

УДК: 52.53

## МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ. I. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В. Ю. ТЕРЕБИЖ

Поступила 1 февраля 1990

Проводится последовательное рассмотрение процесса формирования изображения, сводящегося к линейному размыванию и добавлению белого пуассоновского шума. Учитываются вероятностный характер размывания изображения, так что подход применим и для восстановления слабых источников. Априорная информация естественно включает неотрицательность решения. При помощи метода Дарвина—Фаулера найдено явное выражение (18) для вероятности получения наблюдаемого распределения отсчетов, максимизация которого дает наиболее правдоподобную оценку оригинала. Частный случай составляет задача оптимальной фильтрации белого шума.

1. *Введение.* Почти всякая задача интерпретации данных эксперимента включает т. н. *обратную задачу* или — в давней оптической терминологии — *проблему восстановления изображения*. Она сводится обычно к нахождению решения уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x, x') s(x') dx' + \xi_r(x) = f(x), \quad (1)$$

где  $s(x)$  — искомый оригинал;  $h(x, x')$  — *аппаратная функция* или *функция рассжания точки* (Point Spread Function), описывающая размытие изображения на предшествующем регистрации этапе;  $\xi_r(x)$  — аддитивный шум, представляющий собой реализацию случайного процесса  $\xi(x)$ ;  $f(x)$  — наблюдаемое изображение. Мы рассматриваем для простоты одномерную задачу, поскольку введение дополнительных измерений не вносит принципиальных усложнений.

Чаще всего в (1) считаются заданными функции  $h(x, x')$  и  $f(x)$ , а также характеристики процесса  $\xi(x)$ , но, конечно, не его конкретная реализация  $\xi_r(x)$ , содержащаяся в изображении. Именно последнее обстоятельство превращает известную задачу обращения (1) в сложную проблему, которой посвящено большое количество исследований (см.

[1—6] и цитированную там литературу). Причина трудностей связана с важной ролью, которую играет высокочастотная составляющая шума, так что формальное решение (1) оказывается чрезвычайно чувствительным к выбору  $\xi_r(x)$ : различным реализациям шума, вполне типичным при заданных его характеристиках (среднем значении, спектральной плотности и т. п.) отвечают сильно различающиеся формальные решения. В свою очередь, изменчивость спектра реализаций шума обусловлена независимостью близких его значений и медленным (экспоненциальным) уменьшением плотности распределения [7].

Устойчивые методы решения (1), позволяющие найти более или менее близкую к оригиналу оценку  $\hat{s}(x)$ , условно можно разделить на две группы — линейные (например, оптимальной фильтрации, регуляризации) и нелинейные, опирающиеся главным образом на информационные критерии. Сначала практика, а затем и теоретические исследования показали принципиальное превосходство методов второй группы. Это проявляется, в частности, в эффекте *сверхразрешения*, когда мелкие детали, казалось бы, полностью размытые системой формирования изображения (находящиеся в частотной области, «срезанной» аппаратной функцией), восстанавливаются нелинейными алгоритмами. Другими словами, эти алгоритмы обеспечивают значительно более высокое разрешение по сравнению с тем, которое определяется классическим критерием Рэлея. Эффект сверхразрешения обусловлен оптимальным продолжением имеющейся спектральной информации о решении в область высоких частот спектра мощности.

Вместе с тем следует сказать, что обоснование нелинейных методов не достигло пока надлежащей ясности. Фактически каждый из них вводит дополнительные предположения *ad hoc*, не вытекающие с неизбежностью из существа дела. Само наличие многих нелинейных методов, а к ним относятся несколько вариантов метода максимума энтропии, разновидности метода аналитического продолжения спектра, максимума информации и т. д., показывает отсутствие единого подхода, причем такое положение не диктуется разнообразием априорной информации. В частности, сейчас выясняется, что требование максимальной энтропии решения, ограниченной лишь «связями» вида (1), не гарантирует решения, близкого к наиболее вероятному [8]. По-видимому, логически безупречным можно признать лишь интуитивно очевидный подход, основанный на методе максимума правдоподобия (ММП). Он требует, чтобы в качестве оценки исходного распределения (оригинала) было принято такое распределение яркости, при котором наиболее вероятно получить реально наблюдавшееся изображение.

Следующее замечание представляется уместным в связи с общей постановкой проблемы восстановления изображения и рассмотрением с этой целью уравнения (1). Механизм размытия изображения имеет вероятностную природу, и лишь при очень большой яркости оригинала можно заменить действительный его вклад в каждый элемент картины средним значением — первым слагаемым в левой части (1). Таким образом, уже при написании этого уравнения предполагается бесконечно высокое отношение сигнала к внутреннему шуму, который представляет собой естественные флуктуации реализации сигнала.

Излагаемый ниже подход свободен от указанного предположения и опирается на общее рассмотрение процесса формирования изображения. По этой причине он применим и для восстановления слабых изображений. Основное внимание уделяется естественности постановки задачи и последовательности в применении ММП. Аддитивный шум считается пуассоновским, так что он автоматически удовлетворяет условию неотрицательности. Данная статья посвящена выводу функционала, максимум которого отвечает оптимальной оценке оригинала. Сопоставление с другими подходами, проблема сверхразрешения, двумерная форма записи, примеры и применение результатов к решению астрономических задач изложены в последующих статьях.

2. *Постановка задачи* иллюстрируется схемой, представленной на рис. 1 и называемой в дальнейшем для краткости схемой SHNR. В данном случае она включает действительный пример восстановления при помощи описанного ниже алгоритма.

Введем сразу необходимую дискретизацию и будем рассматривать искомое теоретическое распределение яркости — оригинал — как совокупность неотрицательных отсчетов  $(s_1, s_2, \dots, s_n) \equiv \{s_k\}$ , нормированных так, что

$$0 \leq s_k \leq 1, \quad \sum_{k=1}^n s_k = 1. \quad (2)$$

Предположим далее, что в соответствии с распределением  $\{s_k\}$  реализованы  $N_*$  событий. Оценку  $\widehat{N}_*$  неизвестной детерминированной величины  $N_*$  еще предстоит найти. Реализованное распределение событий по бинам  $\{g_k\}$  содержит, вообще говоря, флуктуации и не совпадает с  $\{s_k\}$ .

Переходя к описанию системы формирования изображения  $H$ , примем, что событие оригинала, имевшее место в  $k$ -ом бине, с вероятностью  $(h_{jk})$  перейдет в  $j$ -ый бин изображения, причем

$$\sum_{j=1}^m h_{jk} = 1, \quad m \geq n. \quad (3)$$

Судьба каждого из  $N_*$  событий не зависит от распределения других событий, т. е. предполагается линейность системы  $H$ . За матрицей  $(h_{jk})$  сохраним наименование функция рассеяния точки (ФРТ). Инвариантность системы к сдвигам не обязательна. Для учета эффектов типа дефокусировки в ФРТ можно ввести свободные параметры, но пока будем считать эту функцию полностью известной. При  $h_{jk} = \delta_{j,k}$ , где  $\delta_{j,k}$  — символ Кронекера, мы имеем задачу очищения изображения от шума.

Пусть шум задается совокупностью случайных величин  $\{\xi_j\}$ , которые представляют собой добавки к количеству событий оригинала в каждом бине изображения. Предполагается, что эти величины взаимно независимы (белый шум) и подчиняются закону Пуассона:

$$\text{Pr}(\xi_j = r) = e^{-b_j} \frac{(b_j)^r}{r!}, \quad r = 0, 1, \dots, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Как известно, при этом среднее значение  $\xi_j$  равно ее дисперсии:

$$\langle \xi_j \rangle = D(\xi_j) = b_j, \quad (5)$$

и фон может быть в среднем как однородным ( $b_j \equiv b$ ), так и меняющимся произвольным образом. Для удобства введем нормированную к 1 совокупность  $\{\beta_j\}$  — относительное распределение средней яркости шума:

$$\sum_{j=1}^m b_j = B, \quad \beta_j = b_j/B, \quad \sum_{j=1}^m \beta_j = 1. \quad (6)$$

Наконец, наблюдаемое изображение характеризуется распределением  $\{N_j\}$  количества зарегистрированных событий по бинам, включающим как перераспределенные события оригинала, так и добавки шума. Всего наблюдается

$$N = \sum_{j=1}^m N_j \quad (7)$$

событий. Вводя вновь относительное распределение, получим:

$$0 \leq f_j = N_j/N \leq 1, \quad \sum_{j=1}^m f_j = 1. \quad (8)$$

Таким образом, предполагаются известными следующие величины: 1) протяженности оригинала  $n$  и выходного изображения  $m$  (при отсутствии информации о размерах источника следует принять  $n = m$ ); 2) функция рассеяния точки  $(h_{jk})$ ; 3) средние интенсивности шума в бинах изображения  $\{b_j\}$ ; 4) наблюдаемое распределение событий по бинам  $\{N_j\}$ . Нужно найти оценки относительного распределения яркости оригинала  $\{s_k\}$  и полной его яркости  $\hat{N}_*$ .

Вообще говоря, иногда случается, что основная часть шума вносится на стадии, предшествующей формированию изображения. Эту схему, которую обозначим как SNHR, мы рассмотрим в разделе 6.

3. Восстановление по реализации или без внешнего шума. Дальнейшее изложение станет значительно понятнее, если мы рассмотрим сначала простые случаи, когда оценка оригинала производится на основании конечной выборки (переход SR на схеме рис. 1) или после этапа формирования

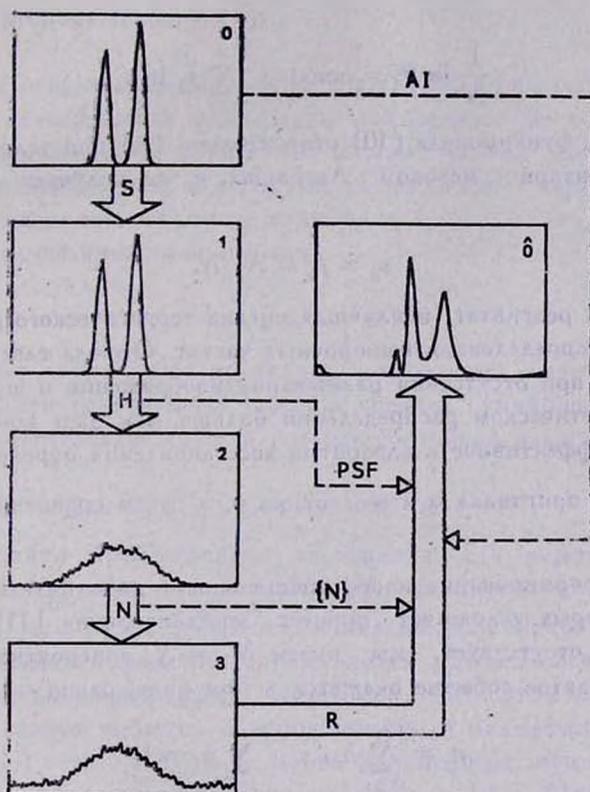


Рис. 1. Схема формирования и восстановления изображения. Использованы обозначения: 0—оригинал; S—образование конечной выборки; 1—реализация оригинала; H—система формирования изображения; 2—размытое изображение с флуктуациями; N—аддитивный шум; 3—конечное изображение; R—алгоритм восстановления; 6—оценка оригинала; AI—априорная информация; PSF—функция рассеяния точки; {N}—средние характеристики шума.

изображения прибором (SHR). Эти случаи чрезвычайно редко находят практические применения, поскольку трудно избежать внесения шума, однако с принципиальной точки зрения такое рассмотрение совершенно необходимо.

Итак, пусть задана совокупность  $\{N_k\}$ , образованная после реализации  $N_* = N$  событий (очевидно, здесь  $m = n$ ) с теоретическим распределением вероятностей  $\{s_k\}$ . Мы имеем здесь типичную последовательность независимых испытаний [10], так что вероятность  $P_I$  получения данного набора  $\{N_k\}$ , удовлетворяющего условию (7), определяется полиномиальной формулой

$$P_I(N_1, \dots, N_n) = \frac{N!}{N_1! \dots N_n!} s_1^{N_1} \dots s_n^{N_n}, \quad (9)$$

откуда

$$\frac{1}{N} \ln P_I = \text{const} + \sum_{k=1}^n f_k \ln s_k. \quad (10)$$

Максимизация функционала (10) относительно  $\{s_k\}$  при условиях (2) проводится элементарно методом Лагранжа, и мы получаем оптимальную оценку:

$$\hat{s}_k = f_k = N_k/N. \quad (11)$$

Это известный результат: наилучшая оценка теоретического распределения совпадает с распределением выборочных частот. Отсюда следует, в частности, что даже при отсутствии размывания изображения и шума нереально узнать о теоретическом распределении больше, чем дает конечная выборка. Поэтому эффективность алгоритма восстановления определяется не путем сравнения оригинала  $o$  и его оценки  $\hat{o}$ , а путем сравнения реализации  $1 \text{ с } \hat{o}$  (рис. 1).

Система формирования изображения вносит дополнительные флуктуации, учет которых усложняет процесс восстановления [11]. Поскольку внешний шум отсутствует, мы имеем  $N_* = N$ , а вероятность того, что произвольно взятое событие окажется в  $j$ -ом бине, равна

$$p_j = \sum_{k=1}^n h_{jk} s_k, \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1. \quad (12)$$

Теперь имеет место последовательность независимых испытаний с вероятностями заполнения  $\{p_j\}$ , так что вероятность получения набора  $\{N_j\}$  равна

$$P_{II}(N_1, \dots, N_m) = \frac{N!}{N_1! \dots N_m!} p_1^{N_1} \dots p_m^{N_m}. \quad (13)$$

Соотношения (12) и (13) определяют  $P_{II}$  для произвольных  $\{s_k\}$ . Оценка максимального правдоподобия доставляет максимум  $P_{II}$ , т. е. функционалу

$$\frac{1}{N} \ln P_{II} = \text{const} + \sum_{j=1}^m f_j \ln p_j \quad (14)$$

при условиях (2). Некоторые численные способы максимизации (14) рассматривались в [11, 12].

Решение системы уравнений  $p_j = f_j$  — т. н. *инверсное решение* — не является положительно определенным, и потому, вообще говоря, не совпадает с разыскиваемым оптимальным в смысле ММП решением\*. Не гарантировано также, что инверсное решение будет удовлетворять условию нормировки, т. е. второму условию (2).

4. *Сводка результатов для задачи SHNR.* Конечно, основной интерес представляет случай, когда изображение «испорчено» не только внутренними флуктуациями, но и добавочным шумом. Вывод соответствующих формул достаточно сложен, и потому мы отнесли его к следующему пункту, а пока выпишем окончательные выражения.

Оценка полной яркости оригинала

$$\hat{N}_* = N - B \quad (15)$$

показывает, что оптимальная процедура предполагает вычитание из всего количества зарегистрированных событий средней суммарной яркости шума. Вводя относительную яркость последнего, можно написать:

$$B = \mu N, \quad \hat{N}_* = (1 - \mu) N, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (16)$$

Легко найти приближенное выражение для вероятности  $P \equiv P_{III}(N_1, \dots, N_m)$  получить наблюдаемую совокупность отсчетов, если допустить, что размещение всех событий, как световых, так и фоновых, по бинам изображения определяется *рандомизированной* последовательностью независимых испытаний. При этом считается, что произвольно взятое событие с вероятностью  $\mu$  окажется фоновым и с вероятностью  $1 - \mu$  — световым, а его дальнейшая судьба определяется соответственно распределениями  $\{\beta_j\}$  и  $\{p_j\}$ . Поэтому вероятность попадания произвольно взятого события в  $j$ -ый бин равна  $w_j = (1 - \mu) p_j + \mu \beta_j$ , а  $P$  задается той же полиномиальной формулой (13) с заменой  $p_j$  на  $w_j$ , так что

$$\frac{1}{N} \ln P \simeq \text{const} + \sum_{j=1}^m f_j \ln [(1 - \mu) p_j + \mu \beta_j]. \quad (17)$$

\* Этим замечанием я обязан В. В. Бирюкову

Максимум этого функционала следует искать при ограничениях (2). При всей простоте описанного приближения точность его трудно оценить, а потому следует провести полный анализ.

Такое рассмотрение в разделе 5 дает для  $P$  выражение

$$\frac{1}{N} \ln P = \text{const} + \sum_{j=1}^m f_j \ln [(1 - \mu) \Lambda p_j + \mu \beta_j] - (1 - \mu) \ln \Lambda, \quad (18)$$

где  $\{p_j\}$  связаны с  $\{s_k\}$  соотношениями (12), а  $\Lambda(s_1, \dots, s_n)$  — корень уравнения

$$\sum_{j=1}^m \frac{f_j \beta_j}{(1 - \mu) \Lambda p_j + \mu \beta_j} = 1, \quad \mu \neq 0. \quad (19)$$

При  $\mu = 0$  параметр  $\Lambda \equiv 1$  и (18) совпадает с (14). Напомним, что разыскивается условный максимум (18) при ограничениях (2). Эта задача без особого труда решается при помощи современных компьютеров.

Из соображений, основанных на законе больших чисел, следует ожидать (и предварительные расчеты согласуются с этим), что приближение  $\Lambda = 1$ , т. е. замена (18) на (17), будет выполняться тем точнее, чем больше общее количество событий.

Если система строит идеальное изображение, т. е.  $h_{jk} = \delta_{jk}$ , то отличны от нуля только  $p_j = s_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и приведенные выше формулы дают решение задачи оптимальной фильтрации белого шума.

До сих пор априорная информация об оригинале ограничивалась лишь требованием его неотрицательности и, возможно, сведениями о протяженности. Первое свойство естественно учитывается заданием вероятностного распределения  $\{s_k\}$ . При этом задача на экстремум решается в конечной области  $(n-1)$ -мерного пространства. Однако часто имеется дополнительная априорная информация, и это позволяет существенно снизить количество искомым величин, т. е. проводить максимизацию  $P$  в пространстве меньшего числа измерений. Ограничимся одним примером.

Предположим, что исходное распределение сосредоточено в сравнительно немногих бинах, т. е. имеет вид дискретного спектра:

$$s_k = I_k \delta_{k, k_l}, \quad l = 1, \dots, L < n, \quad \sum_{l=1}^L I_k = 1. \quad (20)$$

Если это известно заранее, то в (18) и (19) разыскиваются лишь  $2L$  неизвестных параметра  $\{L, k_l, I_{k_l}\}$  и экстремум находится значительно быстрее [11].

Аналогично учитываются и другие сведения. В конечном итоге именно они определяют качество восстановленного изображения (в особенности при чистой фильтрации шума). Важно подчеркнуть, что в рассматри-

Определим функцию  $\varphi$  комплексной переменной  $z=x+iy$  следующим образом:

$$\varphi(z) = \sum_{0 \leq n_j \leq N_j} \prod_{j=1}^m \frac{(v_j z)^{n_j}}{n_j!} \cdot \frac{b_j^{N_j - n_j}}{(N_j - n_j)!}, \quad (28)$$

где суммирование уже не ограничено гиперплоскостью (23), а распространяется на все точки  $m$ -мерного параллелепипеда. Очевидно, сумма в (27) равна коэффициенту при  $z^{N_*}$  функции  $\psi(z)$ . В свою очередь, на основании теоремы о вычетах этот коэффициент находится контурным интегрированием в комплексной плоскости  $Z$ , так что

$$P = N_*! N_*^{-N_*} e^{-B} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \varphi(z) \frac{dz}{z^{N_*+1}}, \quad (29)$$

где контур  $\gamma$  охватывает начало координат. Поскольку пуассоновское распределение сохраняет свой вид при суммировании независимых величин, формулу (28) можно записать в виде:

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^m \frac{(v_j z + b_j)^{N_j}}{N_j!}. \quad (30)$$

Таким образом,

$$P = \frac{C}{2\pi i} \oint_{\gamma} \prod_{j=1}^m (v_j z + b_j)^{N_j} \frac{dz}{z^{N_*+1}}, \quad (31)$$

где

$$C = \frac{N_*! N_*^{-N_*} e^{-B}}{N_1! \dots N_m!} \simeq \frac{\sqrt{2\pi N_*} e^{-(N_*+1)}}{N_1! \dots N_m!}. \quad (32)$$

Для оценки интеграла в (31) при  $N = \sum N_j \geq 10$  методом перевала следует деформировать контур интегрирования так, чтобы он проходил через точку  $x = \Lambda$ ,  $y = 0$ , в которой подынтегральная функция, рассматриваемая на действительной оси, достигает минимального значения. Отсюда следует, что  $\Lambda$  является корнем уравнения

$$\sum_{j=1}^m \frac{N_j v_j}{\Lambda v_j + b_j} = \frac{N_*}{\Lambda}. \quad (33)$$

Ограничиваясь при интегрировании областью вблизи перевала, получаем из (31):

$$P = \frac{C}{\sqrt{2\pi N g(\Lambda)}} \Lambda^{-(N_*+1)} \prod_{j=1}^m (\Lambda v_j + b_j)^{N_j}, \quad (34)$$

где

$$g(\Lambda) = \frac{1 - \mu}{\Lambda^2} - \sum_{j=1}^m \frac{f_j v_j^2}{(\Lambda v_j + b_j)^2}, \quad (35)$$

параметр  $\mu = 1 - (N_* + 1)/N \simeq 1 - \frac{N_*}{N}$  и в соответствии с (8) введены  $\{f_j\}$ .

Выражение (34) в принципе пригодно для нахождения совместных оценок  $\hat{N}_*$  и  $\{\hat{s}_k\}$ . Целесообразно, однако, разделить задачу и найти сначала  $\hat{N}_*$  по заданным значениям полного количества событий и среднего шума, а затем подставить оценку  $\hat{N}_*$  в (34) и использовать этот функционал для вычисления  $\{\hat{s}_k\}$ .

Найти  $\hat{N}_*$  указанным образом не составляет труда. Ввиду инвариантности распределения Пуассона суммарное количество событий шума  $\xi = \sum \xi_j$  подчиняется закону Пуассона со средним  $B = \sum b_j$ , а полное количество событий  $N = N_* + \xi$  имеет при фиксированном  $N_*$  распределение

$$\text{Pr}(N = N|N_*) = e^{-B} \frac{B^{N-N_*}}{(N - N_*)!}, \quad N \geq N_*. \quad (36)$$

Эта вероятность как функция  $N_*$  достигает максимума при  $N_* \simeq N - B$ .

Дальнейшие преобразования (34) заключаются в следующем. Заменяем  $N_*$  на  $\hat{N}_* = (1 - \mu)N$  и будем считать параметр  $\mu \equiv B/N$  заданным. Поскольку  $g(\Lambda)$  порядка 1, в первом приближении можно не принимать во внимание вариации этой функции и включить ее в постоянный множитель. Наконец, с помощью (6), (8), (16) и (26) преобразуем уравнение (33) для случая  $B \neq 0$  к виду (19), а выражение (34) — к виду (18). Этим и завершается вывод основных соотношений.

6. Схема SNHR может быть рассмотрена совершенно так же, как и основная схема SHNR (рис. 1). Мы ограничимся здесь формулами для рандомизированной последовательности независимых испытаний.

Допустим, что пуассоновский шум  $\{\xi_k\}$  со средним значением  $\langle \xi_k \rangle = b_k$  и полной яркостью  $B = \sum_1^n b_k$  вносится до формирования изображения. Вводя вновь оценку полной яркости оригинала по формулам (15) и (16), полагаем, что для произвольно взятого события вероятность оказаться в бине  $k$  исходного распределения равна

ваемом подходе априорная информация лишь конкретизирует выражение (12) для  $p_j$ , но все соотношения сохраняют вид.

5. *Вывод основных соотношений.* Обозначим через  $\xi_j$  содержимое  $j$ -го бина, включающее как перераспределенные события оригинала  $\eta_j$ , так и добавку шума  $\xi_j$ :

$$\zeta_j = \eta_j + \xi_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (21)$$

Для применения ММП нужно найти вероятность получения заданного набора  $\{N_j\}$ , т. е.  $P \equiv \Pr(\zeta_1 = N_1, \dots, \zeta_m = N_m)$ .

Как и ранее, совокупность случайных величин  $\{\eta_j\}$  подчиняется полиномиальному закону:

$$\Pr(\eta_1 = n_1, \dots, \eta_m = n_m) = \frac{N_*!}{n_1! \dots n_m!} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}, \quad (22)$$

где  $p_j$  определяются (12) и

$$\sum_{j=1}^m n_j = N_*. \quad (23)$$

По предположению, совокупность отсчетов шума подчиняется многомерному распределению Пуассона:

$$\Pr(\xi_1 = r_1, \dots, \xi_m = r_m) = \prod_{j=1}^m e^{-b_j} \frac{(b_j)^{r_j}}{r_j!}, \quad r_j \geq 0. \quad (24)$$

Поскольку источник и аддитивный шум считаются независимыми,

$$P = N_*! e^{-B} \sum_{0 < n_j < N_j}^* \prod_{j=1}^m \frac{p_j^{n_j}}{n_j!} \cdot \frac{b_j^{N_j - n_j}}{(N_j - n_j)!}, \quad (25)$$

где знаком \* отмечено, что суммирование проводится при ограничении (23).

Дальнейшие наши шаги связаны с намерением использовать при оценке суммы в (25) известный метод Дарвина—Фаулера (см., например, книгу Шредингера [13]).

Умножим и разделим правую часть (25) на  $N_*^{N_*}$ , учтем (23) и обозначим

$$v_j = N_*^{-1} p_j, \quad \sum_{j=1}^m v_j = N_*. \quad (26)$$

Тогда

$$P = N_*! N_*^{-N_*} e^{-B} \sum_{0 < n_j < N_j}^* \prod_{j=1}^m \frac{v_j^{n_j}}{n_j!} \cdot \frac{b_j^{N_j - n_j}}{(N_j - n_j)!}. \quad (27)$$

$(1 - \mu) s_k + \mu \beta_k$ , где  $\beta_k = b_k/B$ . Вероятность того, что это событие будет затем перераспределено в  $j$ -ый бин изображения, равна

$$\tilde{w}_j = \sum_{k=1}^n h_{jk} [(1 - \mu) s_k + \mu \beta_k] = (1 - \mu) p_j + \mu \tilde{\beta}_j, \quad (37)$$

где

$$\tilde{\beta}_j = \sum_{k=1}^n h_{jk} \beta_k \quad (38)$$

— прошедший через систему формирования изображения шум. Наконец, вероятность  $\tilde{P}(N_1, \dots, N_m)$  получить на выходе заданный набор отсчетов определяется полиномиальным законом с вероятностями  $\{\tilde{w}_j\}$ , так что

$$\frac{1}{N} \ln \tilde{P} = \text{const} + \sum_{j=1}^m f_j \ln [(1 - \mu) p_j + \mu \tilde{\beta}_j]. \quad (39)$$

Формально функционалы (17) и (39) не отличаются, и максимизация их при условиях (2) проводится единообразно. Однако важно подчеркнуть вслед за Рашфортом и Харрисом [9], что восстановление в схеме SNHR дает более близкий к оригиналу результат. Причина этого понятна: предварительное сглаживание шума системой формирования изображения эквивалентно сужению занимаемой им полосы частот и как следствие — уменьшению его выходной мощности.

**7. Заключительные замечания.** Приведенная в разделе 2 постановка задачи восстановления изображения включает три предположения: 1) линейность системы формирования изображения, 2) пуассоновский вид функции распределения шума и 3) независимость значений шума в разных бинах. Легко видеть, что только первое и третье из этих допущений существенны. Действительно, хотя строгий вывод функционала (18) опирался на явный вид закона распределения шума, при не слишком слабых источнике и шуме применима рандомизированная последовательность независимых испытаний, сразу приводящая к функционалам (17) и (39), которые содержат средние значения шума.

Автор признателен В. В. Бирюкову за полезное обсуждение работы и проведение численных расчетов.

## MAXIMUM LIKELIHOOD IMAGE RESTORATION

## I. MAIN EQUATIONS

V. YU. TEREVIZH

The consecutive consideration of image formation process is given, including linear smoothing and adding of white Poissonian noise. The stochastic nature of smoothing is taken into account, so the approach is suitable for the restoration of faint objects. A priori information naturally includes the positivity of the solution. With the aid of Darwin-Fowler method the explicit expression (18) is found for the probability of observed image, and the most probable estimate of the object can be calculated by maximizing this probability. The problem of optimal white noise filtering constitutes the particular case.

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. R. Frieden, Image Enhancement and Restoration; in Picture Processing and Digital Filtering, ed. T. S. Huang, Springer, 1979, p. 179.
2. Г. И. Василенко, А. М. Тараторин, Восстановление изображений, Радио и связь, М., 1986.
3. Л. М. Сороко, Физ. элем. частиц и атомного ядра, 12, 754, 1981.
4. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, Методы решения некорректных задач, Наука, М., 1986.
5. А. В. Гончарский, А. М. Черепашук, А. Г. Ягола, Некорректные задачи астрофизики, Наука, М., 1985.
6. W. K. Pratt, Digital Image Processing, Wiley, 1978.
7. В. Ю. Теревиж, Анализ временных рядов в астрофизике, Наука, М., 1990.
8. B. R. Frieden, Proc. IEEE, 73, 1764, 1985; ТИИЭР, 73, 78, 1985.
9. C. K. Rushforth, R. W. Harris, J. Opt. Soc. Amer., 58, 539, 1968.
10. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, Наука, М., 1988, гл. 2.
11. Е. А. Косарев, В. Д. Песков, Е. Р. Подоляк, Ж. техн. физ., 53, 111, 1983.
12. М. Э. Тараско, Препр. ФЭИ—156, Обнинск, 1969.
13. E. Schrödinger, Statistical Thermodynamics, Cambridge, 1946.