ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 1, 1989 Математика

УДК 517.51

Г. М. МУШЕГЯН

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ПЕРЕСТАВЛЕННОГО РЯДА ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ И ПО БАЗИСАМ ПРОСТРАНСТВА $C\,[0,\,1]$ ВСЮДУ СХОДЯЩЕГОСЯ К ФУНКЦИИ ИЗ $L_p,\ 1 \leqslant p < 2$

§ 1. Введение

Известный результат Валле--Пуссена, в частности, можно сформулировать в следующем виде (см. [1]).

Теорема 1. (Валле—Пуссен). Если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x \tag{1.1}$$

всюду на $[0,\,2\pi]$, кроме, быть может, счетного множества точек, сходится к всюду конечной, интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$, то (1.1) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$.

Результаты типа теоремы 1 были получены и для других ортонормированных систем. А. Хааром [2] была доказана следующая

Теорема 2. (А. Хаар). Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{1.2}$$

по системе Хаара всюду на $[0,\,1]$ сходится к нулю, то $a_n = 0$ при $n \geqslant 1$.

Г. Фабером [3] был приведен пример ряда (1.2), который всюду на $[0,\,1]$, кроме одной точки, сходится к нулю, но не все коэффициенты которого равны нулю.

В работе [4] Ф. Г. Арутюнян и А. А. Талалян выделили естественный класс рядов Хаара, для которых счетное множество является множеством единственности. Этот класс определяется следующим образом.

Определение 1.1. Скажем, что ряд (1.2) принадлежит классу А, если для произвольной точки x_0, $x_0 \in [0,\,1]$, выполняется условие

$$\lim_{k\to\infty} |a_{n_k}| \cdot |\chi_{n_k}(x_0)|^{-1} = 0, \text{ где } \{n_k\}_{k=1}^{\infty} = \{n : \chi_n(x_0) \neq 0\}. \tag{1.3}$$

Отметим, что если ряд (1.2) всюду на $[0,\,1]$ сходится к конечной функции $f(x)$, то этот ряд принадлежит классу А.

В работе [4] была доказана следующая

Теорема 3 (Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян). Если ряд (1.2) принадлежит классу А и некоторая подпоследовательность его частичных сумм $\{S_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ всюду на $[0,\,1]$, кроме, быть может, счетного множества точек сходится к конечной функции $f(x)$, $f(x)\in L_1$, то (1.2) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$.

В этой же работе результат типа теоремы Валле—Пуссена был получен для системы Уолша (см. также [5]).

В работе [6] подобные вопросы рассмотрены для переставленной системы Хаара.

Если $\sigma=\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная перестановка натурального ряда (то есть взаимнооднозначное отображение последовательности $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ на себя), то через $(\sigma)\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ обозначим переставленный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

Имеют место следующие теоремы (см. [6]).

Теорема 4. Пусть переставленный ряд

$$(\sigma)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}\chi_{\sigma(n)}(x) \tag{1.4}$$

по системе Хаара принадлежит классу А. Если некоторая подпоследовательность $\{S_{n_k}(x,\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$ его частичных сумм всюду на [0, 1], кроме, быть может, счетного множества точек, сходится к конечной функции $f(x)$, $f(x)\in L_2$, то (1.4) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$.

Теорема 5. Существует переставленный ряд (1.4) и определенная на [0, 1] всюду конечная функция $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

1. $a_n=o(n^{-1/2})$, $f(x)\in L_p$ для любого p, $p\in[1, 2)$;
2. ряд (1.4) всюду на [0, 1] сходится к $f(x)$;
3. (1.4) не является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$.

Отметим, что для любой фиксированной перестановки σ, как следует из теоремы 4, ряд по системе Хаара, который после этой перестановки может всюду сходиться к данной функции $f(x)$, единственный и в том случае, когда $f(x)\overline{\in} L_2$. Следовательно, коэффициенты такого ряда должны восстанавливаться с помощью функции $f(x)$. Несмотря на это, теорема 5 показывает, что интеграл Лебега не всегда восстанавливает коэффициенты такого ряда, даже если $f(x)\in L_p$ $1\leq p<2$.

Ниже через $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обозначена любая из следующих систем: система Хаара, система Уолша, произвольный ортонормированный базис пространства $C[0, 1]$, тригонометрическая система, определенная на [0, 1], то есть система $\{1, \sqrt{2}\cos 2\pi nx, \sqrt{2}\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$.

В настоящей работе результат типа теоремы 5 устанавливается для этих систем, а именно справедлива следующая

Теорема А. *Существуют переставленный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) \tag{1.5}$$

по системе Φ *и определенная на* [0, 1] *всюду конечная функция* $f(x)$, *удовлетворяющие условиям:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $f(x)\in L_p$ *для любого* p, $1\leqslant p<2$;

2. *ряд* (1.5) *всюду на* $[0, 1]$ *сходится к* $f(x)$;

3. (1.5) *не является рядом Фурье—Лебега функции* $f(x)$.

В случае, когда Φ—система Хаара, рассматривается следующий вопрос: насколько быстро коэффициенты ряда (1.4) в теореме 5 могут стремиться к нулю? Ясно, что в этой теореме не может выполняться условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty. \tag{1.6}$$

Поэтому на скорость стремления к нулю коэффициентов a_n, $n=1, 2, \cdots$, естественно наложить условия, из которых не следует (1.6).

Теорема B. *Для любой монотонно убывающей последовательности положительных чисел* $h=\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, *удовлетворяющих условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 = +\infty, \tag{1.7}$$

существует переставленный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}\chi_{\sigma(n)}(x) \tag{1.8}$$

по системе Хаара и определенная на $[0, 1]$ *всюду конечная функция* $f(x)$, *обладающие свойствами*:

1) $|a_n|\leqslant h_n$, $n=1, 2, \cdots$;

2) $f(x)\in L_p$ *для любого* p, $1\leqslant p<2$;

3) *ряд* (1.8) *всюду на* $[0, 1]$ *сходится к* $f(x)$;

4) (1.8) *не является рядом Фурье—Лебега функции* $f(x)$.

§ 2. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть $P(x)\in L_2[0, 1]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x),\ a_n=a_n(P)=\int_0^1 P(x)\varphi_n(x)\,dx$$

—ряд Фурье функции $P(x)$ по системе Φ. Обозначим

$$\Phi_N(x, P)=\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x),\ N=1, 2, \cdots;$$

$$P^*(x)=P_\Phi^*(x)=\sup_{1\leqslant N<+\infty}\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)\right|,\ x\in[0, 1],$$

$$n[P]=\min\{n: a_n\neq 0\},\ N[P]=\sup\{n: a_n\neq 0\},\ (N[P]\leqslant+\infty);$$
$$[P]=\{n: n[P]\leqslant n\leqslant N[P]\}.$$

Если $\sigma=\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая перестановка, то

$$(\sigma)\,\Phi_N(x, P)=\Phi_N(x, P(\sigma))=\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x),$$

$$(\sigma)\, P^*(x) = P^*(x, \sigma) = \sup_{1 \leq N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right|, \; x \in [0, 1],$$

$$[(\sigma)\, P] = [P(\sigma)] = [P].$$

Определение 2.1. Множество полиномов $\{P_j(x, \sigma_j)\}_{j=1}^{M}$, $1 \leq M \leq +\infty$, по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ назовем согласованным с последовательностью натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, если

$$N_1 < n[P_1], \; \max\{N_k, N[P_{k-1}]\} < n[P_k] \text{ при } k = 1, 2, \cdots, M.$$

Определение 2.2 Если $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара или Уолша, то Φ-интервалом назовем множество, которое можно представить в следующем виде: $(l \cdot 2^{-r}, (l+1) \cdot 2^{-r})$, $r = 1, 2, \cdots$; $0 \leq l \leq 2^r - 1$. Если Φ — тригонометрическая система или ортонормальный базис пространства $C[0, 1]$, то Φ-интервалом называем множество вида $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b).

Определение 2.3. Через $\theta(\Phi)$ обозначим класс множеств, каждое из которых (в случае, когда Φ — система Хаара или Уолша с точностью до конечного числа точек) можно представить в виде объединения конечного числа попарно не пересекающихся Φ-интервалов.

Определение 2.4. Перестановку σ последовательности $m, m + 1, \cdots, M$ назовем слабой, если для любого набора чисел a_n, $n = m, m + 1, \cdots, M$, выполняется неравенство

$$\sup_{1 \leq N < M} \left| \sum_{n=m}^{N} a_{\sigma(n)} \right| \leq 4 \sup_{m \leq N < M} \left| \sum_{n=m}^{N} a_n \right|.$$

Определение 2.5. Пусть $h = \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность монотонно убывающих чисел $h_k \to 0$, при $k \to \infty$. Скажем, что полином или ряд

$$P(x) = \sum_{i=m}^{M} a_i \varphi_i(x), \; m \leq M \leq +\infty,$$

из класса (h), если $|a_i| \leq h_i$, $i \in [P]$.

Если E — измеримое по лебегу множество, то через $|E|$ обозначим меру Лебега множества E, $\overline{E}$ — замыкание, а $\overset{0}{E}$ — внутренность множества E.

Ниже через Δ_n обозначена внутренность замыкания множества $\sup\{\chi_n(x)\}$.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, а $h = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонная последовательность с условием (1.7), тогда справедливо следующее

Предложение 1. *Для произвольных чисел β_0, γ_0, $0 < \beta_0 < 1$, $0 < \gamma_0 < 1$, натурального числа N' и множества $\Lambda \in \theta(\Phi)$ существуют множества $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$, U и полином*

$$\Psi(x) = \sum_{n=m}^{m'} a_n \chi_n(x),$$

обладающие свойствами:

1. $U \in \theta(\Phi)$, $\Lambda^{(i)} \in \theta(\Phi)$, $i = 1, 2$; $\|\Lambda^{(i)}| - |\Lambda| \cdot 2^{-1}| < 2^{-1} \eta_0$ *при* $i = 1, 2$, $\Lambda^{(1)} \cap \Lambda^{(2)} = \varnothing$; $\Lambda^{(i)} \cap U = \varnothing$, $i = 1, 2$, $\Lambda^{(1)} \cup \Lambda^{(2)} \cup U = \Lambda$; $|U| < \eta_0$, $i = 1, 2$;*

2. $N' < m$;

3. $|\Psi(x) - (-1)^{i+1}| < \beta_0$ *при* $x \in \Lambda_i$, $i=1, 2$; $\Psi(x) = 0$ *при* $x \,\overline{\in}\, \Lambda$;

4. $\Psi^*(x) \leqslant 2$ *при* $x \in \Lambda$; $\Psi^*(x) = 0$ *при* $x \,\overline{\in}\, \Lambda$;

5. $|a_n| \leqslant h_n$ *при* $n = m, m+1, \cdots, m'$;

6. $\int\limits_{\Lambda} \Psi(x)\, dx = 0$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что существует монотонно убывающая последовательность положительных чисел $\{h'_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$h'_n \leqslant h_n \text{ при } n = 1, 2, \cdots; \lim_{n\to\infty} h'_n \sqrt{n} = 0; \sum_{n=1}^{\infty} (h'_n)^2 = +\infty. \tag{2.1}$$

Выберем такое положительное число β', что

$$\beta' < \eta_0, \ \beta' < \beta_0, \ \beta' < \eta_0 (|\Lambda| - \eta_0)^{-1} \text{ (полагаем } \eta_0 < |\Lambda|). \tag{2.2}$$

Согласно определению класса $\theta(\Phi)$ множество Λ с точностью до конечного числа точек можно представить в виде

$$\Lambda = \bigcap_{i=1}^{s} \omega_i, \text{ где } \omega_i, \ 1 \leqslant i \leqslant s, \ \Phi\text{ — интервал; } \omega_i \cap \omega_j = \varnothing, \ 1 \leqslant i < j \leqslant s. \tag{2.3}$$

Пусть, далее натуральное число m таково, что

$$m > \max\{N', 2 \max_{1 \leqslant i \leqslant s} (|\omega_i|^{-1})\}, \ h'_n \sqrt{n} < \beta' \text{ при } n \geqslant m. \tag{2.4}$$

Очевидно, что для любого n, $n \geqslant m$

$$\text{либо существует } i, \ 1 \leqslant i \leqslant s \text{ такое, что } \Delta_n \subset \omega_i, \tag{2.5}$$

$$\text{либо } \Delta_n \cap \bigcup_{i=1}^{s} \omega_i = \varnothing. \tag{2.6}$$

Рассмотрим следующие ряды:

$$T(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} h'_n \chi_n(x), \ P(x) \sim \sum_{n=m}^{\infty} e_n \chi_n(x), \tag{2.7}$$

где $e_n = h'_n$, если $\Delta_n \subset \omega_i$ и $e_n = 0$ — в противном случае.

Из расходимости ряда в (2.1) и монотонности чисел h'_n, согласно результату работы [7] первый ряд в (2.7) расходится почти всюду на [0, 1], откуда следует (см. [8]), что

---

* Здесь и всюду ниже в случаях систем Хаара и Уолша равенство для множеств имеют место с точностью до конечного множества двоично рациональных точек.

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, S_N(x,\ T) = +\infty,\ \underline{\lim_{N\to\infty}}\, S_N(x,\ T) = -\infty \text{ п. в. на } [0,\ 1].$$

Так как для внутренних точек x множества Λ и $N > m$ имеем

$$S_N(x,\ P) = S_N(x,\ T) - S_{m-1}(x,\ T),$$

то получим, что почти всюду на Λ выполняется условие

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, S_N(x,\ P) = +\infty,\ \underline{\lim_{N\to\infty}}\, S_N(x,\ P) = -\infty. \tag{2.8}$$

Составим новый ряд

$$P'(x) \sim \sum_{n=m}^{\infty} a_n \chi_n(x), \tag{2.9}$$

где $a_n = e_n$ для тех значений n, $n \geqslant m$, при которых

$$|S_N(x,\ P)| < 1 \text{ при } x \in \Delta_n \subset \Lambda,\ N = m,\ m+1, \cdots,\ n-1$$

и полагаем $a_n = 0$ для остальных значений n.

Ясно, что

$$|S_N(x,\ P')| < 1 + \beta' \text{ при } N \geqslant m,\ x \in \overset{0}{\Lambda}, \tag{2.10}$$

$$S_N(x,\ P') = 0 \text{ при } N \geqslant m,\ x \overline{\in}\, \overline{\Lambda}. \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что ряд (2.9) сходится почти всюду на $[0,\ 1]$ к некоторой функции $P'(x)$, причем

$$1 \leqslant |P'(x)| < 1 + \beta' \text{ п. в. на } \Lambda;\ P'(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in}\, \overline{\Lambda}. \tag{2.12}$$

Исходя из теоремы Егорова можно указать такое натуральное число m', что

$$|\{\Lambda \setminus \{x : |S_{m'}(x,\ P')| > 1\}| > 4^{-1}\gamma_0. \tag{2.13}$$

Обозначим

$$\Lambda^{(1)} = \{x : S_{m'}(x,\ P') > 1\},\ \Lambda^{(2)} = \{x : S_{m'}(x,\ P') < -1\}, \tag{2.14}$$

$$U = \Lambda \setminus (\Lambda^{(1)} \cup \Lambda^{(2)}).$$

Очевидно, что $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$, $U \in \theta(\Phi)$. Оценим меру множества $\Lambda^{(1)}$. Исходя из условий (2.5), (2.6), (2.12), (2.13), (2.14) получим

$$0 = \int_{\Lambda} S_{m'}(x,\ P')\, dx \leqslant (1 + \beta')\, |\Lambda^{(1)}| - |\Lambda^{(2)}| + 4^{-1}\gamma_0.$$

Отсюда и из равенства $|\Lambda^{(2)}| = |\Lambda| - |\Lambda^{(1)}| - |U|$ следует, что $(2 + \beta') \times |\Lambda^{(1)}| - |\Lambda| + 2^{-1}\gamma_0 \geqslant 0$ и из (2.2)

$$|\Lambda^{(1)}| > 2^{-1}|\Lambda| - \frac{|\Lambda|\,\beta'}{2(2+\beta')} - \frac{2\cdot 4^{-1}\gamma_0}{2+\beta'} > 2^{-1}|\Lambda| - 2^{-1}\gamma_0.$$

Тем же путем можно установить, что $|\Lambda^{(2)}| > 2^{-1}|\Lambda| - 2^{-1}\gamma_0$. Легко убедиться, что полином

$$\Psi(x) = \sum_{n=m}^{m'} a_n \chi_n(x)$$

удовлетворяет всем условиям предложения 1.

Ниже, чтобы использовать общую терминологию и случай системы Хаара не отделять от случаев, когда Φ—одна из вышеуказанных систем, полином вида $\Psi(x)$, фигурующий в предложении 1, назовем слабо переставленным (формально это не противоречит определению слабо переставленного полинома).

Если Φ—одна из вышеуказанных систем, то справедлива следующая

Лемма 2.1. *Пусть ω — Φ-интервал, $\omega\subset[0, 1]$, δ', α' и $N^{(0)}$ — —положительные числа, $\{N_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел. Тогда существуют последовательности слабо переставленных полиномов $\{\Psi_i(x, \omega)\}_{i=1}^{\infty}$, ступенчатых функций $\{\tilde{\Psi}_i(x, \omega)\}_{i=1}^{\infty}$ и множеств $\{\Lambda_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{U_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$, обладающие свойствами:*

1. $\Lambda_i(\omega)$, $U_i(\omega)\in\theta(\Phi)$, $i\geqslant 1$; $U_i(\omega)\cap U_j(\omega)=\varnothing$ при $1\leqslant i<j<+\infty$;

$$\Lambda_n(\omega)=\Lambda_{2n}(\omega)\cup\Lambda_{2n+1}(\omega)\cup U_n(\omega),\ n\geqslant 1;$$

$$U_n(\omega)\cap(\Lambda_{2n}(\omega)\cup\Lambda_{2n+1}(\omega))=\varnothing,\ n=1,\ 2,\cdots;\ \Lambda_1(\omega)=\omega;$$

$$|U_n(\omega)|<2^{-(n+1)}\alpha',\ n\geqslant 1;\ \overline{\Lambda}_n(\omega)\subset\overline{\omega};$$

2. $|\Omega'|>|\omega|-\alpha'$, где $\Omega'(\omega)=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}\bigcup\limits_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\Lambda_n(\omega)=\omega\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U_n(\omega)$;

3. $$\tilde{\Psi}_n(x, \omega)=\begin{cases}1 \text{ при } x\in\Lambda_{2n}(\omega),\\ -1 \text{ при } x\in\Lambda_{2n+1}(\omega),\\ 0 \text{ при } x\overline{\in}\Lambda_{2n}\cup\Lambda_{2n+1}(\omega);\end{cases}$$

4. $\int\limits_{\Lambda_n}\tilde{\Psi}_n(x, \omega)\,dx<\delta' 2^{-(n+1)},\ n\geqslant 1;$

5. *почти всюду на множестве Ω' выполняются условия*

$$\varliminf_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\tilde{\Psi}_n(x, \omega)=-\infty,\ \varlimsup_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\tilde{\Psi}_n(x, \omega)=+\infty;$$

6. *последовательность полиномов $\{\Psi_k(x, \omega)\}_{k=1}^{\infty}$ согласована с последовательностью $\{N_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$, причем $N^{(0)}<n[\Psi_1(\omega)]$;*

7. $|\Psi_n(x, \omega)-\tilde{\Psi}_n(x, \omega)|<2^{-(n+1)}\delta'$ *при* $x\overline{\in}U_n(\omega)$, $\Psi_n^{*}(x, \omega)\leqslant C$ *при* $x\in[0, 1]$;

8. *если Φ—система Хаара и $i\in[\Psi_n(\omega)]$, то $|a_i|\leqslant h_i$, где a_i — коэффициент функции $\chi_i(x)$ в полиноме $\Psi_n(x, \omega)$.*

Доказательство. В случаях, когда Φ — тригонометрическая система, система Уолша или произвольный ортонормированный базис пространства $C[0, 1]$, доказательство леммы 2.1 можно найти в работе [9]. Докажем эту лемму в том случае, когда Φ—система Хаара.

Положив $\Lambda=\Lambda_1(\omega)$, $\gamma_0=2^{-4}\alpha'$, $\beta_0=2^{-3}\delta'$, причем можем предполагать, что $\alpha'<\delta'$, $N'=\max\{N^{(0)},\ N_1^{(0)}\}$ и применив предложение 1: определим полином $\Psi(x)=\Psi_1(x, \omega)$ и множества $\Lambda^{(1)}=\Lambda_2(\omega)$, $\Lambda^{(2)}=$

$=\Lambda_3(\omega)$, $U=U_1(\omega)$, которые удовлетворяют условиям 1. — 6. предложения 1. Предположим уже определены полиномы

$$\{\Psi_j(x,\omega)\}_{j=1}^{n-1} \text{ и множества } \{\Lambda_j(\omega)\}_{j=1}^{2n-1},\ \{U_j(\omega)\}_{j=1}^{n-1}.$$

Положим $\Lambda=\Lambda_n(\omega)$, $\eta_0=\alpha' 2^{-(n+3)}$, $\vartheta_0=\delta' 2^{-(n+2)}$, $N'=\max\{N_n^{(0)}, N[\Psi_{n-1}(\omega)]\}$ и применив прддложение 1, оиределим полином $\Psi(x)=$ $=\Psi_n(x,\omega)$ и множества $\Lambda^{(1)}=\Lambda_{2n}(\omega)$, $\Lambda^{(2)}=\Lambda_{2n+1}(\omega)$, $U=U_n(\omega)$, которые удовлетворяют всем условиям предложения 1.

Пусть указанным способом построены полиномы

$$\{\Psi_n(x,\omega)\}_{n=1}^{\infty} \text{ и множества } \{\Lambda_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty},\ \{U_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Из индукционного построения и из условия 1 предложения 1 легко следует справедливость условия 1. леммы 2.1. Методом индукции легко установить, что если $2^n\leqslant i<j<2^{n+1}$, то $\Lambda_i(\omega)\cap\Lambda_j(\omega)=\varnothing$. Нетрудно также убедиться, что

$$\bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\Lambda_i(\omega)\subset\bigcup_{i=2^{n-1}}^{2^n-1}\Lambda_i(\omega). \tag{2.15}$$

Обозначим

$$\Omega'=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\Lambda_i(\omega)\right).$$

Тогда, использовав (2.15) и тот факт, что $\Lambda_1(\omega)=\omega$, находим

$$\omega\setminus\Omega'=\omega\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\Lambda_i(\omega)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\omega\setminus\bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\Lambda_i(\omega)\right)=$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left\{\bigcup_{i=2^{n-1}}^{2^n-1}\Lambda_i(\omega)\right\}\setminus\bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\Lambda_i(\omega)\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i(\omega),$$

откуда

$$|\omega\setminus\Omega'|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|U_i(\omega)|<\alpha'.$$

Так как

$$\left|\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1}\Psi_i(x,\omega)\right|>1-\delta'>2^{-1} \text{ при } x\in\bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\Lambda_i(\omega),$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1}\sum_{j=m_i}^{m_i'}a_j\chi_j(x), \text{ где } \Psi_i(x,\omega)=\sum_{j=m_i}^{m_i'}a_j\chi_j(x), \tag{2.16}$$

расходится всюду на Ω'. Следовательно, верхний и нижний пределы частичных сумм ряда (2.16) соответственно равны $+\infty$ и $-\infty$ почти всюду на Ω'. Но так как из условия 4 предложения 1 и из того, что $\Lambda_i(\omega)\cap\Lambda_j(\omega)=\varnothing$ при $2^{n-1}\leqslant i<j<2^n$ следует

$$\left\{\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1}\Psi_i(x,\omega)\right\}^*\leqslant 2 \text{ при } x\in\Omega',$$

то легко убедиться, что почти всюду на Ω' выполняется условие

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sum_{n=1}^{k}\Psi_n(x,\omega)=+\infty,\quad \underline{\lim_{k\to\infty}}\sum_{n=1}^{k}\Psi_n(x,\omega)=-\infty. \tag{2.17}$$

Обозначим

$$\widetilde{\Psi}_n(x,\omega)=\begin{cases}1 \text{ при } x\in\Lambda_{2n}(\omega),\\ -1 \text{ при } x\in\Lambda_{2n+1}(\omega),\\ 0 \text{ при } x\overline{\in}\Lambda_{2n}(\omega)\cup\Lambda_{2n+1}(\omega).\end{cases}$$

Из условия 3 предложения 1 имеем

$$|\widetilde{\Psi}_n(x,\omega)-\Psi_n(x,\omega)|<2^{-(n+2)}\delta' \text{ при } x\in\Lambda_{2n}(\omega)\cup\Lambda_{2n+1}(\omega). \tag{2.18}$$

Отсюда, учитывая (2.17) и из определения множества Ω', легко установить, что выполняется условие 5 леммы 2.1. Из условия 4 предложения 1 и из (2.18) имеем

$$\left|\int\limits_{\Lambda_n(\omega)}\widetilde{\Psi}_n(x,\omega)\,dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{\Lambda_n(\omega)}\Psi_n(x,\omega)\,dx\right|+\int\limits_{\Lambda_{2n}(\omega)\cup\Lambda_{2n+1}(\omega)}\left|\widetilde{\Psi}_n(x,\omega)-\right.$$

$$\left.-\Psi_n(x,\omega)\right|dx+\int\limits_{U_n^*(\omega)}|\Psi_n(x,\omega)|\,dx\leqslant 2^{-(n+2)}\delta'+$$

$$+2\cdot 2^{-(n+3)}\alpha'<2^{-(n+1)}\delta'.$$

Условие 7 леммы 2.1 следует из условия 5 предложения 1. Тем самым лемма 2.1 доказана.

В условиях леммы 2.1 сделаем следующие замечания.

Замечание 2.1. *Если для k и i имеем*

$$U_k(\omega)\cap\Lambda_i(\omega)\neq\varnothing,\ \text{то}\ \Lambda_k(\omega)\subset\Lambda_i(\omega),\ k>i.$$

Замечание 2.2. *Если для некоторых чисел k, i, $k>i$, имеем*

$$\operatorname{supp}\widetilde{\Psi}_k(x,\omega)\subset\operatorname{supp}\widetilde{\Psi}_i(x,\omega)\neq\varnothing,$$

то либо $\operatorname{supp}\widetilde{\Psi}_k(x,\omega)\subset\operatorname{supp}\widetilde{\Psi}_i^+(x,\omega)$, *либо* $\operatorname{supp}\widetilde{\Psi}_k(x,\omega)\subset$

$\subset\operatorname{supp}\widetilde{\Psi}_i^-(x,\omega)$, *где* $\widetilde{\Psi}_i^+(x,\omega)=2^{-1}\{|\widetilde{\Psi}_i(x,\omega)|+\widetilde{\Psi}_i(x,\omega)\}$,

$$\widetilde{\Psi}_i^-(x,\omega)=\widetilde{\Psi}_i(x,\omega)-\widetilde{\Psi}_i^+(x,\omega).$$

Пусть $\{f_l(x)\}_{l=1}^{m}$ — конечная подсистема системы $\{\widetilde{\Psi}_i(x,\omega)\}_{i=1}^{\infty}$, построенной в лемме 2.1, и пусть $\{i_k(x)\}_{k=1}^{k(x)}=\{i: f_i(x)\neq 0,\ i=1,2,\cdots,m\}$ (если здесь множество справа пусто, то полагаем $k(x)=0$, и множество слева тоже пусто).

Лемма 2.2. *Существует целозначная функция $l(x)$, $0\leqslant\leqslant l(x)\leqslant m$, определенная на ω и перестановка σ последовательности $1, 2,\cdots, m$ такие, что*

$$\operatorname{sign}\{f_{\sigma(n_k(x))}(x)\} = \begin{cases} (-1)^{k+1} & \text{при } k \leqslant l(x), \\ (-1)^{l(x)+1} & \text{при } k > l(x), \end{cases}$$

где $\{n_k(x)\}_{k=1}^{k(x)}$, $n_k(x) < n_{k+1}(x)$ — *множество всех тех значений* n, $1 \leqslant n \leqslant m$, *для которых* $\sigma(n) \in \{i_k(x)\}_{k=1}^{k(x)}$.

Доказательство этой леммы можно найти в работе [6].

Замечание 2.3. *Пусть функции* $f_1(x), \cdots, f_m(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 2.2, q *и* δ — *некоторые числа, причем* $q = \delta r$, *где* r — *натуральное число, а* d *такое, что* $|df_k(x)| = |\delta|$ *при* $x \in \operatorname{supp}\{f_k(x)\}$. *Тогда*

$$\sup_{1 \leqslant N \leqslant m} \left| q + \sum_{n=1}^{N} d f_{\sigma(n)}(x) \right| \leqslant |q| + |\delta| \quad \textit{при } x \in E, \textit{ где}$$

$$E = \left\{ x : q + \sum_{n=1}^{m} df_n(x) = 0 \right\},$$

а $\sigma(n)$ — *перестановка, удовлетворяющая условиям леммы* 2.2.

Доказательство. Пусть $x \in E$, тогда из набора $df_1(x), \cdots, df_m(x)$ в точке x количество отличных от нуля функций равно $k(x)$. При этом из них $(k(x) - r)\, 2^{-1}$ функций в точке x принимают одинаковый с q знак, а $(k(x) + r)\, 2^{-1}$ функций — противоположный с q знака. Ясно, что $l(x) = k(x) - r + 1$ и согласно лемме 2.2 имеем

$$\left| \sum_{n=1}^{N} df_{\sigma(n)}(x) \right| \leqslant |\delta| \quad \text{при } N < n_{l(x)}(x).$$

Из леммы 2.2 следует, что при возрастании N, $n_{l(n)}(x) \leqslant N \leqslant m$ суммы

$$\sum_{n=1}^{N} df_{\sigma(n)}(x)$$

монотонно стремятся к $-q$. Откуда получим

$$\left| q + \sum_{n=1}^{N} df_{\sigma(n)}(x) \right| \leqslant |q| + |\delta| \quad \text{при } x \in E, \ 1 \leqslant N \leqslant m.$$

Замечание 2.3 доказано.

§ 3. Основная лемма и доказательство теорем

Пусть имеем множество B_0, $B_0 \in \theta(\Phi)$ и полином

$$L_0(x) = \sum_{i=\tau}^{\gamma} c_i \Psi_i(x),$$

где $\{\Psi_i(x)\}_{i=\tau}^{\gamma}$ — слабо переставленный полином по системе Φ. Предположим также, что выполняются условия

$$[\Psi_i] \cap [\Psi_j] = \varnothing \text{ при } \tau \leqslant i < j \leqslant \gamma; \ L_0(x) \neq 0 \text{ при } x \in B_0, \qquad (3.1)$$

$$\max\{|c_i|\, \Psi_i^*(x) : x \in [0, 1],\ \tau \leqslant i \leqslant \gamma\} \leqslant \varepsilon_0. \qquad (3.2)$$

Тогда справедлива следующая

Основная лемма. *Для произвольных чисел* ε, $\varepsilon > 0$, p, $1 \leqslant p < 2$, *натуральных* N *и* τ', $\gamma < \tau'$, *последовательности* $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, $N_k > 0$, *существуют множества* F, H, B, A, *полиномы*

$$L(x) = \sum_{n=\tau'}^{\gamma'} c_n \Psi_n(x);\quad Q_i(x) = \sum_{n=t_i+1}^{t_{i+1}} c_n \Psi_n(x),\ i = \tau, \tau+1, \cdots, \gamma,$$

где $t_\tau = \gamma'$, $t_i < t_{i+1}$ *при* $i = \tau, \tau+1, \cdots, \gamma$, *перестановки* σ_i *последовательностей* $\{n\}_{n=t_i+1}^{t_{i+1}}$, $i = \tau, \tau+1, \cdots, \gamma$, *удовлетворяющие условиям*

1. $F \in \theta(\Phi)$, $H \in \theta(\Phi)$, $B \in \theta(\Phi)$, $A \in \theta(\Phi)$,
   $F \cup H = B_0$, $F \cap H = \varnothing$, $A \cup B = F$, $A \cap B \leqslant \varnothing$, $|A| < \varepsilon$;

2. $\{\Psi_n(x)\}_{n=\tau}^{t_{\gamma+1}}$ — *последовательность слабо переставленных полиномов, согласованная с последовательностью* $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, *причем* $\max\{N, N[L_0]\} < n[\Psi_{\tau'}]$;

3. $|L_0(x) + L(x)| < \varepsilon$ *при* $x \in H$; $L^*(x) < \varepsilon$ *при* $x_0 \in B_0$;

4. $L(x) \neq 0$ *при* $x \in B$, $\max\{|c_n| \Psi_n^*(x) : x \in [0, 1], \tau' \leqslant n \leqslant \gamma'\} < \varepsilon$;

5. $|L_0(x) + T(x, \sigma)| < \varepsilon$ *при* $x \in B$, *где* $T(x, \sigma) = \sum_{i=\tau}^{\gamma} (\sigma_i) Q_i(x)$;

6. $T^*(x, \sigma) < \varepsilon$ *при* $x \overline{\in} F$; $|T(x, \sigma)| < \varepsilon$ *при* $x \overline{\in} F$,

7. $\left\{\sum_{n=\tau}^{\gamma} (c_n \Psi_n(x) + (\sigma_n) Q_n(x))\right\}^* < 8\varepsilon_0$ *при* $x \in B$,

8. $\int_A |L_0(x) + L(x) + T(x, \sigma)|^p dx < \varepsilon$.

9. *В случае, когда* Φ — *система Хаара, полиномы* $L(x)$ *и* $T(x, \sigma)$ *из класса* (h), $h = \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Без ограничения общности можем пологать $\varepsilon < \varepsilon_0$. Для данного p выберем такие β и α, чтобы выполнялись условия

$$0 < \beta < \varepsilon,\ 4(\beta^2 + \alpha) < \varepsilon,\ (5\varepsilon_0\beta + \nu\varepsilon_0\beta + 2\nu\varepsilon_0)^p\, 4(\beta^{2-p} + \alpha\beta^{-p}) < 2^{-1}\varepsilon \tag{3.3}$$

(здесь и всюду ниже обозначено $\nu = \gamma - \tau + 1$).

Пусть, далее $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — такая последовательность монотонно убывающих положительных чисел, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < 4^{-1}\varepsilon. \tag{3.4}$$

Существует конечное число Φ-интервалов $\{\omega_j^{(0)}\}_{j=1}^{r_0}$, удовлетворяющих условиям

$$B_0 = \bigcup_{j=1}^{r_0} \omega_j^{(0)};\ \omega_j^{(0)} \cap \omega_i^{(0)} = \varnothing \text{ при } 1 \leqslant j < i \leqslant r_0; \tag{3.5}$$

$$|L_0(x) - L_0(x')| < 4^{-1}\varepsilon \text{ при } x,\ x' \in \omega_j^{(0)},\ 1 \leqslant j \leqslant r_0. \tag{3.6}$$

Пусть определены полиномы

$$\bar{L}(x, \omega_k^{(0)}) = \sum_{i=1}^{m_k} b_i^{(k)} \tilde{\Psi}_i(x, \omega_k^{(0)}); \; L(x, \omega_k^{(0)}) = \sum_{i=1}^{m_k} b_i^{(k)} \Psi_i(x, \omega_k^{(0)}), \quad (3.7)$$

$k = 1, 2, \cdots, j-1$, $j \leqslant r_0$, где $\Psi_i(x, \omega_k^{(0)})$, $1 \leqslant i \leqslant m_k$, слабо переставленный полином, а $\tilde{\Psi}_i(x, \omega_k^{(0)})$, $i = 1, 2, \cdots, m_k$, последовательность ступенчатых функций.

Положим

$$N' = \max\{N, \; N[L(\omega_k^{(0)})] : k = 1, 2, \cdots, j-1\},$$
$$N_k^{(0)} = N_{k+N'}, \; k = 1, 2, \cdots; \; \omega = \omega_j^{(0)}, \; \delta' = \delta_j, \; \alpha' = \alpha r^{-1} \quad (3.8)$$

и применив лемму 2.1, определим последовательности полиномов $\{\Psi_i(x, \omega_j^{(0)})\}_{i=1}^{\infty}$, ступенчатых функций $\{\tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)})\}_{i=1}^{\infty}$ и множеств $\{\Lambda_i(\omega_j^{(0)})\}_{i=1}^{\infty}$, $\{U_i(\omega_j^{(0)})\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющих всем условиям леммы 2.1.

Выберем точку x_j, $x_j \in \omega_j^{(0)}$, из (3.1) имеем $L_0(x_j) \neq 0$. Натуральное число $q_j^{(0)}$ и положительное число a_j определим так, что

$$(q_j^{(0)})^{-1} \max\{|L(x_j), C+1\} < 4^{-1}\varepsilon, \; a_j = (q_j^{(0)})^{-1} |L_0(x_j)|. \quad (3.10)$$

Исходя из ряда

$$L'(x, \omega_j^{(0)}) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_j \tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)}) \quad (3.11)$$

составим новый ряд следующим образом. Положим

$$\tilde{L}'(x, \omega_j^{(0)}) \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(j)} \tilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)}), \quad (3.12)$$

где коэффициенты $\{c_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$ определены следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} c_i^{(j)} = a_j, \text{ если } 0 < |L_0(x_j) + S_m(x, L'(\omega_j^{(0)}))| \leqslant \nu \varepsilon_0 \beta^{-1} \text{ при всех} \\ x, \; x \in \Lambda_i(\omega_j^{(0)}) \text{ и для любого } m, \; m = 1, 2, \cdots, i-1, \\ c_i^{(j)} = 0 \text{ в остальных случаях.} \end{array}\right| \quad (3.13)$$

Обозначим

$$\left.\begin{array}{l} I_{j,m} = \{i : L_0(x_j) + S_m(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)})) = 0 \text{ при } x \in \Lambda_i(\omega_j^{(0)}), \; i \leqslant 2m+1, \\ K_{j,m} = \{i : |L_0(x_j) + S_m(x, \tilde{L}'(\omega_j^{(0)}))| > \nu\varepsilon_0\beta^{-1} \text{ при } x \in \Lambda_i(\omega_j^{(0)}), \; i < 2m+1, \end{array}\right| \quad (3.14)$$

$$H_m^{(j)} = \bigcup_{i \in I_{j,m}} \Lambda_i(\omega_j^{(0)}), \; F_m^{(j)} = \bigcup_{i \in K_{j,m}} \Lambda_i(\omega_j^{(0)}), \; G_m^{(j)} = \omega_j^{(0)} \setminus (H_m^{(j)} \cup F_m^{(j)}). \quad (3.15)$$

Легко проверить, что выполняются следующие условия:

а) если $c_i^{(j)} = 0$, то $c_k^{(j)} = 0$ при тех k, $k > i$, для которых

$$\Lambda_k(\omega_j^{(0)}) \subset \Lambda_i(\omega_j^{(0)});$$

б) из (3.10)—(3.13) и из условия 3. леммы 2.1 следует, что если хотя бы для одного m, $m < i$ выполняется неравенство

$$\{L_0(x_j)+S_m(x,\widetilde{L}'(\omega_j^{(0)}))\}\operatorname{sign}\{L_0(x_j)\}\leqslant 0 \text{ на } \Delta_i(\omega_j^{(0)}), \text{ то}$$

$$L_0(x_j)+S_l(x,\widetilde{L}'(\omega_j^{(0)}))=0 \text{ при } x\in\Delta_i(\omega_j^{(0)}) \text{ и всех } l,\ l\geqslant m;$$

в) если хотя бы для одного m, $m<i$ выполняется условие

$$|L_0(x_j)+S_m(x,\widetilde{L}'(\omega_j^{(0)}))|>\nu\,\varepsilon_0\beta^{-1} \text{ при } x\in\Delta_i(\omega_j^{(0)}), \text{ то}$$

$$L_0(x_j)+S_l(x,\widetilde{L}'(\omega_j^{(0)}))=L_0(x_j)+S_m(x,\widetilde{L}'(\omega_j^{(0)})) \text{ при } x\in\Delta_i(\omega_j^{(0)}),$$
$$l=m,\ m+1,\cdots;$$

г) из условий б), в) из (3.14), (3.15) легко следует, что

$$H_m^{(j)}\subset H_{m+1}^{(j)},\quad F_m^{(j)}\subset F_{m+1}^{(j)},\quad G_m^{(j)}\supset G_{m+1}^{(j)};$$

д) из определения множества $F_m^{(j)}$, условия в) и (3.10) легко установить, что

$$|L_0(x_j)+S_m(x,\widetilde{L}'(\omega_j^{(0)}))|\leqslant\nu\,\beta^{-1}\varepsilon_0+4^{-1}\varepsilon \text{ при } x\in\omega_j^{(0)},\ m\geqslant 1;$$

е) из условия 3. леммы 2.1 имеем $\widetilde{\Psi}_i(x,\omega_j^{(0)})=0$ при $x\in\omega_j^{(0)}$, $i=1,2,\ldots$

Из условий 2. и 5. леммы 2.1 следует, что почти для каждого x, $x\in\Omega'(\omega_j^{(0)})$ существует число m, удовлетворяющее условию $x\in F_m^{(j)}\cup H_m^{(j)}$. Отсюда и из (3.15), с точностью до множества меры нуль, получим

$$U(\omega_j^{(0)})=(\omega_j^{(0)}\setminus\Omega'(\omega_j^{(0)})\supset\omega_j^{(0)}\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}(F_m^{(j)}\cup H_m^{(j)})=\bigcap_{m=1}^{\infty}G_m^{(j)}.$$

Учитывая также условие г), будем иметь

$$\alpha'\geqslant|U(\omega_j^{(0)})|\geqslant\lim_{k\to\infty}\left|\bigcap_{m=1}^{k}G_m^{(j)}\right|=\lim_{m\to\infty}|G_m^{(j)}|.$$

Следовательно, существует целое число m_j, удовлетворяющее условию

$$|G_{m_j}^{(j)}|<2\alpha'=2\alpha r^{-1}. \tag{3.16}$$

Обозначим

$$F^{(j)}=F_{m_j}^{(j)},\ H^{(j)}=H_{m_j}^{(j)},\ G^{(j)}=G_{m_j}^{(j)}, \tag{3.17}$$

$$L(x,\omega_j^{(0)})=\sum_{i=1}^{m_j}c_i^{(j)}\Psi_i(x,\omega_j^{(0)}),\ \widetilde{L}(x,\omega_j^{(0)})=\sum_{i=1}^{m_j}c_i^{(j)}\widetilde{\Psi}_i(x,\omega_j^{(0)}). \tag{3.18}$$

Оценим меру множества $F^{(j)}$. Для этого заметим, что из б) и условий 1. и 3. леммы 2.1 вытекает

$$(L_0(x_j)+\widetilde{L}(x,\omega_j^{(0)}))\operatorname{sign}L_0(x_j)\geqslant 0 \text{ при } x\in\omega_j^{(0)}.$$

Отсюда, воспользовавшись условием 4 леммы 2.1, получим

$$\int_{\omega_j^{(0)}}|L_0(x)+\widetilde{L}(x,\omega_j^{(0)})|\,dx=\operatorname{sign}(L_0(x_j))\int_{\omega_j^{(0)}}|L_0(x_j)+$$

$$+\widetilde{L}(x,\omega_j^{(0)})|\,dx \leqslant |L_0(x_j)|\,|\omega_j^{(0)}| + \left|\int_{\omega_j^{(0)}} \widetilde{L}(x,\omega_j^{(0)})\,dx\right| \leqslant |L_0(x_j)|\,|\omega_j^{(0)}| + \delta_j.$$

Учитывая условия (3.14), (3.15), получим

$$|L_0(x_j)|\,|\omega_j^{(0)}| + \delta_j \geqslant \int_{\omega_j^{(0)}} |L_0(x_j) + \widetilde{L}(x,\omega_j^{(0)})|\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{F^{(j)}} |L_0(x_j) + \widetilde{L}(x,\omega_j^{(0)})|\,dx \geqslant \nu\,\varepsilon_0\beta^{-1}\,|F^{(j)}|.$$

Откуда, исходя из условий $|L_0(x_j)| \leqslant (\gamma-\tau+1)\,\varepsilon_0 = \nu\varepsilon_0$ и $\nu \geqslant 1$ получим

$$|F^{(j)}| \leqslant \beta\,|\omega_j^{(0)}| + \delta_j(\nu\varepsilon_0)^{-1}\,\beta \leqslant \beta\,|\omega_j^{(0)}| + \delta_j\,\beta\,\varepsilon^{-1}. \tag{3.19}$$

Предположим, что указанным способом построены полиномы и множества в формулах (3.17) и (3.18) при $j=1, 2, \cdots, r_0$. Обозначим

$$F' = \bigcup_{j=1}^{r_0} F^{(j)};\quad H = \bigcup_{j=1}^{r_0} H^{(j)};\quad G = \bigcup_{j=1}^{r_0} G_j;\quad F = F' \cup G,$$

$$L(x) = \sum_{j=1}^{r_0}\sum_{i=1}^{m_j} c_i^{(j)}\,\Psi_i(x,\omega_j^{(0)}) = \sum_{k=\tau'}^{\gamma'} c_k\,\Psi_k(x). \tag{3.20}$$

$$\widetilde{L}(x) = \sum_{j=1}^{r_0}\sum_{i=1}^{m_j} c_i^{(j)}\,\widetilde{\Psi}_i(x,\omega_j^{(0)}) = \sum_{k=\tau'}^{\gamma'} c_k\,\widetilde{\Psi}_k(x),$$

где $\gamma' = m_1 + m_2 + \cdots + m_{r_0} + \tau' - 1$, $c_k\,\Psi_k(x) = c_i^{(j)}\,\Psi_i(x,\omega_j^{(0)})$, $c_k\widetilde{\Psi}_k(x) = c_i^{(j)}\,\widetilde{\Psi}_i(x,\omega_j^{(0)})$, как только

$$k = \tau' + \sum_{l=1}^{j-1} m_l + i - 1.$$

Из (3.4), (3.5), (3.16), (3.19) имеем

$$|F'| \leqslant \sum_{j=1}^{r_0} |F^{(j)}| \leqslant \beta\sum_{j=1}^{r_0} |\omega_j^{(0)}| + \varepsilon^{-1}\beta\sum_{j=1}^{r_0}\delta_j < 2\beta;\quad |F| = |F'| + |G| \leqslant 2\alpha + 2\beta,$$
$$\tag{3.21}$$

Оценим сверху величину $|L_0(x) + L(x)|$ при $x \in H$. Пусть x — некоторая фиксированная точка множества H. Ясно, что существует единственное число l, удовлетворяющее условию $x \in \omega_l^{(0)}$, $1 \leqslant p \leqslant r_0$ и следовательно $x \in H_{m_l}^{(l)}$

$$|L_0(x) + L(x)| \leqslant |L_0(x) - L_0(x_l)| + |L_0(x_l) + \widetilde{L}(x)| + |L(x) - \widetilde{L}(x)|.$$

Из условия (3.6) имеем, что первое слагаемое в правой части неравенства меньше, чем $4^{-1}\varepsilon$. Исходя из условия е), из определения множества $H_{m_l}^{l}$, получим

$$|L_0(x_l) + \widetilde{L}(x)| = \left|\sum_{i=1}^{m_l} c_i^{(l)}\,\widetilde{\Psi}_i(x,\omega_l^{(0)}) + L_0(x_l)\right| = 0.$$

Рассмотрим последнее слагаемое

$$|L(x)-\tilde{L}(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{r_0}\sum_{i=1}^{m_j}|c_i^{(j)}||\Psi_i(x,\omega_j^{(0)})-\tilde{\Psi}_i(x,\omega_j^{(0)})|.$$

Предположим существует такое число i_0, что $1 \leqslant i_0 \leqslant m_l$ и $x \in U_i(\omega_l^{(0)})$. Так как $x \in H_{m_l}^{(l)}$, то из (3.14) и (3.15) следует, что $x \in \Lambda_i(\omega_l^{(0)}) \subset H_{m_l}^{(l)}$, $i \in I_{l,m_l}$. Тогда $\Lambda_i(\omega_l^{(0)}) \cap U_{i_0}(\omega_l^{(0)}) \neq \varnothing$ и согласно замечанию 2.1 имеем $\Lambda_{i_0}(\omega_l^{(0)}) \subset \Lambda_i(\omega_l^{(0)})$. Из свойства а) и (3.15), учитывая, что $i \in I_{l,m_l}$, получим $c_{i_0}^{(l)}=0$. Поэтому независимо от существования такого числа i_0 из условия 7. леммы 2.1 последует справедливость неравенства

$$|c_i^{(j)}||\Psi_i(x,\omega_j^{(0)})-\tilde{\Psi}_i(x,\omega_j^{(0)})| < \delta_j 2^{-(i+1)} \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant m_j,\ j=1,2,\cdots,r_0.$$

Отсюда и из (3.4)

$$|L(x)-\tilde{L}(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{r_0}\delta_j < 4^{-1}\varepsilon.$$

Следовательно

$$|L_0(x)+L(x)| < \varepsilon 4^{-1}+\varepsilon 4^{-1} < \varepsilon \text{ при } x \in H. \tag{3.22}$$

Пусть теперь $x \overline{\in} B_0$, тогда $x \overline{\in} \omega_j^{(0)}$ при $j=1,2,\cdots,r_0$ и поэтому $x \overline{\in} U_i(\omega_j^{(0)})$, $j=1,2,\cdots,r_0$, $i=1,2,\cdots,m_j$. Отсюда, из условий 3, 7. леммы 2.1, из (3.10)—(3.13) и е) получим

$$L^*(x) \leqslant \sum_{j=1}^{r_0}\sum_{i=1}^{m_j}|c_i^{(j)}||\Psi_i(x,\omega_j^{(0)})|+$$

$$+\sup\{|c_i^{(j)}|\Psi_i^*(x,\omega_j^{(0)}):1\leqslant j\leqslant r_0,\ 1\leqslant i\leqslant m_j\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{r_0}\sum_{i=1}^{m_j}|c_i^{(j)}||\Psi_i(x,\omega_j^{(0)})-\tilde{\Psi}_i(x,\omega_j^{(0)})|+\frac{\varepsilon}{4} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{r_0}\delta_j+4^{-1}\varepsilon < 2^{-1}\varepsilon \text{ при } x \overline{\in} B_0.$$

Отсюда и из (3.22) следует справедливость условия 3 основной леммы.

Оценим величину $|L_0(x)+L(x)|$ при $x \in F$. Пусть x — фиксированная точка множества F, а l, $1 \leqslant l \leqslant r_0$, такое число, что $x \in \omega_l^{(0)}$. Из условий (3.6), д) и е) имеем

$$|L_0(x)+L(x)| \leqslant |L_0(x)-L_0(x_l)|+|L_0(x_l)+\tilde{L}(x)|+|L(x)-\tilde{L}(x)| <$$

$$< \varepsilon 4^{-1}+\nu\beta^{-1}\varepsilon_0+\varepsilon 4^{-1}+\sum_{j=1}^{r_0}\sum_{i=1}^{m_j}|\Psi_i(x,\omega_j^{(0)})-\tilde{\Psi}_i(x,\omega_j^{(0)})|.$$

Если существует такое i_0, что $x \in U_{i_0}(\omega_l^{(0)})$, то из условий 3., 7. леммы 2.1 и (3.10) следует

$$|c_{i_0}^{(l)}||\Psi_{i_0}(x,\omega_l^{(0)})-\tilde{\Psi}_{i_0}(x,\omega_l^{(0)})| < \varepsilon 4^{-1} < \varepsilon 4^{-1}+\delta_l 2^{-(i_0+1)}.$$

Учитывая, что множества $U_i(\omega_j^{(0)})$, $1 \leqslant j < r_0$, $1 \leqslant i \leqslant m_j$, попарно не пересекаются из (3.8) и из условия 7. леммы 2.1 получим

$$|c_i^{(j)}||\Psi_i(x, \omega_j^{(0)}) - \widetilde{\Psi}_i(x, \omega_j^{(0)})| < \delta_j \cdot 2^{-(l+1)} \text{ при } x \in F,\ (i, j) \neq (i_0, l). \quad (3.23)$$

Следовательно, независимо от существования такого числа i_0, справедливо неравенство

$$|L_0(x) + L(x)| < \nu\beta^{-1}\varepsilon_0 + 3\varepsilon 4^{-1} + \sum_{j=1}^{r_0} \delta_j < \nu\beta^{-1}\varepsilon_0 + \varepsilon \text{ при } x \in F. \quad (3.24)$$

Для каждой функции $c_n \Psi_n(x)$, $\tau \leqslant n \leqslant \gamma$, определим полином $Q(x, \sigma_n)$ следующим образом. Пусть определены последовательности целых чисел $\{r_i\}_{i=\tau-1}^{n-1}$, множеств $\{B^{(i)}\}_{i=\tau-1}^{n-1}$ и полиномов

$$Q(x, \sigma_j) = (\sigma_j) \sum_{i=t_j+1}^{t_{j+1}} c_i \Psi_i(x),\ \widetilde{Q}(x, \sigma_j) = (\sigma_j) \sum_{i=t_j+1}^{t_{j+1}} c_i \widetilde{\Psi}_i(x),$$

$$j = \tau, \tau+1, \cdots, n-1;\ n-1 < \gamma,$$

где $\Psi_i(x)$, $t_1 + 1 \leqslant i \leqslant t_n$ — слабо переставленный полином, $\widetilde{\Psi}_i(x)$ — ступенчатая функция. Кроме того, пусть

$$B^{(i)} \in \theta(\Phi),\ B^{(\tau-1)} = F',\ B^{(i)} \subset B^{(i-1)} \text{ при } \tau \leqslant i \leqslant n-1. \quad (3.25)$$

Существуют такие Φ-интервалы, $\omega_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \cdots, r_n$, что

$$B^{(n-1)} = \bigcup_{j=1}^{r_n} \omega_j^{(n)},\ \omega_j^{(n)} \cap \omega_l^{(n)} \neq 0 \text{ при } 1 \leqslant j < l \leqslant r_n,$$

$$(3.26)$$

$$c_n| |\Psi_n(x) - \Psi_n(x')| < \varepsilon(4\nu)^{-1} \text{ при } x, x' \in \omega_j^{(n)},\ 1 \leqslant j \leqslant r_n.$$

Предположим также, что построены полиномы

$$Q(x, \omega_j^{(n)}) = \sum_{i=1}^{l_j} d_i^{(n)} \Psi_i(x, \omega_j^{(n)}),\ 1 \leqslant j \leqslant s-1,\ s \leqslant r_n, \quad (3.27)$$

где $\Psi_i(x, \omega_j^{(n)})$ — слабо переставленный полином. Обозначим

$$k_s^{(n)} = t_n - \tau' + 1 + \sum_{j=1}^{s-1} l_j;\ r_{\tau-1} = r_0;\ j(s, n) = \sum_{i=\tau-1}^{n-1} r_i + s. \quad (3.28)$$

Положим

$$\omega = \omega_s^{(n)},\ \alpha' = \alpha(\nu r_n)^{-1},\ \delta' = \delta_{j(s, n)} |F'| < \delta_{j(s, n)}, \quad (3.29)$$

$$N^{(0)} = N[Q(\omega_{s-1}^{(n)})];\ \{N_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty} = \{N k + k_s^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}. \quad (3.30)$$

При $s=1$ полагаем $N^{(0)} = N[Q(\sigma_{n-1})]$, $k_1^{(n)} = t_n - \tau' + 1$, а если одновременно $n = \tau$, то берем $N^{(0)} = N[L]$, $k_1^{(\tau)} = \gamma' - \tau' + 1$.

Применим лемму 2.1 для величин, приведенных в (3.29) и (3.30), определим последовательности слабо переставленных полиномов $\{\Psi_i(x, \omega_s^{(n)})\}_{i=1}^{\infty}$, ступенчатых функций $\{\widetilde{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)})\}_{i=1}^{\infty}$ и множеств $\{\Lambda_i \cdot (\omega_s^{(n)})\}_{i=1}^{\infty}$, $\{U_i(\omega_s^{(n)})\}_{i=1}^{\infty}$.

Выберем точку $x_s^{(n)}$, $x_s^{(n)} \in \omega_s^{(n)}$. Натуральное число $q_s^{(n)}$ и число $b_s^{(n)}$ определим так, чтобы выполнялись условия

$$(q_s^{(n)})^{-1} \max \{|c_n \Psi_n (x_s^{(n)})|, C+1\} < \varepsilon (4 \nu)^{-1}, \; b_s^{(n)} = |c_n \Psi_n (x_s^{(n)}) (q_s^{(n)})^{-1}. \tag{3.31}$$

В том случае, когда $c_n \Psi_n (x_s^{(n)}) = 0$ полагаем

$$Q(x, \omega_s^{(n)}) = 0 \cdot \Psi_1 (x, \omega_s^{(n)}), \; \widetilde{Q} (x, \omega_s^{(n)}) = 0 \cdot \widetilde{\Psi}_1 (x, \omega_s^{(n)}). \tag{3.32}$$

Пусть $c_n \Psi_n (x, \omega_s^{(n)}) \neq 0$. Рассмотрим следующие ряды:

$$\widetilde{Q}' (x, \omega_s^{(n)}) \sim \sum_{i=1}^{\infty} b_s^{(n)} \widetilde{\Psi}_i (x, \omega_s^{(n)}), \; \widetilde{Q}'' (x, \omega_s^{(n)}) \sim \sum_{i=1}^{\infty} d_{s,i}^{(n)} \Psi_i (x, \omega_s^{(n)}), \tag{3.33}$$

где коэффициенты $d_{s,i}^{(n)}$, $i \geqslant 1$ определяются следующим образом:

$$d_{s,i}^{(n)} = b_s^{(n)}, \text{ если } 0 < |c_n \Psi_n (x_s^{(n)}) + S_l (x, \widetilde{Q}' (\omega_s^{(n)})| < \nu \beta^{-1} \varepsilon_0$$
$$\text{при } x \in \Lambda_l (\omega_s^{(n)}), \; l = 1, 2, \cdots, i-1. \tag{3.34}$$

$d_{s,i}^{(n)} = 0$ — в остальных случаях.

Из свойств леммы 2.1, (3.31), (3.33) и (3,34) легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

а′) Если $d_{s,i}^{(n)} = 0$, то $d_{s,k}^{(n)} = 0$ для тех k, $k > i$, при которых
$$\Lambda_k (\omega_s^{(n)}) \subset \Lambda_l (\omega_s^{(n)}).$$

б′) Из условия 3 леммы 2.1 нетрудно убедиться, что если хотя бы для одного m, $m < i$, выполняется неравенство

$$\{c_n \Psi_n (x_s^{(n)}) + S_m (x, \widetilde{Q}'' (\omega_s^{(n)}))\} \operatorname{sign} \{c_n \Psi_n (x, \omega_s^{(n)})\} \leqslant 0 \text{ при } x \in \Lambda_i (\omega_s^{(n)}),$$

то $c_n \Psi_n (x_s^{(n)}) + S_l (x, \widetilde{Q}'' (\omega_s^{(n)})) = 0$ при $x \in \Lambda_l (\omega_s^{(n)})$, $l = m, m+1, \cdots$.

в′) Если хотя бы для одного m, $m < i$ выполняется условие

$$c_n \Psi_n (x_s^{(n)}) + S_m (x, \widetilde{Q}'' (\omega_s^{(n)})) < \nu \varepsilon_0 \beta^{-1} \text{ при } x \in \Lambda_l (\omega_s^{(n)}),$$

то $c_n \Psi_n (x_s^{(n)}) + S_l (x, \widetilde{Q}'' (\omega_s^{(n)})) = c_n \Psi_n (x_s^{(n)}) + S_m (x, \widetilde{Q}'' (\omega_s^{(n)})$

при $x \in \Lambda_l (\omega_s^{(n)})$, $l = m, m+1, \cdots$.

г′) Из (3.31)—(3.34), а также из условия 3. леммы 2.1 имеем

$$0 \leqslant \{c_n \Psi_n (x_s^{(n)}) + S_m (x, \widetilde{Q}'' (\omega_s^{(n)})\} \operatorname{sign} \{c_n \Psi_n (x_s^{(n)})\} \leqslant \nu \beta^{-1} \varepsilon_0 + \varepsilon (4\nu)^{-1}$$
$$\text{при } x \in \omega_s^{(n)}, \; 1 \leqslant m < +\infty.$$

д′) $\widetilde{\Psi}_i (x, \omega_s^{(n)}) = 0$ при $x \overline{\in} \omega_s^{(n)}$, $i = 1, 2, \cdots$.

Обозначим

$I_{\varepsilon, s, l} = \{i : c_n \Psi_n (x_s^{(n)}) + S_l (x, \widetilde{Q}'' (\omega_s^{(n)})) = 0$ при $x \in \Lambda_l (\omega_s^{(n)})$, $i \leqslant 2l+1$,

$$K_{n,\,s,\,l}=\{i:|c_n\Psi_n(x_s^{(n)})+S_l(x,\,\widetilde{Q}''(\omega_s^{(n)}))\geqslant\nu\beta^{-1}\varepsilon_0,\;x\in\Lambda_i(\omega_s^{(n)}),\;i\leqslant 2l+1,\tag{3.35}$$

$$B_{s,\,l}^{(n)}=\bigcup_{i\in I_{n,\,s,\,l}}\Lambda_i(\omega_s^{(n)}),\;D_{s,\,l}^{(n)}=\bigcup_{i\in K_{n,\,s,\,l}}\Lambda_i(\omega_s^{(n)});\;E_{s,\,l}^{(n)}=\omega_s^{(n)}\setminus(B_{s,\,l}^{(n)}\cup D_{s,\,l}^{(n)}).$$

Из условия 5' леммы 2. б'), и в') нетрудно установить, что почти для каждого x, $x\in\Omega'(\omega_s^{(n)})$ существует такое натуральное число $i(x)$, что

$$x\in B_{s,\,l}^{(n)}\cup D_{s\,l}^{(n)}\text{ при } l>i(x).\tag{3.36}$$

Из а'), б'), в') легко следует, что

$$B_{s,\,l}^{(n)}\subset B_{s,\,l+1}^{(n)},\;D_{s,\,l}^{(n)}\subset D_{s,\,l+1}^{(n)},\;E_{s,\,l}^{(n)}\supset E_{s,\,l+1}^{(n)}.\tag{3.37}$$

Используя условие 4. леммы 2.1, а также условие г') и (3.30), получим

$$\int\limits_{\omega_s^{n}}|c_n\Psi_n(x_s^{(n)})+S_l(x,\,\widetilde{Q}''(\omega_s^{(n)}))|\,dx=$$

$$=\operatorname{sign}\{c_n\Psi_n(x_s^{(n)})\}\int\limits_{\omega_s^{(n)}}\{c_n\Psi_n(x_s^{(n)})+S_l(x,\,\widetilde{Q}''(\omega_s^{(n)}))\}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant|c_n\Psi_n(x_s^{(n)})|\,|\omega_s^{(n)}|+\delta_{j(s,\,n)}|F'|.$$

Из (3.35) и того, что $D_{s,\,l}^{(n)}\subset\omega_s^{(n)}$, будем иметь

$$|c_n\Psi_n(x_s^{(n)})||\omega_s^{(n)}|+\delta_{j(s,\,n)}|F'|\geqslant\int\limits_{D_{s,\,l}^{(n)}}|c_n\Psi_n(x_s^{(n)})+S_l(x,\,\widetilde{Q}''(\omega_s^{(n)})|\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\nu\beta^{-1}\varepsilon_0\,|D_{s,\,l}^{(n)}|.$$

Откуда, учитывая, что $\omega_s^{(n)}\subset B^{(n-1)}\subset F'$ и $|c_n\Psi_n(x_s^{(n)})|<\varepsilon_0$, получим

$$|D_{s,\,l}^{(n)}|\leqslant|\omega_s^{(n)}|\,\beta\nu^{-1}+\delta_{j(s,\,n)}(\nu\,\varepsilon_0)^{-1}\beta\,|F'|.\tag{3.38}$$

Из (3.36) следует, что с точностью до множества меры нуль справедливо включение

$$\Omega'(\omega_s^{(n)})\subset\bigcup_{l=1}^{\infty}(B_{s,\,l}^{(n)}\cup D_{s,\,l}^{(n)})$$

и следовательно из условия 2. леммы 2.1

$$U(\omega_s^{(n)})=\omega_s^{(n)}\setminus\Omega'(\omega_s^{(n)})\supset\omega_s^{(n)}\setminus\bigcup_{l=1}^{\infty}(B_{s,\,l}^{(n)}\cup D_{s,\,l}^{(n)})=\bigcap_{l=1}^{\infty}E_{s,\,l}^{(n)}.$$

Тогда из (3.30) и (3.37) имеем

$$\lim_{l\to\infty}|E_{s,\,l}^{(n)}|\leqslant|U(\omega_s^{(n)})|=\alpha(\nu r)^{-1}.$$

Выберем целое число $l_s^{(n)}$ настолько большим, чтобы

$$|E_{s,\,l_s^{(n)}}^{(n)}|<2\alpha(\nu r)^{-1}.\tag{3.39}$$

Обозначим

$$\widetilde{Q}(x,\ \omega_s^{(n)}) = \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} d_{s,\,i}^{(n)}\,\widetilde{\Psi}_i(x,\ \omega_s^{(n)});\ \ Q(x,\ \omega_s^{(n)}) = \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} d_{s,\,i}^{(n)}\,\Psi_i(x,\ \omega_s^{(n)}), \tag{3.40}$$

$$B_s^{(n)} = B_{s,\,l_s^{(n)}}^{(n)},\ \ D_s^{(n)} = D_{s,\,l_s^{(n)}}^{(n)},\ \ E_s^{(n)} = E_{s,\,l_s^{(n)}}^{(n)}.$$

Учитывая условие б′) из 3.35 и 3.40 имеем

$$c_n\,\Psi_n(x_s^{(n)}) + \widetilde{Q}(x,\ \omega_s^{(n)}) = 0 \ \text{при}\ x \in B_s^{(n)}. \tag{3.41}$$

Отсюда, так как при любом i и x, $x \in B_s^{(n)}$, $1 \leqslant i \leqslant l_s^{(n)}$, из (3.31) (3.34) из условия 3. леммы 2.1 имеем, что либо $d_{s,\,i}^{(n)} = 0$, либо $a_{s,\,i}^{(n)} = b_s^{(n)}$, то из замечания 2.3 следует существование такой перестановки $\sigma_s^{(n)}$ набора чисел $1,\ 2, \cdots,\ l_s^{(n)}$, что

$$\left.\begin{aligned} R_s^{(n)}(x) = \sup_{1 \leqslant N \leqslant l_s^{(n)}} \Big| c_n\,\Psi_n(x_s^{(n)}) + \sum_{i=1}^{N} d_{s,\ \sigma_s^{(n)}(i)}\ \Psi_{\sigma_s^{(n)}(i)}(x) \Big| \leqslant \\ \leqslant |c_n\,\Psi_n(x_s^{(n)})| + b_s^{(n)} \leqslant \varepsilon_0 + \varepsilon\, 4^{-1} \ \text{при}\ x \in B_s^{(n)}. \end{aligned}\right| \tag{3.42}$$

Пусть x—некоторая фиксированная точка множества $B_s^{(n)}$. Тогда можно указать такое число i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant 2l_s^{(n)} + 1$, что $x \in \Lambda_{i_0}(\omega_s^{(n)}) \subset B_s^{(n)}$.) Если существует такое число i', $1 \leqslant i' \leqslant 2l_s^{(n)} + 1$, что $x \in U_{i'}(\omega_s^{(n)})$, то согласно замечанию 2.1 будем иметь $\Lambda_{i'}(\omega_s^{(n)}) \subset \Lambda_{i_0}(\omega_s^{(n)})$ и из а′), (3.35 (3.40) получим $d_{s,\,i'}^{(n)} = 0$. Следовательно, независимо от существования такого числа i', из условия 7. леммы 2.1 и из (3.30)

$$|d_{s,\,i}^{(n)}|\,|\Psi_i(x,\ \omega_s^{(n)}) - \widetilde{\Psi}_i(x,\ \omega_s^{(n)})| < 2^{-(i+1)}\,\delta_{j(s,\,n)} \ \text{при}\ 1 \leqslant i \leqslant l_s^{(n)},\ x \in B_s^{(n)}. \tag{3.43}$$

Из условий (3.2), (3.26). (3.41), (3.42) будем иметь

$$\begin{aligned} |c_n\,\Psi_n(x) + Q(x,\ \omega_s^{(n)})| \leqslant |c_n\,\Psi_n(x) - c_n\,\Psi_n(x_s^{(n)})| + \\ + |c_n\,\Psi_n(x_s^{(n)}) + \widetilde{Q}(x,\ \omega_s^{(n)})| + \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} |d_{s,\,i}^{(n)}|\,|\Psi_i(x,\ \omega_s^{(n)}) - \\ - \widetilde{\Psi}_i(x,\ \omega_s^{(n)})| \leqslant \varepsilon(4\nu)^{-1} + \delta_{j(s,\,n)} \ \text{при}\ x \in B_s^{(n)}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} \{c_n\,\Psi_n(x) + (\sigma_s^{(n)})Q(x,\ \omega_s^{(n)})\}^* \leqslant |c_n|\,\Psi_n^*(x) + |c_n\,\Psi_n(x) - c_n\,\Psi_n(x_s^{(n)})| + \\ + R_s^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} |d_{s,\,i}^{(n)}|\,|\Psi_i(x,\ \omega_s^{(n)}) - \widetilde{\Psi}_i(x,\ \omega_s^{(n)})| + \\ + \sup_{1 \leqslant i \leqslant l_s^{(n)}} |d_{s,\,i}^{(n)}|\,\Psi_i^*(x,\ \omega_s^{(n)}) \leqslant \varepsilon_0 + \varepsilon(4\nu)^{-1} + (\varepsilon_0 + \varepsilon 4^{-1}) + \delta_{j(s,\,n)} + \varepsilon(4\nu)^{-1} \leqslant \\ \leqslant 2(\varepsilon_0 + \varepsilon) + \delta_{j(s,\,n)} \ \text{при}\ x \in B_s^{(n)}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Так как $U_i(\omega_s^{(n)}) \subset \omega_s^{(n)}$ при $1 \leqslant i \leqslant l_s^{(n)}$, то исходя из (3.30), (3.31) и условий 1., 3., 7. леммы 2.1 имеем

$$(\sigma_s^{(n)})\, Q^*(x, \omega_s^{(n)}) < \varepsilon + \delta_{j(s,n)}; \quad |(\delta_s^{(n)})\, Q(x, \omega_s^{(n)})| < \delta_{j(s,n)} \text{ при } x \in \omega_s^{(n)}. \tag{3.46}$$

Оценим величину $|Q(x, \omega_s^{(n)})|$ при $x \in D_s^{(n)} \cup E_s^{(n)}$. Из (3.2), г') будем иметь

$$|Q(x, \omega_s^{(n)})| \leqslant |c_n \Psi_n(x_s^{(n)})| + |c_n \Psi_n(x_s^{(n)}) + \widetilde{Q}(x, \omega_s^{(n)})| +$$
$$+ |Q(x, \omega_s^{(n)}) - \widetilde{Q}(x, \omega_s^{(n)})| < \varepsilon_0 + \nu\varepsilon_0\beta^{-1} + \varepsilon +$$
$$+ \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} |d_{s,i}^{(n)}|\, |\Psi_i(x, \omega_s^{(n)}) - \widetilde{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)})|.$$

Для оценки последней суммы заметим, что так как множества $U_i(\omega_s^{(n)})$, $1 \leqslant i \leqslant l_s^{(n)}$, попарно не пересекаются, то для данного x может существовать только одно множество $U_{i'}(\omega_s^{(n)})$, которое содержит эту точку. В этом случае из (3.3) и из условий 3., 7. леммы 2.1 получим

$$|d_{s,i'}^{(n)}|\, |\Psi_{i'}(x, \omega_s^{(n)}) - \widetilde{\Psi}_{i'}(x, \omega_s^{(n)})| \leqslant (C+1)\, b_s^{(n)} < \varepsilon\, 4^{-1} < 4^{-1}\varepsilon +$$
$$+ \delta_{j(s,n)} 2^{-(l+1)}.$$

При $i \neq i'$, $1 \leqslant i \leqslant l_s^{(n)}$ имеем

$$|d_{s,i}^{(n)}|\, |\Psi_i(x, \omega_s^{(n)}) - \widetilde{\Psi}_i(x, \omega_s^{(n)})| < \delta_{j(s,n)} 2^{-(l+1)}.$$

Следовательно, независимо от существования такого числа i', из условия $\varepsilon < \varepsilon_0$ легко убедиться, что

$$|Q(x, \omega_s^{(n)})| \geqslant \nu\varepsilon_0 \beta^{-1} + 3\varepsilon_0 + \delta_{j(s,n)} \text{ при } x \in D_s^{(n)} \cup E_s^{(n)}. \tag{3.47}$$

Предположим указанным способом построены полиномы и множества в (3.40) при $s = 1, 2, \cdots, r_n$. Обозначим

$$B^{(n)} = \bigcup_{s=1}^{r_n} B_s^{(n)}, \quad D^{(n)} = \bigcup_{s=1}^{r_n} D_s^{(n)}, \quad E^{(n)} = \bigcup_{s=1}^{r_n} E_s^{(n)},$$

$$d_{s,i}^{(n)} \Psi_i(x, \omega_s^{(n)}) = c_j \Psi_j(x), \text{ если } j = t_n + \sum_{k=1}^{s-1} l_s^{(n)} + i \tag{3.48}$$

(при $s=1$ здесь сумму по k полагаем равной нулю)

$$Q(x, \sigma_n) = \sum_{s=1}^{r_n} \sum_{i=1}^{l_s^{(n)}} d_{s,\sigma_s^{(n)}(i)} \Psi_{\sigma_s^{(n)}(i)}(x) = (\sigma_n) \sum_{l=t_n+1}^{t_{n+1}} c_l \Psi_l(x).$$

Из (3.38), (3.39), (3.40) имеем

$$|D^{(n)}| \leqslant \beta\nu^{-1}|F'| + |F'|\,\beta(\nu\varepsilon_0)^{-1} \sum_{j=j(1,n)}^{j(r_n,n)} \delta_j, \tag{3.49}$$

$$|E^{(n)}| \leqslant 2\alpha\nu^{-1} \sum_{s=1}^{r_n} r_n^{-1} = 2\alpha\nu^{-1}. \tag{3.50}$$

Пусть $x \in B^{(n-1)}$, а s'—такое число, что $x \in \omega_{s'}^{(n)}$ Из условий (3.44), (3.46) следует

$$|c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)| \leqslant |c_n \Psi_n(x) + Q(x, \omega_{s'}^{(n)})| + \sum_{s=1\ (s \neq s')}^{r_n} |Q(x, \omega_s^{(n)})| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon (4\nu)^{-1} + \sum_{s=1}^{r_n} \delta_{j(s, n)} \quad \text{при} \quad x \in B^{n-1}. \tag{3.51}$$

При том же значении x из (3.2), (3.45), (3.46) получим

$$\{c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)\}^* \leqslant |c_n| \Psi_n^*(x) + \sum_{s=1\ (s \neq s')}^{r_n} |Q(x, \omega_s^{(n)})| +$$
$$+ \sup \{(\sigma_s^{(n)}) Q^*(x, \omega_s^{(n)}) : 1 \leqslant s \leqslant r_n,\ s \neq s'\} + \{c_n \Psi_n(x) +$$
$$+ (\sigma_{s'}^{(n)}) Q(x, \omega_{s'}^{(n)})\}^* \leqslant \varepsilon_0 + \sum_{s=1\ (s \neq s')}^{r_n} \delta_{j(s, n)} + \sup_{1 < s < r_n} \{\varepsilon +$$
$$+ \delta_{j(s, n)}\} + 2(\varepsilon_0 + \varepsilon) + \delta_{j(s', n)} \leqslant 7\varepsilon_0. \tag{3.52}$$

Отметим, что из (3.46) при $x \overline{\in} B^{(n-1)}$ имеем

$$|Q(x, \sigma_n)| \leqslant \sum_{s=1}^{r_n} \delta_{j(s, n)}, \tag{3.53}$$

$$Q^*(x, \sigma_n) \leqslant \sum_{n=1}^{r_n} |(\sigma_s^{(n)}) Q(x, \omega_s^{(n)})| + \sup_{1 < s < r_n} (\sigma_s^{(n)}) Q(x, \omega_s^{(n)}) <$$
$$< \varepsilon + 2 \sum_{s=1}^{r_n} \delta_{j(s, n)}. \tag{3.54}$$

Пусть построены полиномы и множества в (3.48) при $n = \tau, \tau + 1, \cdots, \gamma$. Обозначим

$$T(x, \sigma) = \sum_{n=\tau}^{\gamma} Q(x, \sigma_n),$$
$$B = \bigcap_{n=\tau}^{\gamma} B^{(n)},\ D = \bigcup_{n=\tau}^{\gamma} D^{(n)},\ E = \bigcup_{n=\tau}^{\gamma} E^{(n)},\ A = D \cup E \cup G. \tag{3.55}$$

Из (3.21) и (3.49) вспомнив, что $\nu = \gamma - \tau + 1$, получим

$$|D| = \sum_{n=\tau}^{\gamma} |D^{(n)}| \leqslant \beta |F'| \sum_{n=\tau}^{\gamma} \left\{\nu^{-1} + (\nu \varepsilon_0)^{-1} \sum_{j=j(1, n)}^{j(r_n, n)} \delta_j\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \beta |F'| (1 + \varepsilon_0^{-1} \varepsilon) < 4\beta^2. \tag{3.56}$$

Из (3.16), (3.17), (3.20), (3.50), (3.55) следует

$$|E \cup G| \leqslant \sum_{n=\tau}^{\gamma} |E^{(n)}| + \sum_{j=1}^{r_0} |G^{(j)}| \leqslant 4\alpha,\ |A| < 4(\alpha + \beta^2) < \varepsilon. \tag{3.57}$$

Легко убедиться также, что выполняются следующие условия:

$$F' = B \cup D \cup E,\ F = F' \cup G = A \cup B,\ H \cup F = B_0. \tag{3.58}$$

Оценим величину $|T(x, \sigma)|$ при $x \in D \cup E$. Для каждого x из $D \cup E$ существует число n_0, $\tau \leqslant n_0 \leqslant \gamma$ такое, что $x \in D^{(n_0)} \cup E^{(n_0)}$ и поэтому $x \in \omega_{s_0}^{(n_0)}$ при некотором s_0, $1 \leqslant s_0 \leqslant r_{n_0}$. Ясно, что $x \in B^{(n_0-1)} \subset \cdots \subset B^{(\tau-1)} = F'$ и $x \overline{\in} B^{(n)}$, если только $n \geqslant n_0$. Отсюда, исходя из условий (3.2), (3.4), (3,46), (3.47), (3.51), (3.53), получим

$$|T(x, \sigma)| \leqslant \sum_{n=\tau}^{n_0-1} |Q(x, \sigma_n) + c_n \Psi_n(x)| + \sum_{n=\tau}^{n_0-1} |c_n \Psi_n(x)| + \sum_{n=n_0+1}^{\gamma} |Q(x, \sigma_n)| +$$

$$+ \sum_{s=1\ (s \neq s_0)}^{r_{n_0}} |(\sigma_s^{(n_0)})\, Q(x, \omega_s^{(n_0)})| + |(\sigma_{s_0}^{(n_0)})\, Q(x, \omega_{s_0}^{(n_0)})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=\tau}^{n_0-1} \left\{ \varepsilon (4\nu)^{-1} + \sum_{s=1}^{r_n} \delta_{j(s,n)} \right\} + \sum_{n=n_0+1}^{\gamma} \sum_{s=1}^{r_n} \delta_{j(s,n)} + \sum_{s=1\ (s \neq s_0)}^{r_{n_0}} \delta_{j(s,n)} +$$

$$+ (\nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + 3\varepsilon_0 + \delta_{j(s_0, n_0)}) < \varepsilon\, 4^{-1} + \sum_{n=\tau}^{\gamma} \sum_{s=1}^{r_n} \delta_{j(s,n)} + \nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + 3\varepsilon_0 <$$

$$< \nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + (\nu + 4)\varepsilon_0. \tag{3.58'}$$

Заметим, что при $x \in G$ имеем $x \in B^{(n)}$ при $n = \tau - 1, \cdots, \gamma$ и из (3.53) имеем

$$|T(x, \sigma)| \leqslant \sum_{n=\tau}^{\gamma} \sum_{s=1}^{r_n} \delta_{j(s,n)} < \varepsilon < \nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + (\nu + 4)\varepsilon_0 \text{ при } x \in G. \tag{3.59}$$

Из (3.24), (3.58'), (3.59) следует

$$|L_0(x) + L(x) + T(x, \sigma)| < 2\nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + (\nu + 5)\varepsilon_0 \text{ при } x \in A.$$

Отсюда, из (3.57) и (3.3) будем иметь

$$\int\limits_A |L_0(x) + L(x) + T(x, \sigma)|^p\, dx \leqslant (2\nu \varepsilon_0 \beta^{-1} + (\nu + 5)\varepsilon_0)^p\, 4(\alpha + \beta^2) =$$

$$= 4(2\nu \varepsilon_0 + (\nu + 5)\varepsilon_0 \beta)^p (\alpha \beta^{-p} + \beta^{2-p}) < \varepsilon.$$

Тем самым установлено условие 8. основной леммы.

Из 3.5 следует

$$\sum_{n=\tau}^{\gamma} |c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)| < \sum_{n=\tau}^{\gamma} \left\{ \varepsilon (4\nu)^{-1} + \sum_{s=1}^{r_n} \delta_{j(s,n)} \right\} < \varepsilon \text{ при } x \in B. \tag{3.60}$$

Откуда, учитывая также условие (3.52), получим

$$\left\{ \sum_{n=\tau}^{\gamma} (c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)) \right\}^* \leqslant \sum_{n=\tau}^{\gamma} |c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)| +$$

$$+ \sup_{\tau < n < \gamma} \{c_n \Psi_n(x) + Q(x, \sigma_n)\}^* < \varepsilon + 7\varepsilon_0 < 8\varepsilon_0 \text{ при } x \in B.$$

Тем самым установлены условия 5. и 7. основной леммы. Из (3.53) (3.54), учитывая, что $B^{(n)} \subset F'$ при $n = \tau - 1, \tau, \cdots, \gamma$, имеем

$$|T(x, \sigma)| < \varepsilon \text{ при } x \overline{\in} F;\ T^*(x, \sigma) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=\tau}^{\gamma} |Q(x, \sigma_n)| + \sup_{\tau < n < \gamma} \{Q(x, \sigma_n)\}^* < 2\varepsilon,\ x \overline{\in} F,$$

чем и доказано условие 6. основной леммы. Условие 4. следует из (3.14), (3.15), (3.20) и из того, что $B \subset F'$. Условие 9. основной леммы следует из (3.8), (3.29), (3.30) и из леммы 2.1. Тем самым основная лемма доказана.*

Перейдем к доказательству теорем А. и В. Положим

$$\left.\begin{array}{l} L_1(x) = d_1\,\varphi_1(x) = \Psi_1(x), \text{ где } d_1 = h_1, \text{ если } \Phi\text{—система Хаара и} \\ \qquad d_1 = 1\text{—в остальных случаях.} \end{array}\right\} \tag{3.61}$$

Обозначим $M = \max\{L_1(x) : x \in [0, 1]\}$.

$$B_1 = \begin{cases} (0,\ 1), \text{если } \Phi\text{—система Хаара или Уолша,} \\ \operatorname{supp} L_1(x)\text{—в осталных случаях.} \end{cases} \tag{3.62}$$

Пусть последовательности чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} 1 > \varepsilon_k > \varepsilon_{k+1} > 0 \text{ при } k = 1,\ 2, \cdots;\ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{1/2} < \frac{d_1^2}{6\,M}, \\ 1 < p_k < 2,\ p_k < p_{k+1} \text{ при } k = 1,\ 2, \cdots;\ \lim_{k\to\infty} p_k = 2. \end{gathered} \tag{3.63}$$

Возьмем $L_0(x) = L_1(x)$, $B_0 = B_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $p = p_1$, $N = 1$, $\tau' = 2$, $N_k = N = 1$ при $k = 1, 2, \cdots$, и, применив основную лемму, определим полиномы

$$L(x) = L_2(x) = \sum_{n=\tau_2}^{\gamma_2} c_n\,\Psi_n(x);\ Q_1(x) = \sum_{n=t_1+1}^{t_2} c_n\,\Psi_n(x), \text{ где } \gamma_2 = t_1 < t_2,$$

перестановку σ_1 последовательности $t_1 + 1, \cdots, t_2$ и множества $F = F_1$, $H = H_1$, $A = A_1$, $B = B_2$, удовлетворяющие всем условиям этой леммы.

Предположим определены множество B_k, $B_k \in 0(\Phi)$ и полиномы

$$\begin{gathered} L_j(x) = \sum_{n=\tau_j}^{\gamma_j} c_n\,\Psi_n(x),\ j = 2, \cdots, k, \\ T_j(x,\ \sigma_j') = \sum_{n=\tau_j}^{\gamma_j} (\sigma_n) \sum_{i=t_n+1}^{t_{n+1}} c_i\,\Psi_i(x) = \sum_{n=\tau_j}^{\gamma_j} (\sigma_n)\,Q_n(x),\ j = 1,\ 2, \cdots, k. \end{gathered} \tag{3.64}$$

Причем

$$\begin{gathered} L_k(x) \neq 0 \text{ при } x \in B_k,\ \max\{|c_n\,\Psi_n^*(x)| : \\ : x \in [0,\ 1],\ \tau_j \leqslant n \leqslant \gamma_j\} \leqslant \varepsilon_{j-1},\ 1 \leqslant j \leqslant k. \end{gathered} \tag{3.65}$$

Положив

$$\begin{gathered} L_0(x) = L_k(x),\ \varepsilon_0 = \varepsilon_{k-1},\ B_0 = B_k,\ \varepsilon = \varepsilon_k,\ p = p_k, \\ N = N[Q_{\gamma_{k-1}}],\ \tau' = \tau_{k+1} = t_{\gamma_{k-1}} + 1,\ N_k = N,\ k = 1,\ 2, \cdots; \end{gathered} \tag{3.66}$$

---

* Отметим, что в основной лемме в целях, выходящих за рамки настоящей работы, на согласованность последовательности $\{\psi_n(x)\}$ наложены более сильные условия, чем нужны при доказательствах теорем А, В.

и применив основную лемму, определим полиномы

$$L_{k+1}(x) = L(x) = \sum_{n=\tau_{k+1}}^{\tau_{k+1}} c_n \Psi_n(x),$$

$$T_k(x, \sigma'_k) = \sum_{n=\tau_k}^{\tau_k} (\sigma_n) Q_n(x) = \sum_{n=\tau_k}^{\tau_k} (\sigma_n) \sum_{i=t_n+1}^{t_{n+1}} c_n \Psi_n(x) \tag{3.67}$$

и множества $F=F_k$, $H=H_k$, $A=A_k$, $B=B_{k+1}$, удовлетворяющие всем условиям основной леммы.

Предположим, что этим способом построены следующие полиномы и множества:

$$\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \ \{T_k(x, \sigma'_k)\}_{k=1}^{\infty}, \ \{F_k, H_k, B_k, A_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Обозначим

$$P_k(x, \sigma_k^{(0)}) = \sum_{n=\tau_k}^{\tau_k} \{c_n \Psi_n(x) + (\sigma_n) Q_n(x)\}, \ A_{\infty} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \ H_{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k, \ B_{\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k. \tag{3.68}$$

Из условий $F_k \cup H_k = B_k$, $A_k \cup B_{k+1} = F_k$ легко убедиться, что

$$[0, 1] = ([0, 1] \setminus B_1) \cup (H_{\infty} \cup A_{\infty} \cup B_{\infty}). \tag{3.69}$$

Напомним, что в случаях системы Хаара и Уолша все равенства множеств надо понимать с точностью до конечного числа точек, а последнее равенство выполняется с точностью до счетного числа двоично рациональных точек.

Рассмотрим ряд

$$P(x, \sigma) \sim \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x, \sigma_k^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=\tau_k}^{\tau_k} \left\{ c_n \Psi_n(x) + (\sigma_n) \sum_{i=t_n+1}^{t_{n+1}} c_n \Psi_n(x) \right\}. \tag{3.70}$$

Вспомнив, что $\Psi_n(x)$ — полином по системе Φ, подставляя их выражения в (3.70), получим переставленный ряд

$$P(x, \sigma, \Phi) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x). \tag{3.71}$$

Убедимся, что ряд (3.71) всюду на $[0, 1]$ сходится к всюду конечной функции $f(x)$. Действительно, пусть $x \in H_{\infty} \cup A_{\infty}$, тогда $x \in H_{k_0} \cup A_{k_0}$ при некотором k_0 и, следовательно, $x \in B_{k_0} \subset B_{k_0+1} \subset \cdots \subset B_1$ и $x \overline{\in} B_{k_0+1}$, поэтому из условий 3. и 6. основной леммы получим

$$\sum_{k=k_0+2}^{\infty} |P_k(x, \sigma_k^{(0)})| \leqslant \sum_{k=k_0+2}^{\infty} \{|L_k(x)| + |T_k(x, \sigma'_k)|\} <$$

$$< \sum_{k=k_0+2}^{\infty} 2\varepsilon_k \text{ при } x \overline{\in} B_{k_0+1}. \tag{3.72}$$

Так как из тех же условий имеем

$$P_k^*(x, \sigma_k^{(0)}) \leqslant L_k^*(x) + T_k^*(x, \sigma'_k) < \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k \text{ при } x \overline{\in} B_{k_0+1}, \ k \geqslant k_0 + 2, \tag{3.73}$$

то сходимость ряда (3.71) следует из ограниченности полинома

$$P_1(x, \sigma_1^{(0)}) + P_2(x, \sigma_2^{(0)}) + \cdots + P_{k_0+1}(x, \sigma_{k_0+1}).$$

Оценим последний полином при $x \in H_{k_0}$. Так как $x \in B_i$ при $1 \leqslant \leqslant i \leqslant k_0$ и $x \overline{\in} F_{k_0+1}$, то из условий 3., 5., 6. основной леммы следует

$$\left|\sum_{k=1}^{k_0+1} P_k(x, \sigma_k^{(0)})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{k_0-1} |P_k(x, \sigma_k^{(0)})| + |L_{k_0}(x) + L_{k_0+1}(x)| +$$

$$+ |T_{k_0+1}(x, \sigma'_{k_0})| + |T_{k_0}(x, \sigma'_{k_0})| < 2 \sum_{k=1}^{k_0+1} \varepsilon_k. \qquad (3.74)$$

Из (3.72) и (3.74) следует

$$|f(x)| < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \text{ при } x \in H_\infty. \qquad (3.75)$$

При $x \in A_{k_0}$ имеем $x \overline{\in} F_{k_0+1}$ и $x \in B_i$, $1 \leqslant i \leqslant k_0$. Поэтому из условий 3., 5., 6. основной леммы получим

$$\left|\sum_{k=1}^{k_0+1} P_k(x, \sigma_k^{(0)})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{k_0+1} |P_k(x, \sigma_k^{(0)})| + |L_{k_0}(x) + L_{k_0+1}(x) + T_{k_0}(x, \sigma'_{k_0}|) +$$

$$+ |T_{k_0+1}(x, \sigma'_{k_0+1})| < |L_{k_0}(x) + L_{k_0+1}(x) + T_{k_0}(x, \sigma'_{k_0})| + 2 \sum_{k=1}^{k_0+1} \varepsilon_k. \quad (3.76)$$

Отсюда и из (3.72)

$$|f(x)| < |L_{k_0}(x) + L_{k_0+1}(x) + T_{k_0}(x, \sigma'_{k_0})| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \text{ при } x \in A_{k_0}. \quad (3.77)$$

Если $x \in B_\infty \cup ([0, 1] \setminus B_1)$, то сходимость ряда (3.71) следует из условий 3.—7. основной леммы, при этом выполняется условие

$$|f(x)| < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \text{ при } x \in B_\infty \cup ([0, 1] \setminus B_1). \qquad (3.78)$$

Теперь в случаях систем Хаара и Уолша установим сходимость ряда (3.71) на счетном множестве Z двоично рациональных точек, не принадлежащих множеству $\{[0, 1] \setminus B_1\} \cup H_\infty \cup A_\infty \cup B_\infty$. Пусть $x_0 \in Z$, надо установить существование и конечность предела

$$\lim_{l \to \infty} 2^{-1} \{S_l(x_0 + 0, P(\sigma, \Phi)) + S_l(x_0 - 0, P(\sigma, \Phi))\}. \qquad (3.79)$$

Очевидно, что для любого фиксированного l существуют и конечны пределы $S_l(x_0 + 0, P(\sigma, \Phi))$ и $S_l(x_0 - 0, P(\sigma, \Phi))$, поэтому достаточно установить конечность пределов

$$\lim_{l \to \infty} S_l(x_0 + 0, P(\sigma, \Phi)), \lim_{l \to \infty} S_l(x_0 - 0, P(\sigma, \Phi)). \qquad (3.80)$$

Установим первое из них. Рассмотрим два случая:

I) существует такое натуральное число k_0, что x_0 является левым концом некоторого интервала ω, $\omega \subset A_{k_0} \cup H_{k_0}$,

II) такого числа k_0 не существует.

В случае 1), пусть $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ — такая последовательность, что $x_j > x_{j+1}$, при $j \geqslant 1$; $x_j \in \omega_j$ при $j \geqslant 1$; $x_j \to x_0$ при $j \to \infty$. Выберем число m_0 так, что

$$m_0 > k_0 + 1, \quad \sum_{k=m_0}^{\infty} \varepsilon_k < 2^{-1}\varepsilon. \tag{3.81}$$

Очевидно, что для любого натурального l существуют единственные числа $r(l)$ и $q(l)$, удовлетворяющие условиям

$$S_l(x, P(\sigma, \Phi)) = \sum_{k=1}^{r(l)} P_k(x, \sigma_k^{(0)}) + \Phi_{q(l)}(x, P_{r(l)+1}(\sigma_{r(l)+1}^{(0)})), \tag{3.82}$$

где $\Phi_{q(l)}(x, P_{r(l)+1}(\sigma_{r(l)+1}))$ — частичная сумма согласованного с перестановкой $\sigma_{r(l)+1}$ переставленного ряда Фурье функции $P_{r(l)+1} \times \times (x, \sigma_{r(l)+1})$. Отметим, что когда $r(l) = 0$ $(q(l) = 0)$, то первое (второе) слагаемое в (3.82) равно нулю.

Ясно, что если $l \to \infty$, то $r(l) \to \infty$. Следовательно, число l_0 можно выбрать таким, чтобы $r(l) > m_0$ как только $l > l_0$. Пусть $l' > l > l_0$, тогда из условий 3.—7. основной леммы будем иметь

$$|S_{l'}(x_j, P(\sigma, \Phi)) - S_l(x_j, P(\sigma, \Phi))| \leqslant$$
$$\leqslant |P_{r(l)+1}(x_j, \sigma_{r(l)+1}^{(0)}) - \Phi_{q(l)}(x_j, P_{r(l)+1}(\sigma_{r(l)+1}^{(0)}))| +$$
$$+ |\Phi_{q(l')}(x_j, P_{r(l')+1}(\sigma_{r(l')+1}^{(0)}))| \leqslant |P_{r(l)+1}(x_j, \sigma_{r(l)+1}^{(0)})| +$$
$$+ P^*_{r(l)+1}(x, \sigma_{r(l)+1}^{(0)}) + \sum_{k=r(l)+2}^{r(l')} \varepsilon_k + P^*_{r(l')+1}(x, \sigma_{r(l')+1}^{(0)}) < 2 \sum_{k=m_0}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon.$$

Прейдя к пределу при $j \to \infty$, получим

$$|S_{l'}(x_0 + 0, P(\sigma, \Phi)) - S_l(x_0 + 0, P(\sigma, \Phi))| < \varepsilon \text{ при } l, l' > l_0.$$

Следовательно в этом случае конечность первого предела в (3.80) доказана.

Рассмотрим II) случай. Если существует монотонно убывающая последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что $x_j \in [0, 1] \setminus B_1$ и $x_j \to x_0$ при $j \to \infty$, то конечность первого предела в (3.80) устанавливается тем же путем, что и в предыдущем случае. Предположим, что существует такая последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H_\infty \cup A_\infty \cup B_\infty$ и $x_j \downarrow x_0$ при $j \to \infty$. Исходя из условия II) можем полагать, что $x_j \overline{\in} A_k \cup H_k$ при $j \geqslant k$ (в противном случае последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ можем разряжать). Следовательно $x_j \in B_{k+1}$ при $j \geqslant k$. Пусть m_0 и l_0 выбраны так, что

$$\sum_{k=m_0}^{l_0} \varepsilon_j < 9^{-1}\varepsilon, \; r(l) > m_0, \text{ как только } l \geqslant l_0.$$

Пусть, далее, $l' > l > l_0$ и $j \geqslant r(l') + 1$. Тогда из условий 5. и 7. основной леммы, учитывая, что $x_j \in B_{r(l')+2} \subset B_{r(l')+1} \subset \cdots \subset B_1$ при $j \geqslant r(l') + 1$, получим

$$|P_k(x_j, \sigma_k^{(0)})| < \varepsilon_k, \; P^*_k(x_j, \sigma_k^{(0)}) < 8\,\varepsilon_{k-1} \text{ при } j \geqslant r(l') + 1, \; 1 \leqslant k \leqslant r(l') + 1.$$

Следовательно, при сделанных предположениях будем иметь

$$|S_{l'}(x_j, P(\sigma, \Phi)) - S_l(x_j, P(\sigma, \Phi))| < \varepsilon_{r(l)+1} + 8\,\varepsilon_{r(l)} +$$

$$+ \sum_{k=r(l)+2}^{r(l')} \varepsilon_k + 8\,\varepsilon_{r(l')+1} < 9 \sum_{k=m_0}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$$

(в случае, когда $r(l) = r(l')$, в правой части получится $9\,\varepsilon_{r(l)} < \varepsilon$). Перейдя к пределу при $j \to \infty$, получим фундаментальность последовательности $\{S_l(x_0+0, P(\sigma, \Phi))\}_{l=1}^{\infty}$. Следовательно, это последовательность имеет конечный предел. Тем же путем можно установить, что $\{S_l(x_0-0, P(\sigma, \Phi))\}_{l=1}^{\infty}$ имеет конечный предел при $l \to \infty$ и, тем самым, установим сходимость ряда (3.71) в точке x_0, $x_0 \in z$. И так имеем, что ряд (3.71) всюду на $[0, 1]$ сходится к некоторой конечной функции $f(x)$.

Теперь установим, что $f(x) \in L_p$ при любом p, $p \in [1, 2)$. Пусть p—фиксированное число из этой области. Из (3.63) следует существование числа k_0 такого, что $p < p_k$ при $k < k_0$. Из условия (3.77) следует, что $f(x)$ ограничена на множестве $\bigcup_{k=1}^{k_0} A_k$. Обозначим $E = B_\infty \cup \cup H_\infty \cup \{[0, 1] \setminus B_1\}$.

Из (3.75) и (3.78) следует ограниченность функции $f(x)$ на E. Из условий (3.69) и (3.77) будем иметь

$$\left\{\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^{k_0} \left\{\int_{A_k} |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left\{\int_{A_k} |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{\int_E |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

Первое и последнее слагаемые-конечные числа. Из условии 8. основной леммы и из неравенства $p < p_k$ при $k > k_0$, получим

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left\{\int_{A_k} |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left\{\int_{A_k} |f(x)|^{p_k}\,dx\right\}^{1/p_k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (\varepsilon_k)^{1/p_k} < \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sqrt{\varepsilon_k} < +\infty.$$

Следовательно, $f(x) \in L_p$ при $p \in [1, 2)$.

Убедимся, что ряд (3.71) не является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$. Из условий (3.63), (3.69), (3.75), (3.77), (3.78), учитывая также условие 8. основной леммы, получим

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_{A_\infty} |f(x)|\,dx + \int_E |f(x)|\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\int_{A_k} |f(x)|^{p_k}\,dx\right\}^{1/p_k} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k)^{1/p_k} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\varepsilon_k} < 3\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\varepsilon_k} < \frac{d_1^2}{M}.$$

Следовательно

$$\left| \int_0^1 \varphi(x) f(x)\, dx \right| \leqslant \frac{M}{d_1} \int_0^1 |f(x)|\, dx < \frac{d_0}{2}.$$

Но из (3.61) имеем, что коэффициент при $\varphi_1(x)$ в ряде (3.71) равен числу d_1, $d_1 \neq 0$, откуда вытекает, что ряд (3.71) не является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$. Теоремы A и B доказаны.

Отметим, что в случае системы Хаара почти по той же схеме можно получить более сильный результат, чем теорема B. Именно, справедлива следующая

Теорема C. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{3.83}$$

расходится на некотором множестве E, $E \subset [0, 1]$ $|E| > 0$, *если при этом*

$$\lim_{n \to \infty} a_n \chi_n(x) = 0 \text{ почти всюду на } E,$$

то существуют подряд ряда (3.83), то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x), \tag{3.84}$$

где для любого n *выполняется одно из следующих условий: либо* $c_n = a_n$ *либо* $c_n = 0$; *и перестановка* σ *последовательности* 1, 2,..., n..., *обладающие свойствами:*

I. *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x)$$

всюду на [0, 1] *сходится к всюду конечной функции* $f(x)$, $f(x) \in L_p$ *для любого* p, $p \in [1, 2]$,

II. *ряд* (3.84) *не является рядом Фурье—Лебега функции* $f(x)$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15. II. 1987

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ. Եռանկյունաչափական սիստեմով և $C[0,1]$-ի կամայական օրթոնորմալ բազիսով L_p-ի, $1 \leqslant p < 2$, ֆունկցիայի ամենուրեք զուգամիտող, տեղափոխված անդամներով շարքի գործակիցների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ գոյություն ունի եռանկյունաչափական սիստեմով, կամ $C[0,1]$-ի կամայական օրթոնորմալ բազիսով $f(x)$-ին, $f(x) \in L_p$, $1 \leqslant p < 2$, ամենուրեք զուգամիտող տեղափոխված անդամներով շարք, որը չի հանդիսանում $f(x)$-ի Ֆուրյեի շարքը։

G. M. MUSHEGIAN. *On coefficient of rearranged series by trigonometric system o and by arbitrary orthonormal basis of* $C[0, 1]$, *which converges everywhere t a function* L_p, $1 < p < 2$ (summary)

In this paper we prove that there exists rearranged everywhere convergent to f, $f \in L_p$, $1 < p < 2$ series by trigonometric system or by arbitrary orthonormal basis of $C[0, 1]$, which differs from the Fourier series of $f(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., Физ. мат. гиз., 1961.
2. Haar Affred. Gesamelte Arbelten, Budapest, 1959.
3. *G. Faber.* Über die Orthogonal funktionen des Herrn Haar, Jahrebericht Deuts chen Math., (19), 1910, 104—112.
4. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 6, 1964, 1391—1408.
5. *R. B. Grittenden and V. L. Shapiro.* Sets of the group 2", Ann. of Math., 81, 1965, 550—564.
6. *Г. М. Мушегян.* О восстановлении коэффициентов переставленного ряда Хаара, Мат. сборник, 130 (172), № 1 (5), 1986, 35—61.
7. *П. Л. Ульянов.* О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами, Изв. АН СССР, сер. матем, 28, № 4, 1964, 3—69.
8. *Ф. Г. Аргутюнян.* О рядах по системе Хаара ДАН Арм.ССР, 42, № 3, 1966, 134—140.
9. *Г. М. Мушегян, А. А. Саакян.* О единственности всюду сходящегося переставленного ряда по тригонометрической системе и по ортонормированным базисам С [0, 1], Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 22, № 6, 1987, 543—584.