\,v(x,h)\|_p = 0. \tag{3}$$

Ясно, что $H_{\mu,p}(\dot{R}^n)\subset H_{\mu,p}(R^n)$, $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)\subset h_{\mu,p}(R^n)$ и

$$h_{\mu,p}(R^n)\subset H_{\mu,p}(R^n)\subset h_{\nu,p}(R^n),\ 0<\nu<\mu\leqslant 1, \tag{4}$$

$$h_{\mu,p}(\dot{R}^n)\subset H_{\mu,p}(\dot{R}^n)\subset h_{\nu,p}(\dot{R}^n),\ 0<\nu<\mu\leqslant 1, \tag{5}$$

причем, в отличии от (4), правое вложение в (5) компактно при $p=\infty$. При $p<\infty$ компактность этого вложения удается получить в несколько более слабой форме.

Определение 1. Через $H^0_{\mu,p}(\dot{R}^n)$, $h^0_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ обозначим подпространство функций из $H_{\mu,p}(\dot{R}^n)$, $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$, сдвиги которых сходятся к нулю почти всюду:

$$\lim_{h\to\infty}(\tau_h\varphi)(x)=\lim_{h\to\infty}\varphi(x-h)=0 \text{ для п. в. } x\in R^n. \tag{6}$$

Непосредственно из определения 1 выводится, что функции из $H^0_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ „убывают" достаточно быстро на бесконечности:

$$h^0_{\mu,p}(\dot{R}^n)\subset H^0_{\mu,p}(\dot{R}^n)\subset L^\mu_p(R^n),\ 1\leqslant p<\infty.$$

Действительно, если $\varphi(x)\in H^0_{\mu,p}(\dot{R}^n)$, то для $\varphi(x)$ конечна величина $\|\varphi\|^0_{\mu,p}$ в (1). Поскольку $v(x,h)\to(1+|x|)^\mu$ для любого x, то $(\Delta_h\varphi)(x)\,v(x,h)\to(1+|x|)^\mu\varphi(x)$ почти всюду в силу (6) и остается в (1) перейти к пределу по теореме Фату, что дает $(1+|x|)^\mu\varphi(x)\in L_p(R^n)$. Отметим, что при $p=\infty$ функции из $H_\mu(\dot{R}^n)$ после выделения константы автоматически удовлетворяют условию (6), так что $H_\mu(\dot{R}^n)\subset L^\mu_\infty(R^n)$.

Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Если $\Omega=\{\varphi\}$ — ограниченное множество в $H^0_{\mu,p}(\dot{R}^n)$, то Ω компактно в $L^{\mu-\varepsilon}_p(R^n)$, $0<\varepsilon\leqslant\mu$, $1\leqslant p<\infty$.*

Доказательство. Пусть $\rho(x)=(1+|x|)^{\mu-\varepsilon}$. Проверим, что множество $\Omega_\rho=\rho\Omega=\{\rho\varphi\}$, $\varphi\in\Omega$, удовлетворяет всем условиям критерия Рисса (см., например, [6]) в $L_p(R^n)$: 1) $\|\rho\varphi\|_p<\infty$; 2) $\int\limits_{|x|>N}|\rho\varphi|^p\,dx\to 0$, $N\to\infty$; 3) $\|\Delta_h(\rho\varphi)\|_p\to 0$, $h\to 0$; причем условия 1)—3) выполнены равномерно по $\varphi\in\Omega$. Первое из этих условий, есть следствие описанного перехода по теореме Фату в (1), что дает $\|(1+|x|)^\mu\varphi(x)\|_p\leqslant\|\varphi\|^0_{\mu,p}<\gamma$ и, следовательно, справедливо включая $\varepsilon=0$. Отсюда же следует, что

$$\left(\int\limits_{|x|>N}|\rho(x)\,\varphi(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant\frac{1}{(1+N)^\varepsilon}\|(1+|x|)^\mu\varphi\|_p\leqslant\frac{\gamma}{(1+N)^\varepsilon},$$

что дает выполнимость 2). Наконец

$$|\Delta_h(\rho\varphi)|\leqslant|h|^{\mu-\varepsilon}|\varphi(x)|+|h|^\mu(\Delta_h\varphi)(x)\,v(x,h).$$

Поэтому при $|h|<\delta$

$$\|\Delta_h(\rho\varphi)\|_p\leqslant\delta^{\mu-\varepsilon}\|\varphi\|_{\mu,p}\leqslant\gamma\,\delta^{\mu-\varepsilon}\to 0$$

при $\delta\to 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Вложение*

$$H^0_{\mu,p}(\dot{R}^n)\subset h^0_{\nu,p}(R^n),\ 0<\nu<\mu\leqslant 1$$

компактно, $1\leqslant p<\infty$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \{\varphi\}$ ограничено в $\overset{0}{H}_{\mu,p}(R^n)$. Тогда, согласно лемме 1, Ω компактно в $L_p(R^n)$. Пусть $\{\varphi_N\} \in \Omega$ сходится в $L_p(R^n)$. Учитывая, что $b(x, h) = |h|^{-1}(1+|x|)(1+|x+h|) \geqslant 1$ для всех x, $h \in R^n$, имеем

$$\|\varphi_N - \varphi_M\|^0_{\nu,p} = \sup_{|h|>0}\left[\left(\int\limits_{b(x,h)>\delta^{-1}} + \int\limits_{b(x,h)<\delta^{-1}}\right)\cdot dx\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{\mu-\nu}\|\varphi_N - \varphi_M\|^0_{\mu,p} + 2\delta^{-\nu}\|\varphi_N - \varphi_M\|_p$$

и малость первого слагаемого в правой части получается за счет выбора δ и ограниченности Ω, а уже при фиксированном δ используется сходимость $\varphi_N(x)$ в $L_p(R^n)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\{\varphi\} = \Omega$ — *ограниченное множество в* $\overset{0}{H}_{\mu,p}(R^n)$ (*или в* $H_{\mu,p}(R^n)$ *и* $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$. *Тогда* $\Omega_\omega = \{\omega\varphi\}$ — *ограниченное множество в* $\overset{0}{H}_{\mu,p}(R^n)$ (*в* $H_{\mu,p}(R^n)$). *Если, кроме того,* $\{\varphi\} \in \overset{0}{h}_{\mu,p}(R^n)$ (*или* $h_{\mu,p}(R^n)$), *то оно будет ограниченным и в* $\overset{0}{h}_{\mu,p}(R^n)$ (*в* $h_{\mu,p}(R^n)$), $0 < \mu \leqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\tau_h(\omega\varphi) = \omega(x+h)\varphi(x+h) \to 0$ при $h \to \infty$ для почти всех x. Далее $\|\Delta_h(\omega\varphi)\|_p \leqslant c\|\Delta_h\varphi\|_p + \|\varphi\|_p \sup\limits_x |(\Delta_h\omega)(x)| \leqslant c_1|h|^\mu$, откуда следует, что $\omega\varphi \in \overset{0}{H}_{\mu,p}(R^n)$. Это означает, что можно с самого начала считать, что $\{\varphi\}$ — ограниченное множество в $\overset{0}{H}_{\mu,p}(R^n)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset Ш_R$, где $Ш_R$ — шар радиуса R, так что $\varphi(x) = 0$ на его границе. Далее имеем

$$\|\Delta_h\varphi)(x)\, v(x, h)\|_p \leqslant \sum_{j=1}^{3} J_j =$$

$$= \left(\int\limits_{\substack{x\in Ш_R\\ x+h\in Ш_R}} \cdot dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_{\substack{x\overline{\in} Ш_R\\ x+h\in Ш_R}} \cdot dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_{\substack{x\in Ш_R\\ x+h\overline{\in} Ш_R}} \cdot dx\right)^{1/p}.$$

Очевидно, если x, $x+h \in Ш_R$, то $v(x, h) \leqslant (1+R)^{2\mu}\cdot|h|^{-\mu}$, так что $J_1 \leqslant c\|\varphi\|^0_{\mu,p}$. Для $x \in Ш_R$, $x+h \overline{\in} Ш_R$ имеем $v(x, h) \leqslant 2^\mu(1+R)^{2\mu}|h|^{-\mu}$, если $|h| < 1$ и $v(x, h) \leqslant 2^\mu(1+R)^{2\mu}$, если $|h| > 1$. Поэтому $J_3 \leqslant c\|\varphi\|_{\mu,p}$ и аналогично оценивается J_2.

Лемма 4. *Замыкание* $\dot{H}_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ *в метрике* $H_{\mu,p}(R^n)$ *совпадает с подпространством функций из* $H_{\mu,p}(R^n)$, *для которых*

$$\lim_{N\to\infty} J_N = \lim_{N\to\infty}\sup_{|h|>0}\left(\int\limits_{|x|>N} \left||h|^{-\mu}(\Delta_h\varphi)(x)\right|^p dx\right)^{1/p} = 0, \tag{7}$$

$0 < \mu \leqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$. *Замыкание* $H_\mu(\dot{R}^n)$ *в метрике* $H_\mu(R^n)$ *совпадает с подпространством функций из* $H_\mu(R^n)$, $0 < \mu \leqslant 1$, *удовлетворяющих* (7) *при* $p = \infty$.

Доказательство. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение. Пусть $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$ и $\omega(x) = 1$ при $|x| < 1$, $\omega(x) = 0$ при $|x| > 3$ и $0 \leqslant \omega(x) \leqslant 1$, $|(D^\alpha \omega)(x)| \leqslant K_\alpha$. Пусть далее $\omega_N(x) = \omega(xN^{-1})$, так что $\omega_N(x) = 1$ при $|x| < N$ и $\omega(x) = 0$ при $|x| > 3N$ и, кроме того

$$|(\Delta_h \omega_N)(x)| \leqslant \frac{k_1 n}{N} |h| \tag{8}$$

(на самом деле эту оценку можно уточнить, заметив, что левая часть в (8) равна нулю, если x, $x + h \in Ш_N$ или x, $x + h \overline{\in} Ш_{3N}$. Кроме того, справедлива глобальная оценка по N вида

$$\sup_{|h|>0} \sup_{x \in R^n} \frac{|(\Delta_h \omega_N)(x)|}{|h|^\mu} \leqslant \frac{c}{N^\mu}. \tag{9}$$

Для доказательства (9) замечаем, что

$$A_1 = \sup_{|h|>N} \sup_x \frac{|(\Delta_h \omega_N)(x)|}{|h|^\mu} \leqslant \frac{2}{N^\mu},$$

и, с использованием (8), находим

$$A_2 = \sup_{|h|<N} \sup_x \frac{|(\Delta_h \omega_N)(x)|}{|h|^\mu} \leqslant \sup_{|h|<N} \frac{k_1 n}{N} |h|^{1-\mu} \leqslant \frac{k_1 n}{N^\mu}.$$

Объединение оценок для A_1, A_2 дает (9).

Переходим к непосредственному доказательству леммы. Пусть $\varphi(x) \in H_{\mu,p}(R^n)$, $0 < \mu \leqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$, и $\varphi_N(x) = \omega_N(x)\varphi(x) \in H_{\mu,p}(R^n)$ согласно лемме 3. Ясно, что $\|\varphi - \varphi_N\|_p \to 0$, $N \to \infty$. Поскольку

$$\Delta_h(\varphi - \varphi_N) = \bar{\omega}_N(x)(\Delta_h \varphi)(x) + \varphi(x+h)(\Delta_h \omega_N)(x),$$

где $\bar{\omega}_N(x) = 1 - \omega_N(x)$, то, с учетом (9) имеем

$$\sup_{|h|>0} \| |h|^{-\mu} \Delta_h(\varphi - \varphi_N)\|_p \leqslant \|\varphi\|_p \sup_{|h|>0} \sup_x \frac{|(\Delta_h \omega_N)(x)|}{|h|^\mu} +$$

$$+ \sup_{|h|>0} \left(\int\limits_{|x|>N} \left| |h|^{-\mu} (\Delta_h \varphi)(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \to 0$$

при $N \to \infty$. Аналогично рассматривается случай $p = \infty$. Лемма доказана.

2°. Плотные множества в $h_{\mu,p}(R^n)$, $h_{\mu,p}(R^n)$. Пусть K означает оператор свертки $K\varphi = k * \varphi$. Хорошо известно, что если $k \in L_1(R^n)$, то K ограничен в $L_p(R^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Учитывая инвариантность K относительно сдвига имеем $\|\Delta_h K\varphi\|_p = \|K\Delta_h \varphi\|_p \leqslant \|k\|_1 \|\Delta_h \varphi\|_p$, что приводит к следующим утверждениям.

Лемма 5. *Если $k(t) \in L_1(R^n)$, то оператор K ограничен в $H_{\mu,p}(R^n)$ (и в $h_{\mu,p}(R^n)$), $0 < \mu \leqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Лемма 6. *Если $k(t) \in L_1^{2\mu}(R^n)$, то оператор K ограничен в $H_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ (и в $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$), $0 < \mu \leqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Доказательство леммы 6, по сравнению с леммой 5, дополнительно использует неравенство $v(x, h) \leqslant (1 + |t|)^{2\mu} v(x-t, h)$.

Лемма 7. *Множество $C^\infty(R^n)$ плотно в $h_{\mu,p}(R^n)$ и в $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$, $0 < \mu \leqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство основано на известной технике усреднений. Пусть $h(t) \in C_0^\infty(R^n)$, $h_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-n} k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ — усредняющее ядро, причем $\int k(t)dt = 1$, и пусть $\varphi_\varepsilon(x) = (k_\varepsilon * \varphi)(x)$ — усреднение функции $\varphi(x)$. Имеем

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_p = \left(\int\limits_{R^n} dx \left| \int\limits_{R^n} k_\varepsilon(t)[\varphi(x-t) - \varphi(x)]\, dt \right|^p \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \|k\|_1 \sup_{|t|<\delta} \|(\Delta_{-t}\varphi)(x)\|_p + 2\|\varphi\|_p \int\limits_{|y|>\delta\varepsilon^{-1}} |k(y)|\, dy.$$

Выбирая здесь вначале δ, с учетом $\varphi \in h_{\mu,p}(R^n)$ добиваемся малости первого слагаемого. Уже при фиксированном δ второе слагаемое стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу суммируемости $k(t)$, что дает $\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_p \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Далее нетрудно показать, что

$$|h|^{-\mu} \|\Delta_h(\varphi - \varphi_\varepsilon)\|_p \leqslant 2\|\varphi\|^0_{\mu,p} \int\limits_{|y|>\delta\varepsilon^{-1}} k(y)\, dy +$$

$$+ 2\|k\|_1 \sup_{|h|<\eta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h\varphi\|_p + 2(\delta\eta^{-1})^\mu \|k\|_1 \|\varphi\|^0_{\mu,p}$$

и на сей раз последсвательно выбираем η во втором слагаемом и δ — в третьем, после чего устремляем ε к нулю, что и требовалось. Доказательство в случае $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ аналогично, хотя и громоздко.

Оказывается, что в $h_{\mu,p}(R^n)$ плотно и множество финитных функций (при $p < \infty$). Чтобы привести соответствующую формулировку, охватывающую и случай пространства $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$, дадим следующее

Определение 2. Через $\tilde{h}_{\mu,p}(\dot{R}^n)$ обозначим подпространство функций из $h_{\mu,p}(\dot{R}^n)$, для которых $\varphi(x) \in L_p^{2\mu}(R^n)$, т. е. $(1 + |x|)^{2\mu}\varphi(x) \in L_p(R^n)$.

Теорема 1. *Множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $h_{\mu,p}(R^n)$ и в $\tilde{h}_{\mu,p}(\dot{R}^n)$, $0 < \mu < 1$, $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. В силу леммы 7 можно считать, что $\varphi \in C^\infty(R^n) \cap h_{\mu,p}(R^n)$ и пусть $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$ — функция из леммы 3. Положим $\varphi_N(x) = \varphi(x)\,\omega_N(x) = \varphi(x)\,\omega(x/N)$. Ясно, что $\|\varphi - \varphi_N\|_p \to 0$ при $N \to \infty$. Оценивая $J = |h|^{-\mu} \|\Delta_h(\varphi - \varphi_N)\|_p$, найдем

$$J \leqslant \sup_{0<|h|<\delta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h(\varphi - \varphi_N)\|_p + \delta^{-\mu} \sup_{|h|>\delta} \|\Delta_h(\varphi - \varphi_N)\|_p = J_1 + J_2.$$

Оценка J_2 проста: $J_2 \leqslant 2\delta^{-\mu} \|\varphi - \varphi_N\|_p \to 0$, $N \to \infty$, при фиксированном δ. Оценивая же J_1, находим

$$J_1 \leqslant \sup_{0<|h|<\delta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h \varphi\|_p + \sup_{0<|h|<\delta} |h|^{-\mu} \|(\Delta_h \omega_N)(x)\|_\infty,$$

откуда с использованием (8) получаем

$$J_1 \leqslant \sup_{0<|h|<\delta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h \varphi\|_p + \frac{c\,\delta^{1-\mu}}{N} \|\varphi\|_p.$$

Далее выбираем вначале δ с учетом $\varphi \in h_{\mu,p}(R^n)$, что дает малость первого слагаемого и уже при фиксированном δ переходим к пределу при $N \to \infty$.

Переходя ко второй части теоремы, сразу замечаем, что оценка $\|\varphi - \varphi_N\|_p$ не меняется. Далее имеем

$$J = \|\varphi - \varphi_N\|^{0}_{\mu,p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|h|<\delta} \|v(x, h)\, \Delta_h(\varphi - \varphi_N)\|_p + \sup_{|h|>\delta} \|v(x, h)\, \Delta_h(\varphi - \varphi_N)\|_p = J_1 + J_2.$$

Очевидно, что

$$J_1 \leqslant \sup_{|h|<\delta} \|v(x, h)(\Delta_h \varphi)(x)\|_p + \sup_{|h|<\delta} \|\varphi(x)\, v(x, h)(\Delta_h \omega_N)(x)\|_p.$$

Считая $\delta < 1$ при $|h| < \delta$, найдем

$$|v(x, h)(\Delta_h \omega_N)(x)| \leqslant \frac{k_1 n}{N} \frac{(1+|x|)^\mu (1+|x+h|)^\mu}{|h|^\mu} |h|\, \chi_N(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k_1 n}{N} (1+|x|)^{2\mu} \delta^{1-\mu} \chi_N(x),$$

где $\chi_N(x) = 1$, если $N-1 < |x| < 3N+1$ и $\chi_N(x) = 0$ — в остальных случаях. Поэтому

$$\sup_{|h|<\delta} \|\varphi(x)\, v(x, h)(\Delta_h \omega_N)(x)\|_p \leqslant \frac{k_1 n}{N} \delta^{1-\mu} \|(1+|x|)^{2\mu} \varphi(x)\|_p \to 0$$

при $\delta \to 0$. Следовательно, $J_1 \to 0$ при $\delta \to 0$. Зафиксируем теперь δ. Тогда для J_2 получим

$$J_2 \leqslant \sup_{|h|>\delta} (\|v(x, h)[\varphi(x+h) - \varphi_N(x+h)]\|_p + \|v(x, h)[\varphi(x) - \varphi_N(x)]\|_p).$$

Учитывая, что $v(x, h)$ при $|h| > \delta$ допускает оценку $v(x, h) \leqslant (1+\delta)^{-1}(1+|x|)^{2\mu}$ для второго слагаемого в правой части неравенства для J_2 получаем оценку

$$(1+\delta^{-1})^\mu \|(1+|x|)^{2\mu} [\varphi(x) - \varphi_N(x)]\|_p \to 0, \ N \to \infty$$

при фиксированном δ и аналогично оценивается первое слагаемое.

Заметим, что второе утверждение теоремы 1 верно и при $p = \infty$, а для справедливости первого следует также перейти к классу $\widetilde{h}_{\mu,p}(R^n)$, на сей раз выделяемому условием $\varphi(\infty) = 0$.

3°. Полная непрерывность операторов свертки с переменными коэффициентами. Оператор свертки $K\varphi = k * \varphi$ не может быть вполне непрерывным в пространствах $H_{\mu, h}(\dot{R}^n)$ или $H_{\mu, p}(\dot{R}^n)$. Это можно получить из разных соображений. Для пространств $H_{\mu, p}(R^n)$ имеет место следующая

Лемма 8. *Пусть K — линейный ограниченный в $H_{\mu, p}(R^n)$, $0 < \mu \leqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$, оператор инвариантный относительно сдвига. То да сли K компактен в $H_{\mu, p}(R^n)$, то необходимо $K = 0$.*

Доказательство. Допустим, что $\varphi(x) \in H_{\mu, p}(R^n)$ такова, что $(K\varphi)(x) \neq 0$. Положим $\varphi_N(x) = \varphi(x + Nh)$, где h—фиксированный вектор в R^n. Тогда $\{\varphi_N(x)\}$ — ограниченное множество в $H_{\mu, p}(R^n)$ и можно считать, что $\|K\tau_{Nh}\varphi - K\tau_{Mh}\varphi\|_{\mu, p} \to 0$ при N, $M \to \infty$. Но

$$\|K\tau_{Mh}\varphi - K\tau_{Nh}\varphi\|_{\mu, p} \geqslant \|K\tau_{Mh}\varphi - K\tau_{Nh}\varphi\|_p =$$
$$= \|\tau_{(N-M)h} K\varphi - K\varphi\|_p \to 2^{1/p}\|K\varphi\|_p,$$

с учетом теоремы 1 из [7], откуда необходимо $K\varphi = 0$. Получили противоречие.

Отметим, что при $p = \infty$ среди операторов, инвариантных относительно сдвига, возможен ненулевой (одномерный) компактный оператор.

Чтобы добиться компактности оператора свертки обычно его умножают на функцию, исчезающую на бесконечности. Положим

$$T_a\varphi = a(x)K\varphi = a(x)k * \varphi.$$

Теорема 2. *Пусть $k(t) \in L_1^{2\mu}(R^n)$, $a(x) \in H_\mu(\dot{R}^n)$ $(a(x) \in h_\mu(\dot{R}^n))$ и*

$$B = \sup_{x \in R^n} |a(x)|(1 + |x|)^{\mu+\varepsilon} < \infty$$

для какого-либо $\varepsilon > 0$. Тогда T_a вполне непрерывен в

$$H^0_{\mu, p}(\dot{R}^n),\ 0 < \mu \leqslant 1,\ 1 \leqslant p < \infty\ (\text{и в } h^0_{\mu, p}(\dot{R}^n)).$$

Доказательство. В силу леммы 6, с учетом плотности $C_0^\infty(R^n)$ в $L^{2\mu}(R^n)$, можно считать, что $k(t) \in C_0^\infty(R^n)$. Согласно лемме 1, если Ω ограничено в $H^0_{\mu, p}(\dot{R}^n)$, то оно компактно в $L_p^{\mu-\varepsilon}(\dot{R}^n)$ с любым $0 < \varepsilon \leqslant \mu$, и пусть $\|u_m\|_p = \|\varphi - \varphi_m\|_p \to 0$, $m \to \infty$. Тогда обычная теорема о свертке дает

$$\|T_a u_m\|_p \leqslant \|a\|_\infty \|k\|_1 \|u_m\|_p \leqslant \gamma \|\rho u_m\|_p,$$

где $\rho(x) = (1 + |x|)^{\mu-\varepsilon}$. Далее

$$\Delta_h(T_a u_m) = a(x + h)\Delta_h(k * u_m) + (k * u_m)(x)(\Delta_h a)(x) =$$
$$= \psi_1(x, h) + \psi_2(x, h),$$

откуда

$$\|v(x, h)\psi_2(x, h)\|_p \leqslant \|a\|_{\mu, p}\|k\|_1\|u_m\|_p \leqslant \gamma\|\rho u_m\|_p.$$

Переходим к оценке наиболее сложного слагаемого $J(h) = \|v(x, h)\psi_1(x, h)\|_p$. При $|h| < 1$ имеем

$$\sup_{|h|<1} J(h) \leqslant B\|\rho u_m\|_p \sup_{|h|<1}\left(|h|^{-\mu}\int_{R^n}|k(t+h)-k(t)|(1+|t|)^{\mu-\varepsilon}\,dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma\|\rho\, u_m\|_p.$$

При $|h|>1$ будем иметь с помощью неравенства Минковского

$$\sup_{|h|>1} J(h) \leqslant \gamma\|\rho\, u_m\|_p, \text{ где } \gamma = \gamma_1\gamma_2 \text{ и } \gamma_1 = \|k(y)(1+|y|)^{\mu-\varepsilon}\|_1, \text{ а}$$

$$\gamma_2 = \sup_{\substack{x,\,h\\ |h|>1}} \frac{|a(x+h)|}{|h|^{\mu}}\{(1+|x|)^{\mu}(1+|x+h|)^{\varepsilon}(1+|x|)^{\varepsilon}+(1+|x+h|)^{\mu}\}.$$

Объединяя оценки для $\Delta_h(T_a u_m)$ мы видим, что $\|\Delta_h(T_h u_m)v(x, h)\|_p \leqslant \gamma\|\rho u_m\|_p$, так что $\|T_a u_m\|_{\mu, p} \leqslant \gamma\|\rho\, u_m\|_p$, что приводит к компактности T_a. Теорема доказана.

Заметим, что требование на ∞ на $k(x)$ можно ослабить, увеличив при этом локальную гладкость ядра. А именно, справедлива

Теорема 3. *Пусть* $k(x) \in H_{\mu, 1}(R^n)$, $a(x) \in H_\mu(R^n)$ $(a(x) \in h_\mu(R^n))$ *и* $a(x) = O(|x|^{-2\mu})$, $x \to \infty$. *Тогда оператор* T_a *вполне непрерывен в пространстве* $\overset{0}{H}_{\mu, p}(R^n)$, $0<\mu\leqslant 1$, $1\leqslant p<\infty$ (*и в* $\overset{0}{h}_{\mu, p}(R^n)$).

В случае пространства $H_{\mu, p}(R^n)$ получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $k(x) \in L_1(R^n)$, $a(x) \in H_{\mu+\varepsilon}(R^n)$, $\varepsilon>0$, (*или* $a(x) \in h_{\mu+\varepsilon}(R^n)$) *и* $a(\infty) = 0$. *Тогда* T_a *вполне непрерывен в* $\overset{0}{H}_{\mu, p}(R^n)$, $0<\mu<1$, $1\leqslant p<\infty$ (*в* $\overset{0}{h}_{\mu, p}(R^n)$).

Доказательство основано на следующем утверждении.

Лемма 9. *Пусть* $k(x) \in L_1(R^n)$ *и* $a(x) \in H_\lambda(R^n)$, *причем* $a(x) = 0$ *при* $|x|>M$. *Тогда* T_a *вполне непрерывен в* $\overset{0}{H}_{\mu, p}(R^n)$, $0<\mu<1$, $1\leqslant p<\infty$.

Доказательство леммы. В силу леммы 8 можно считать $k(t) \in C_0^\infty(R^n)$, и пусть $1 = \omega_N(x) + \tilde{\omega}_N(x)$, где ω_N — функция из леммы 4. Тогда $T_a\varphi = T_a\omega_N\varphi + T_a\tilde{\omega}_N\varphi$. За счет выбора N с учетом того, что $\tilde{\omega}_N(x) = 0$ при $|x|<N$, $a(x) = 0$ при $|x|>M$ и финитности $k(x)$ можно добиться чтобы $T_a\tilde{\omega}_N\varphi \equiv 0$. Пусть $\{\varphi\}$ —ограниченное множество в $\overset{0}{H}_{\mu, p}(R^n)$. Тогда в силу леммы 3 множество $\{\omega_N\varphi\}$ ограничено в $\overset{0}{H}_{\mu, p}(R^n)$ и для оператора T_a выполнены условия теоремы 2. Следовательно, $T_a\omega_N\varphi$ компактно в $H_{\lambda, p}(R^n)$ и остается учесть непрерывность вложения $H_{\mu, p}(R^n)$ в $H_{\mu, p}(R^n)$:

$$\|T_a\,\omega_N\varphi\|_{H_{\mu,p}(R^n)} \leqslant \|T_a\,\omega_N\varphi\|_{H_{\mu,p}(\dot{R}^n)}.$$

Переходим к доказательству теоремы. Имеем $T_a\varphi = T_{a\omega_N}\varphi + T_{a\tilde{\omega}_N}\varphi$, где $a\omega_N = 0$ при $|x| > 3N$ и удовлетворяет условиям леммы 9. Поэтому $T_{a\omega_N}\varphi$ вполне непрерывен в $H_{\mu,p}(R^n)$, $0 < \mu \leqslant 1$ при любом N. Далее

$$\|T_a\varphi - T_{a\omega_N}\|_{\mu,p} = \|T_{a\tilde{\omega}_N}\|_{\mu,p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sup_{|x|>N} |a(x)|\right) \|k\|_1 \|\varphi\|_{\mu,p} + \|k\|_1 \|\varphi\|_p \sup_{|h|>0} \frac{\|\Delta_h(a\tilde{\omega}_N)\|_\infty}{|h|^\mu}.$$

Можно показать, что

$$\sup_{|h|>0} \frac{\|\Delta_h(a\tilde{\omega}_N)\|_\infty}{|h|^\mu} \to 0,\ N\to\infty,$$

что дает компактность T_a, как предела последовательности вполне непрерывных операторов $T_{a\omega_N}$. Переход к случаю $\overset{0}{h}_{\mu,p}(R^n)$ достаточно прост и следует из неравенств

$$\sup_{|h|<\delta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h g\|_p \leqslant \|T_a\varphi_m - g\|_{\mu,p} + \sup_{|h|<\delta} |h|^{-\mu} \|\Delta_h T_a \varphi_m\|_p,$$

где $\|g - T_a\varphi_m\|_{\mu,p} \to 0$, $m\to\infty$. Теорема доказана.

Не останавливаясь здесь на формулировке отметим, что можно рассмотреть более общий интегральный оператор вида

$$\int_{R^n} a(x,t)\,k(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $a(x,t)\in H_\mu(R^n\times R^n)$, $k(t)\in L_1^{2\mu}(R^n)$. В этом случае поведение функции $a(x,t)$ на бесконечности задается условием $\sup_{x,t\in R^n} |a(x,t)|\cdot(1+|x|)$ $(1+|t|)^\lambda < \infty$, где $\lambda\in[0;\ \mu+\varepsilon]$.

4°. **Случай полуоси.** В этом случае пространства $H_{\mu,p}(R^1_+)$, $\overset{0}{H}_{\mu,p}(R^1_+)$ определяются естественным образом, однако наличие граничной точки $x=0$ вносит некоторые особенности, хотя свойства из п° 1 сохраняются. Пусть

$$\mathbf{K}\varphi = \int_0^\infty k(x-t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{10}$$

Ясно, что в отличие от оператора K, рассматриваемого в R^1, оператор $\mathbf{K}$ в R^1_+ не инвариантен относительного сдвига:

$$\Delta_h \mathbf{K}\varphi = \mathbf{K}\,\Delta_h\varphi - \int_0^h (\tau_{-h}k)(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{11}$$

откуда видно, что ограниченность первого слагаемого в правой части (11) в $H_{\mu,p}(R^1_+)$(или $H_{\mu,p}(\dot{R}^1_+)$) дается условиями лемм 8, 9. Поэтому ограниченность $\mathbf{K}$ связана с ограниченностью в соответствующем классе второго слагаемого. Для него с использованием неравенства Гельдера имеем

$$\left(\int_0^\infty dx\left|\int_0^h (\tau_{-h}k)(x-t)\,\varphi(t)\,dt\right|^p\right)^{1/p}\leqslant c\,\|k\|_{L_1(R^1_+)}\,\|\varphi\|_{L_p(R^1_+)},$$

где

$$c=\sup_{|h|>0}\sup_{x>0}\frac{1}{h^\mu}\left(\int_x^{x+h}|k(y)|\,dy\right)^{1/p}. \tag{12}$$

Лемма 10. *Пусть* $k(t)\in L_1(R^1)$ *и* $\psi(x)=\int_0^x|k(y)|\,dy\in H_{\mu p'}(R^1_+)$.

Тогда оператор $\mathbf{K}$ *ограничен в* $H_{\mu,p}(R^1_+)$*(и в* $h_{\mu,p}(R^1_+)$ *),* $0<\mu\leqslant 1$, $1<p<\infty$.

Лемма 11. *Пусть* $k(t)\in L_1^{2\mu}(R^1)$ *и* $\psi(x)=\int_0^x|k(y)|\,dy\in H_{\mu p'}(\dot{R}^1_+)$,

то где оператор $\mathbf{K}$ *ограничен в* $H_{\mu,p}(\dot{R}^1_+)$ *(и в* $h_{\mu,p}(\dot{R}^1_+)$*),* $0<\mu\leqslant 1$, $1<p<\infty$.

Приведем простое достаточное условие принадлежности $\psi(x)$ к $H_{\mu p'}(R^1_+)$ (или $H_{\mu p'}(\dot{R}^1_+)$) при $\mu p'<1$.

Лемма 12. *Пусть* $k(t)\in L_1(R^1)$ *и* $k_+(t)\in L_\nu(R^1_+)$ *(или* $k(t)\in L_1^{2\mu}(R^1)$ *и* $k_+(t)\in L_\nu^{2\mu}(R^1_+)$*), где* $\nu\geqslant\dfrac{1}{1-\mu p'}$.

Тогда $\mathbf{K}$ *ограничен в* $H_{\mu,p}(R^1_+)$ *(или в* $H_{\mu,p}(\dot{R}^1_+)$*, соответственно) при* $0<\mu<1$, $1<p<\infty$ *и* $0<\mu<\dfrac{1}{p'}$. *Если* $\nu>\dfrac{1}{1-\mu p'}$, *то* $\mathbf{K}$ *ограничен в* $h_{\mu,p}(R^1_+)$ *(и* $h_{\mu,p}(\dot{R}^1_+)$*, соответственно),* $0<\mu<1$, $1<p<\infty$ *и* $0<\mu<\dfrac{1}{p'}$.

Используя леммы 10 — 12 можно сформулировать результаты о полной непрерывности операторов $T_a=a(x)\,\mathbf{K}\varphi$, аналогичные теоремам 2—4, на чем мы не останавливаемся. Заметим, что эти же результаты можно получить, если использовать продолжимость нулем функций из $H_{\mu,p}(R^1_+)$ (или $H_{\mu,p}(\dot{R}^1_+)$). Остановимся отдельно на условиях продолжимости нулем и обозначим это продолжение через $\tilde{\varphi}(x)$.

Теорема 5. *Для того, чтобы функция* $\varphi(x)(\in H_{\mu,p}(R^1_+))$ *была продолжима нулем при* $x<0$ *до функции из* $H_{\mu,p}(R^1_+)$, $1\leqslant p<\infty$, $0<\mu\leqslant 1$, *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие*

$$A = \sup_{h>0} \frac{1}{h^{\mu}} \left(\int_0^h |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \tag{13}$$

при этом

$$\|\varphi\|_{H_{\mu,p}(R^1_+)} \leqslant \|\tilde{\varphi}\|_{H_{\mu,p}(R^1_+)} \leqslant A + \|\varphi\|_{H_{\mu,p}(R^1_+)}. \tag{14}$$

Теорема 6. *Для того, чтобы функция* $\varphi(x)\ (\in H_{\mu,p}(R^1_+))$ *была продолжима нулем при* $x<0$ *до функции из* $H_{\mu,p}(\tilde{R}^1_+)$, *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:* 1) $A<\infty$; 2) $\varphi(x) \in \in L^{\mu}_p(R^1_+)$.

Доказательство. Имеем

$$\sup_{h>0} \|v(x, h)(\Delta_h \tilde{\varphi})(x)\|_p =$$

$$= \sup_{h>0} \left(\int_0^h |v(x-h, h)\, \varphi(x)|_p \, dx + \int_0^{\infty} |v(x, h)(\Delta_h \varphi)(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

тогда и только, когда

$$J = \sup_{h>0} \frac{1}{h^{\mu}} \int_0^h |(1+x)^{\mu} (1+x-h)^{\mu} \varphi(x)|^p \, dx < \infty. \tag{15}$$

Достаточность. Пусть выполнены условия 1) — 2) теоремы. При $h<1$ очевидно (с учетом $x<h$), что $(1+x)(1+h-x) \leqslant 4$ и тогда $J \leqslant 4^{\mu}$A. При $h>1$ очевидно $h^{-1}(1+h-x) \leqslant 2$ и поэтому $J \leqslant \leqslant 2^{\mu} \|(1+x)^{\mu} \varphi(x)\|^p_{L_p(R^1_+)}$. Таким образом, $\tilde{\varphi}(x) \in H_{\mu,p}(R^1)$.

Необходимость. Допустим, что $J<\infty$ и обозначим $F_h(x) = = \chi_h(x) \left| \left(\frac{1+h-x}{h} \right)^{\mu} (1+x)^{\mu} \varphi(x) \right|^p$, где $\chi_h(x) = 1$, если $x<h$ и $\chi_h(x) = 0$ при $x>h$. Для почти всех x

$$F_h(x) \to F(x) = (1+x)^{\mu} \varphi(x)|^p.$$

По теореме Фату $F(x) \in L_1(R^1_+)$ и

$$\int_0^{\infty} F(x)\, dx \leqslant J = \sup_{h>0} \int_0^{\infty} F_h(x)\, dx,$$

т. е. выполнено условие 2) теоремы. После этого остается заметить, что $A^p \leqslant J$.

Наконец, при $h<0$ используем аналогичноо рассуждение, исходя из равенства

$$\sup_{h<0} \|v(x, h)(\Delta_h \tilde{\varphi})(x)\|_p =$$

$$= \sup_{h<0} \frac{1}{|h|^\mu}\left(\int_0^{|h|} |(1+x)^\mu (1+|h|-x)^\mu \varphi(x)|^p + \int_0^\infty v(y, |h|)(\Delta_{|h|}\varphi)(y)|^p \, dy\right)^{1/p},$$

где учтено, что $v(y+|h|, h) = v(y, |h|)$ и мы вновь приходим к (15). Теорема доказана.

В качестве примера заметим, что если $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^1_+) \subset H_{\mu, p}(R^1_+)$ и $|\varphi(x)| \geqslant B$, $0 < x < 1$, то $A \geqslant B \sup\limits_{0<h<1} h^{\frac{1}{p}-\mu}$. Отсюда видно, что продолжение такой функции $\varphi(x)$ нулем до $\bar{\varphi}(x) \in H_{\mu, p}(R^1)$ возможно лишь при $\mu \leqslant \frac{1}{p}$ и невозможно, если $\mu > \frac{1}{p}$.

Ростовский государственный
университет

Поступила 14. IV. 1986

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Փաթեթման օպերատորները լիպշիցյան դասերում *(ամփոփում)*

Հետազոտվում են փաթեթման օպերատորները լիպշիցյան μ կարգի $\mu \in (0, 1]$ L_p *— տարածություններում։ Ընդ որում դիտարկվում են ինչպես լոկալ, այնպես էլ գլոբալ (ներառյալ անվերջությունը) հյոլդերովության դեպքերը։*

N. K. KARAPETIAN. *Convolution operators in Lipshitz classes* (summary)

Convolution operators are investigated in the classes of functions which satisfy the Lipschitz condition of the order $\mu \in (0, 1]$ in L_p-spaces. The casos of local and global (including infinity) Lipschitz condition are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., Мир, 1973, 343 с.
2. *С. М. Никольский.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., Наука, 1977, 556 с.
3. *Г. Ю. Виноградова, Н. К. Карапетянц.* Операторы типа свертки в гельдеровских классах, В кн. «Математический анализ и его прилож», Ростов н/Д, 1983, 3—10.
4. *Г. Ю. Виноградова.* Ограниченность операторов типа свертки в гельдеровских классах, Изв. СКНЦ ВШ, Естествен. науки, 1977, № 1, 7—9.
5. *С. Г. Самко.* Классы C^λ (R^n) и мультипликаторы в пространствах I^α (L_p) риссовых потенциалов, Изв. СКНЦ ВШ, 1977, № 3.
6. *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц.* Линейные операторы, т. 1, М., ИЛ, 1962, 897 с.
7. *Л. Хёрмандер.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., ИЛ, 1962, 71 с.