ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 1, 1988 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.98

А. Б. НЕРСЕСЯН, М. Г. САДАКАШВИЛИ

О НЕТЕРОВОСТИ ДИСКРЕТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА-ХОПФА

Как известно, равномерная дискретизация с «шагом» постоянной длины уравнения Винера-Хопфа приводит к бесконечной алгебраической системе с теплицевой матрицей. В матричном случае имеется возможность выбрать для различных уравнений различный «шаг» дискретизации. При этом возникают интересные уравнения неисследованного, насколько нам известно, типа. Ниже изучается полученная таким способом система двух уравнений, предложенная в [1].

1°. Поставим вопрос о нормальной разрешимости системы

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\infty} K_{11}(n-j)\, y_j + \sum\limits_{j=0}^{\infty} K_{12}(n-mj)\, z_j = a_n \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} K_{21}(mn-j)\, y_j + \sum\limits_{j=0}^{\infty} K_{22}(n-j)\, z_j = b_n \end{cases} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots), \tag{1}$$

где $m \geqslant 2$—целое

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} |K_{ij}(s)| < +\infty;\ i,\ j=1,\ 2, \tag{2}$$

а заданные последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и искомые последовательности $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$ — из l_1 (абсолютно суммируемы).

С целью сведения задачи (1) к краевой задаче для аналитических функций применим дискретное преобразование Фурье (обозначаемое знаком $\frown$)

$$\begin{cases} \widehat{K}_{11}(\eta)\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \eta^j y_j\right) + \widehat{K}_{12}(\eta)\, z^+(\eta^m) = y^-(\eta) + \widehat{a}(\eta) \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} y_j \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \eta^n K_{21}(mn-j) + \widehat{K}_{22}(\eta)\, z^+(\eta) = z^-(\eta) + \widehat{b}(\eta). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь знаком $+$ $(-)$ обозначены функции, аналитические внутри (вне) единичного круга и непрерывные вплоть до границы.

Нетрудно убедиться, что система (3) переписывается в виде *

---

* Здесь и далее знак преобразования Фурье опускается, поскольку задача сводится к решению системы (4).

$$\begin{cases} K_{11}(\eta)\sum\limits_{r=0}^{m-1}\eta^r\, y_r^+(\eta)+K_{12}(\eta)\, z^+(\eta^m)=y^-(\eta)+a(\eta)\\ \sum\limits_{r=0}^{m-1}K_{21}^r(\eta)\, y_r^+(\eta)+K_{22}(\eta)\, z^+(\eta)=z^-(\eta)+b(\eta), \end{cases} \tag{4}$$

где

$$K_{21}^r(\eta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}K_{21}(mn-r)\,\eta^n,\ y_r^+(\eta)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}y_{mn-r}\,\eta^n\ (r=0,\,1,\cdots,\,m-1). \tag{5}$$

Поскольку $y^+(\eta)=\sum\eta^r\, y_r^+(\eta^m)$, то естественно выразить y_r^+ непосредственно через y^+. Обозначив $\varepsilon_p=\exp\{2\pi i\, p/m\}$ $(\varepsilon_p^m=1,\ p=0,\,1,\cdots,\,m-1)$ убеждаемся, что вопрос сводится к обращению матрицы Вандермонда. В итоге приходим к краевой задаче со сдвигами относительно двух пар функций $y^\pm$ и $z^\pm$

$$\begin{cases} K_{11}(\eta)\, y^+(\eta)+K_{12}(\eta)\, z^+(\eta^m)=y^-(\eta)+a(\eta)\\ \sum\limits_{p=0}^{m-1}Q_p(\eta)\, y^+(\varepsilon_p\eta)+K_{22}(\eta^m)\, z^+(\eta^m)=z^-(\eta^m)+b(\eta^m). \end{cases} \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что $Q_k(\eta)=Q_0(\varepsilon_k\eta)$ $(k=0,\,1,\cdots,\,m-1)$ Покажем, что можно брать $Q_0(\eta)=m^{-1}K_{21}(\eta)$.

Действительно

$$K_{21}^r(\eta^m)=\eta^r\sum_{p=0}^{m-1}(\varepsilon_p)^r\, Q_0(\varepsilon_p\eta)=m^{-1}\eta^r\sum_{p=0}^{m-1}(\varepsilon_p)^r\, K_{21}(\varepsilon_p\eta)= \tag{7}$$

$$=m^{-1}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\eta^{q+r}K_{21}(q)\sum_{p=0}^{m-1}\varepsilon_{(p+q)\,r}=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\eta^{sm}\,K_{21}(sm-r).$$

Таким образом, приходим к следующему окончательному виду краевой задачи

$$\begin{gathered} K_{11}(\eta)\, y^+(\eta)+K_{12}(\eta)\, z^+(\eta)=y^-(\eta)+a(\eta),\\ m^{-1}\sum_{p=0}^{m-1}K_{21}(\varepsilon_p\eta)\, y^+(\varepsilon_p\eta)+K_{22}(\eta^m)\, z^+(\eta)=z^-(\eta)+b(\eta^m), \end{gathered} \tag{8}$$

с дополнительным условием

$$z^\pm(\eta)=z_1^\pm(\eta^m). \tag{9}$$

2°. Решение $\{y^\pm,\ z^\pm\}$ задачи (8), вообще говоря, не обязано удовлетворять условию (9) $z^\pm(\eta)=z_1^\pm(\eta^m)$, что может нарушить эквивалентность задач (1) и (8). Достаточные условия эквивалентности содержит

Лемма. *Пусть выполнены условия*

$$K_{22}(\eta)\neq 0,\ \operatorname{ind}K_{22}(\eta)=\operatorname{var}\arg K_{22}(\eta)\leqslant 0\ (|\eta|=1). \tag{10}$$

Тогда любое решение $\{y^\pm(\eta),\ z^\pm(\eta)\}$ *задачи* (8) *удовлетворяет условию* (9).

▲ Во втором уравнении системы (8) заменим η на $\varepsilon_1\eta$ и вычтем из исходного. В результате получим

$$K_{22}(\eta^m)\{z^+(\eta)-z^+(\varepsilon_1\eta)\}=z^-(\eta)-z^-(\varepsilon_1\eta). \tag{11}$$

Из условия (10) следует (см. [2]), что $z^\pm(\eta)=z^\pm(\varepsilon_1\eta)$. Аналогично получим, что $z^\pm(\eta)=z^\pm(\varepsilon_p\eta)$, $p=0, 1,\cdots, m-1$, откуда и следует условие (9). ▼

Систему (8) сведем стандартным методом (см. [2]) к системе сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана

$$(\mathbf{K}\varphi)(t)\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{m-1}\left\{A_k(t)\varphi(\varepsilon_k t)+\frac{1}{\pi i}B_k(t)\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\varepsilon_k t}\right\}=g(t). \tag{12}$$

Здесь $|t|=1$ и

$$A_0(t)=\begin{vmatrix}1+K_{11}(t) & K_{12}(t)\\ m^{-1}K_{21}(t) & 1+K_{22}(t^m)\end{vmatrix},\quad B_0(t)=A_0(t)-2E,$$

$$A_k(t)=B_k(t)=\begin{vmatrix}0 & 0\\ m^{-1}K_{21}(\varepsilon_k t) & 0\end{vmatrix} \tag{13}$$

$$(k=1, 2,\cdots, m-1).$$

В общепринятых обозначениях (см. [2]) оператор $\mathbf{K}$ имеет вид

$$\mathbf{K}=\sum_{k=0}^{m-1}\{A_k(t)w^k+B_k(t)w^kS\}, \tag{14}$$

где S—оператор сингулярного интегрирования на единичной окружности, а w — оператор карлемановского сдвига $w_\varphi=\varphi(\varepsilon_1 t)$, $|t|=1$.

3°. Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть* $A_{22}(\eta)\neq 0$, $\operatorname{ind}K_{22}(\eta)\leqslant 0$ и

$$\Delta(t)\overset{\text{det}}{=}mK_{22}(t^m)\prod_{p=0}^{m-1}K_{11}(\varepsilon_p t)-$$

$$-\sum_{p=0}^{m-1}K_{21}(\varepsilon_p t)K_{12}(\varepsilon_p t)\prod_{s=1}^{m-1}K_{11}(\varepsilon_{p+s}t)\neq 0,\quad |t|=1. \tag{15}$$

Тогда задача (1) *нетерова и ее индекс вычисляется по формуле*

$$\varkappa=-(2\pi)^{-1}\operatorname{var}\arg\Delta(t),\quad |t|=1. \tag{16}$$

▲ Нётеровость оператора K эквивалентна соотношению $\sigma K(t, j)\neq 0$, $|t|=1$; $j=\pm 1$, где σK — символ оператора $\mathbf{K}$ (см. [2], гл. II, § 7). В случае, когда оператор имеет вид (14), несложные вычисления приводят к соотношениям

$$\det\sigma\mathbf{K}(t,-1)=4^m,\quad \det\sigma K(t,+1)=\Delta(t). \tag{17}$$

Остается применить теорию (гл. II книги [2]) и учесть доказанную выше лемму. ▲

Замечание. В случае $K_{11}(t) \neq 0$ ($|t|=1$) формула (16) принимает следующий вид:

$$2\pi\varkappa = m \operatorname{var} \arg K_{11}(t) +$$

$$+ \operatorname{var} \arg \left\{ \sum_{p=0}^{m-1} \left[K_{22}(t^m) - \frac{K_{12}(\varepsilon_p t)\, K_{21}(\varepsilon_p t)}{K_{11}(\varepsilon_p t)} \right] \right\}, \quad |t| = 1. \qquad (18)$$

В заключение выражаем признательность Г. С. Литвинчуку за плодотворные обсуждения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 2. IX. 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян*. Разрешимость некоторых уравнений и задачи сопряжения со сдвигом. Республиканская научно-практическая конференция по методике преподавания математики и механики в вузе .Тезисы докладов, Ереван, 1983, 40—42.
2. *Г. С. Литвинчук*. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, «Наука», М., 1977.