АСТРОФИЗИКА

ТОМ 32 АПРЕЛЬ, 1990 ВЫПУСК 2

УДК: 524.37—852—652

ДИФФУЗНОЕ ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА СФЕРИЧЕСКОЙ ТУМАННОСТЬЮ

А. К. КОЛЕСОВ, В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 6 марта 1990

Рассматривается задача о диффузном отражении света однородным шаром. Предполагается, что в шаре происходит изотропное рассеяние и истинное поглощение излучения. Для решения задачи применяются известные интегро-дифференциальные уравнения для коэффициента отражения, преобразованные нами к более удобной форме. Получены асимптотические формулы для коэффициента отражения шара большого оптического радиуса. Найдены также асимптотические формулы для светимости сферической туманности при разных положениях освещающей звезды.

1. *Введение.* Большой интерес для астрофизики представляет задача о многократном рассеянии света в средах, обладающих сферической симметрией. К ним относятся протяженные оболочки звезд, сферические туманности, ядра галактик и другие объекты. Вследствие сложности задачи она решается преимущественно численными или приближенными методами.

С целью получения точных аналитических решений обычно рассматривается простейший случай сферически-симметричной среды — однородный шар. В этом случае при изотропном рассеянии определение функции источников сводится к решению интегрального уравнения такого же типа, как в случае плоского слоя (см., например, [1—3]).

В работах [4] и [5] были получены точные формулы для светимости шара при различных источниках энергии. При этом светимость шара оптического радиуса x была выражена через функции Амбарцумяна $\varphi(2x, \eta)$ и $\psi(2x, \eta)$ для плоского слоя оптической толщины $2x$. В работе [4] принималось, что источники энергии равномерно расположены в шаре, а в работе [5] рассматриваются два случая расположения источников: 1) шар освещен параллельными лучами, 2) на границе шара находится точечный источник излучения. Если под шаром понимать туманность, а под точечным источником звезду, то можно сказать, что первый из этих случаев соответствует расположению звезды на бесконечно-большом расстоянии от туманности, а второй — на ее границе.

Для решения задачи о диффузном отражении света шаром в ряде работ был введен коэффициент отражения, зависящий от углов падения и отражения (как в случае плоского слоя). Знание этой функции позволяет находить интенсивность выходящего из шара излучения при произвольных внешних источниках излучения, обладающих сферической симметрией.

В работах [6—12] найдено и исследовано интегро-дифференциальное уравнение, определяющее непосредственно коэффициент отражения. Для получения уравнения использовался метод добавления к данному телу слоя бесконечно малой оптической толщины и рассмотрения происходящих в нем процессов.

В работах [13—15] получена асимптотическая формула для коэффициента отражения света шаром большого оптического радиуса. При этом применялось соотношение между интенсивностью излучения, выходящего из шара, и интенсивностью излучения в бесконечной среде, в которую шар считается погруженным.

В работах [16, 17] подробно исследована связь между излучением, рассеянным шаром, и излучением, рассеянным плоским слоем. Это дало возможность получить асимптотическую формулу для коэффициента отражения и выражения для его моментов и димоментов.

В настоящей статье также рассматривается проблема диффузного отражения света однородным шаром. При этом используются интегро-дифференциальные уравнения, полученные ранее и преобразованные нами к более удобной форме для решения. В результате получаются асимптотические формулы для коэффициента отражения — более точные, чем в работах [13—15]. Показывается, что коэффициент отражения шара при $x \gg 1$ выражается только через функцию $\varphi(\eta)$, характеризующую отражение света полубесконечным плоским слоем. Найдены также асимптотические формулы для светимости сферической туманности, освещенной звездой в двух упомянутых выше случаях.

2. *Основные уравнения*. Будем считать, что в однородном шаре радиуса x может происходить изотропное рассеяние и истинное поглощение света.

Пусть в каком-то месте поверхности шара падают фотоны под углом $\arccos \zeta$ к нормали. Диффундируя в шаре, одна часть фотонов может погибнуть (испытав истинное поглощение), а другая может выйти наружу — в любом месте поверхности и под любым углом $\arccos \eta$. Для характеристики части фотонов, выходящих наружу (как говорят, отраженных шаром), мы будем употреблять коэффициент отражения $\rho_s(x, \eta, \zeta)$.

Физический смысл коэффициента отражения состоит в том, что для каждого фотона, падающего под углом $\arccos \zeta$, величина $2\eta\rho_s(x,$

$\eta, \zeta) d\eta$ представляет собой вероятность выхода его наружу в любом месте поверхности в интервале косинусов угла от η до $\eta + d\eta$. Очевидно, что при угле падения фотонов $\arccos \zeta$ светимость шара равна $2\int\limits_0^1 \rho_s(x, \eta, \zeta)\, \eta\, d\eta$.

Если шар освещен так, что в каждом месте его поверхности падает под углом $\arccos \zeta$ излучение интенсивности I_0, не зависящей от азимута (т. е. в виде „светового конуса"), то интенсивность излучения, отраженного шаром в каждом месте под углом $\arccos \eta$, будет равна $\frac{I_0}{\pi} \rho_s(x, \eta, \zeta)\, \zeta$.

Таким образом, с помощью коэффициента отражения $\rho_s(x, \eta, \zeta)$ могут быть определены как светимость шара — при любых внешних источниках энергии, так и интенсивность излучения, отраженного шаром под любым углом отражения — при одинаковом внешнем освещении каждого места поверхности.

Уравнение для определения функции $\rho_s(x, \eta, \zeta)$ может быть записано в виде

$$\eta\zeta \frac{\partial \rho_s(x, \eta, \zeta)}{\partial x} + (\eta + \zeta)\, \rho_s(x, \eta, \zeta) = \frac{1}{x} R(\rho_s) + \\ + \frac{\lambda}{4} [\varphi_s(x, \eta) + e^{-2x\eta}] [\varphi_s(x, \zeta) + e^{-2x\zeta}], \tag{1}$$

где $R(\rho_s)$ — результат применения оператора R к функции $\rho_s(x, \eta, \zeta)$, т. е.

$$R(\rho_s) = 2\eta\zeta\rho_s(x, \eta, \zeta) - (1 - \eta^2)\, \zeta \frac{\partial \rho_s}{\partial \eta} - (1 - \zeta^2)\, \eta \frac{\partial \rho_s}{\partial \zeta}, \tag{2}$$

$$\varphi_s(x, \eta) = 1 + 2\eta \int\limits_0^1 \rho_s(x, \eta, \zeta)\, d\zeta \tag{3}$$

и λ — отношение коэффициента рассеяния к сумме коэффициентов рассеяния и истинного поглощения (иначе „альбедо частицы"). Экспоненциальные члены $e^{-2x\eta}$ и $e^{-2x\zeta}$ учитывают излучение, проходящее через шар без рассеяния.

Как уже говорилось, уравнение (1) было получено в нескольких работах [6—12] путем мысленного добавления к шару слоя бесконечно малой оптической толщины (сначала без экспоненциальных членов, а потом с ними). В работах [9, 10] было предпринято численное решение уравнения

(1) без экспоненциальных членов. Насколько нам известно, определение функции $\rho_s(x, \eta, \zeta)$ с экспоненциальными членами не производилось.

Для решения уравнения (1) целесообразно представить функцию $\rho_s(x, \eta, \zeta)$ в виде

$$\rho_s(x, \eta, \zeta) = a_s(x, \eta, \zeta) + b_s(x, \eta, \zeta)\, e^{-2x\eta} + $$
$$+ b_s(x, \zeta, \eta)\, e^{-2x\zeta} + c_s(x, \eta, \zeta)\, e^{-2x(\eta+\zeta)}, \tag{4}$$

где $a_s(x, \eta, \zeta)$, $b_s(x, \eta, \zeta)$ и $c_s(x, \eta, \zeta)$ — функции, подлежащие определению.

Подстановка выражения (4) в уравнение (1) приводит к следующим уравнениям для определения искомых функций:

$$\eta\zeta \frac{\partial a_s}{\partial x} + (\eta + \zeta)\, a_s(x, \eta, \zeta) = \frac{1}{x} R(a_s) + \frac{\lambda}{4} \mu(x, \eta)\, \mu(x, \zeta), \tag{5}$$

$$\eta\zeta \frac{\partial b_s}{\partial x} + (\eta - \zeta)\, b_s(x, \eta, \zeta) = \frac{1}{x} R(b_s) + \frac{\lambda}{4} \nu(x, \eta)\, \mu(x, \zeta), \tag{6}$$

$$\eta\zeta \frac{\partial c_s}{\partial x} - (\eta + \zeta)\, c_s(x, \eta, \zeta) = \frac{1}{x} R(c_s) + \frac{\lambda}{4} \nu(x, \eta)\, \nu(x, \zeta), \tag{7}$$

где обозначено

$$\mu(x, \eta) = 1 + 2\eta \int\limits_0^1 a_s(x, \eta, \zeta)\, d\zeta + 2\eta \int\limits_0^1 b_s(x, \zeta, \eta)\, e^{-2x\zeta}\, d\zeta, \tag{8}$$

$$\nu(x, \eta) = 1 + 2\eta \int\limits_0^1 b_s(x, \eta, \zeta)\, d\zeta + 2\eta \int\limits_0^1 c_s(x, \eta, \zeta)\, e^{-2x\zeta} d\zeta. \tag{9}$$

Уравнения (5)—(9) вместе с формулой (4) дают возможность определить коэффициент отражения шара $\rho_s(x, \eta, \zeta)$ при любом оптическом радиусе x. По-видимому, эта задача может быть решена полностью лишь численными методами. Однако в случае большого оптического радиуса шара ($x \gg 1$) можно получить асимптотические формулы для функции $\rho_s(x, \eta, \zeta)$. Этот случай и рассматривается подробно ниже.

3. *Асимптотические формулы.* В случае шара большого оптического радиуса ($x \gg 1$) мы разложим коэффициент отражения по степеням $1/x$, сохраняя в этом разложении только два первых члена. Иными словами, представим величину $\rho_s(x, \eta, \zeta)$ в виде

$$\rho_s(x, \eta, \zeta) = \rho_0(x, \eta, \zeta) + \frac{\rho_1(x, \eta, \zeta)}{x}, \tag{10}$$

где функции $\rho_0(x, \eta, \zeta)$ и $\rho_1(x, \eta, \zeta)$ зависят от x через экспоненты $e^{-2x\eta}$ и $e^{-2x\zeta}$. В свою очередь, по аналогии со случаем плоского слоя большой оптической толщины, для функции $\rho_0(x, \eta, \zeta)$ возьмём представление

$$\rho_0(x, \eta, \zeta) = \rho(x, \eta, \zeta) - f(x)\, u_0(x, \eta)\, u_0(x, \zeta). \tag{11}$$

Сначала мы займемся определением функций, входящих в формулу (11). Представляя функции $\rho(x, \eta, \zeta)$ и $u_0(x, \eta)$ в виде

$$\rho(x, \eta, \zeta) = a(\eta, \zeta) + b(\eta, \zeta)\, e^{-2x\eta} + \\ + b(\zeta, \eta)\, e^{-2x\zeta} + c(\eta, \zeta)\, e^{-2x(\eta+\zeta)}, \tag{12}$$

$$u_0(x, \eta) = u(\eta) - v(\eta)\, e^{-2x\eta} \tag{13}$$

и сравнивая между собой выражения (11) и (4), получаем

$$a_s(x, \eta, \zeta) = a(\eta, \zeta) - f(x)\, u(\eta)\, u(\zeta), \tag{14}$$

$$b_s(x, \eta, \zeta) = b(\eta, \zeta) + f(x)\, v(\eta)\, u(\zeta), \tag{15}$$

$$c_s(x, \eta, \zeta) = c(\eta, \zeta) - f(x)\, v(\eta)\, v(\zeta). \tag{16}$$

Теперь мы должны подставить выражения (14)—(16) в уравнения (5)—(7) (при отбрасывании членов порядка $1/x$ и выше). Предварительно заметим, что входящие в эти уравнения функции $\mu(x, \eta)$ и $\nu(x, \eta)$, определяемые формулами (8) и (9), принимают в данном случае вид

$$\mu(x, \eta) = \varphi(\eta) - 2u_0 f(x)\, \eta\, u(\eta), \tag{17}$$

$$\nu(x, \eta) = \omega(\eta) + 2u_0 f(x)\, \eta\, v(\eta), \tag{18}$$

где обозначено

$$\varphi(\eta) = 1 + 2\eta \int_0^1 a(\eta, \zeta)\, d\zeta, \tag{19}$$

$$\omega(\eta) = 1 + 2\eta \int_0^1 b(\eta, \zeta)\, d\zeta \tag{20}$$

и

$$\int_0^1 u(\zeta)\, d\zeta = u_0.$$

Подставляя выражение (14) в уравнение (5) (без члена $\frac{1}{x} R(a)$) и учитывая формулы (17) и (18), находим

$$-f'(x)\,\eta\zeta\,u(\eta)\,u(\zeta)+(\eta+\zeta)\left[a(\eta,\zeta)-f(x)\,u(\eta)\,u(\zeta)\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{4}\left[\varphi(\eta)-2u_0 f(x)\,\eta\,u(\eta)\right]\left[\varphi(\zeta)-2u_0 f(x)\,\zeta\,u(\zeta)\right]. \tag{21}$$

Отсюда следует

$$a(\eta,\zeta)=\frac{\lambda}{4}\,\frac{\varphi(\eta)\,\varphi(\zeta)}{\eta+\zeta} \tag{22}$$

и

$$f'(x)+\lambda u_0^2 f^2(x)+f(x)\left[\frac{1}{\eta}-\frac{\lambda}{2}u_0\frac{\varphi(\eta)}{\eta\,u(\eta)}\right]+$$

$$+f(x)\left[\frac{1}{\zeta}-\frac{\lambda}{2}u_0\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta\,u(\zeta)}\right]=0. \tag{23}$$

Из соотношения (23) получаем формулу

$$u(\eta)=\frac{\lambda}{2}u_0\frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} \tag{24}$$

и уравнение для определения функции $f(x)$:

$$f'(x)+\lambda u_0^2 f^2(x)+2k\,f(x)=0. \tag{25}$$

При подстановке (15) в (6) и (16) в (7) мы аналогичным образом опять приходим к уравнению (25) для функции $f(x)$ и формулам (22) и (24). При этом получаются также новые формулы

$$b(\eta,\zeta)=\frac{\lambda}{4}\,\frac{\omega(\eta)\,\varphi(\zeta)}{\eta-\zeta}, \tag{26}$$

$$c(\eta,\zeta)=-\frac{\lambda}{4}\,\frac{\omega(\eta)\,\omega(\zeta)}{\eta+\zeta}, \tag{27}$$

$$v(\eta)=\frac{\lambda}{2}u_0\frac{\omega(\eta)}{1+k\eta}. \tag{28}$$

Таким образом, задача об определении функции $\rho_0(x,\eta,\zeta)$ может считаться полностью решенной. С помощью полученных формул для вспомогательных функций находим следующую формулу для искомой функции $\rho_0(x,\eta,\zeta)$:

$$\rho_0(x,\eta,\zeta)=\frac{\lambda}{4}\,\frac{\varphi(\eta)\,\varphi(\zeta)}{\eta+\zeta}+\frac{\lambda}{4}\,\frac{\omega(\eta)\,\varphi(\zeta)}{\eta-\zeta}e^{-2x\eta}+$$

$$+\frac{\lambda}{4}\,\frac{\varphi(\zeta)\,\omega(\eta)}{\zeta-\eta}e^{-2x\zeta}-\frac{\lambda}{4}\,\frac{\omega(\eta)\,\omega(\zeta)}{\eta+\zeta}e^{-2x(\eta+\zeta)}-$$

$$-f(x)\left(\frac{\lambda}{2}u_0\right)^2\left[\frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}-\frac{\omega(\eta)}{1+k\eta}e^{-2x\eta}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta}-\frac{\omega(\zeta)}{1+k\zeta}e^{-2x\zeta}\right]. \tag{29}$$

Входящие в формулу (29) функции $\varphi(\eta)$ и $\omega(\eta)$ определяются из уравнений

$$\varphi(\eta)=1+\frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int\limits_0^1\frac{\varphi(\zeta)}{\eta+\zeta}d\zeta, \tag{30}$$

$$\omega(\eta)=1+\frac{\lambda}{2}\eta\omega(\eta)\int\limits_0^1\frac{\varphi(\zeta)}{\eta-\zeta}d\zeta, \tag{31}$$

получающихся при подстановке (22) в (19) и (26) в (20). Мы видим, что функция $\varphi(\eta)$ является известной функцией Амбарцумяна, а величина $a(\eta, \zeta)$, определенная формулой (22), представляет собой коэффициент отражения полубесконечного плоского слоя. Что касается функции $\omega(\eta)$, то с помощью формулы (31) она выражается через $\varphi(\eta)$. Пользуясь линейным интегральным уравнением для $\varphi(\eta)$ (см. [18]), можно получить также формулу

$$\omega(\eta)\varphi(\eta)\left(1-\frac{\lambda}{2}\eta\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)=1. \tag{32}$$

Заметим, что функция $\omega(\eta)$ терпит разрыв при значениях η, близких к 1. Однако эта функция является множителем при экспоненте $e^{-2x\eta}$, которая при $\eta\approx 1$ и $x\gg 1$ гораздо меньше члена асимптотического выражения для $\rho_s(x, \eta, \zeta)$ порядка $1/x$. Поэтому нас может интересовать функция $\omega(\eta)$ только при малых η. В случае очень больших x можно считать $\omega(\eta)=1$.

Введенная выше постоянная k является корнем уравнения $\frac{\lambda}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}=1$. Оно эквивалентно уравнению

$$\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^1\frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}d\eta=1, \tag{33}$$

получающемуся путем интегрирования (24) по η от 0 до 1.

Нам остается еще определить функцию $f(x)$. Решая уравнение (25), находим

$$f(x) = \frac{1}{C\,e^{2kx} - \dfrac{\lambda u_0^2}{2k}}, \tag{34}$$

где C — произвольная постоянная. Для ее определения можно сравнить между собой асимптотические формулы для коэффициента отражения шара, полученные выше и в работах [13] или [14]. Из этого сравнения следует, что $C = \dfrac{1}{M}$ и $\dfrac{\lambda u_0^2}{2kC} = N$. Поэтому формула (34) может быть переписана в виде

$$f(x) = \frac{M}{e^{2kx} - N}. \tag{35}$$

Постоянные M, N и u_0 хорошо известны в теории рассеяния света (см., например, [18]). В случае изотропного рассеяния они определяются формулами

$$M = \frac{4}{k}\left(\frac{1}{1-k^2} - \frac{1}{\lambda}\right), \tag{36}$$

$$\lambda u_0 \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{(1-k\eta)^2}\,\eta\,d\eta = 1, \tag{37}$$

$$\lambda u_0^2 M = 2kN. \tag{38}$$

Подстановка выражений (35) и (38) в формулу (29) приводит к следующей окончательной формуле для величины $\rho_0(x, \eta, \zeta)$:

$$\begin{aligned}\rho_0(x, \eta, \zeta) = {} & \frac{\lambda}{4}\,\frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta) - \omega^*(x, \eta)\,\omega^*(x, \zeta)}{\eta + \zeta} + \\ & + \frac{\lambda}{4}\,\frac{\omega^*(x, \eta)\varphi(\zeta) - \omega^*(x, \zeta)\varphi(\eta)}{\eta - \zeta} - \\ & - \frac{\lambda}{2}\,\frac{kN}{e^{2kx} - N}\left[\frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} - \frac{\omega^*(x, \eta)}{1+k\eta}\right]\left[\frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta} - \frac{\omega^*(x, \zeta)}{1+k\zeta}\right],\end{aligned} \tag{39}$$

где для упрощения записи обозначено

$$\omega^*(x, \eta) = \omega(\eta)\,e^{-2x/\eta}. \tag{40}$$

В важном частном случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$, $k = 0$) формула (39) принимает вид

$$\rho_0(x, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}\frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta) - \omega^*(x, \eta)\omega^*(x, \zeta)}{\eta + \zeta} +$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{\omega^*(x, \eta)\varphi(\zeta) - \omega^*(x, \zeta)\varphi(\eta)}{\eta - \zeta} -$$
$$- \frac{[\varphi(\eta) - \omega^*(x, \eta)][\varphi(\zeta) - \omega^*(x, \zeta)]}{2(2x + \delta)}, \tag{41}$$

где $\delta = 2\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, а φ_1 и φ_2 — первый и второй моменты функции $\varphi(\eta)$.

Как следует из физических соображений, коэффициент отражения шара обращается в нуль при $\eta = 0$ или $\zeta = 0$, т. е.

$$\rho_s(x, \eta, 0) = 0. \tag{42}$$

Мы видим, что коэффициент отражения, определенный формулой (39), удовлетворяет этому условию.

4. *Определение функции* $\rho_1(x, \eta, \zeta)$. Для определения функции $\rho_1(x, \eta, \zeta)$ мы представим её, по аналогии с функцией $\rho_s(x, \eta, \zeta)$, в виде

$$\rho_1(x, \eta, \zeta) = a_1(\eta, \zeta) + b_1(\eta, \zeta)e^{-2x\eta} +$$
$$+ b_1(\zeta, \eta)e^{-2x\zeta} + c_1(\eta, \zeta)e^{-2x(\eta+\zeta)} \tag{43}$$

и будем искать величины $a_1(\eta, \zeta)$, $b_1(\eta, \zeta)$ и $c_1(\eta, \zeta)$ из уравнений (5) — (7), сохраняя лишь члены порядка $1/x$. При этом будем пренебрегать членами, содержащими произведения $\frac{1}{x}f(x)$, так как при малых k функция $f(x)$ порядка $1/x$, а при больших k она порядка e^{-2kx}.

Очевидно, что в уравнениях (5) — (7) будут также присутствовать функции $a(\eta, \zeta)$, $b(\eta, \zeta)$ и $c(\eta, \zeta)$, найденные нами выше. Они входят как через посредство величин $R(a)$, $R(b)$, $R(c)$, так и через посредство интегралов в выражениях (8) и (9). Для этих интегралов приближенно имеем

$$\int_0^1 b(\zeta, \eta)e^{-2x\zeta}d\zeta = \frac{1}{2x}b(0, \eta), \quad \int_0^1 c(\eta, \zeta)e^{-2x\zeta}d\zeta = \frac{1}{2x}c(\eta, 0) \tag{44}$$

или, при использовании (26) и (27),

$$\int_0^1 b(\zeta, \eta)e^{-2x\zeta}d\zeta = -\frac{\lambda}{8x\eta}\varphi(\eta), \quad \int_0^1 c(\eta, \zeta)e^{-2x\zeta}d\zeta = -\frac{\lambda}{8x\eta}\omega(\eta). \tag{45}$$

На основании сказанного, уравнения для определения величин $a_1(\eta, \zeta)$, $b_1(\eta, \zeta)$ и $c_1(\eta, \zeta)$ имеют вид

$$(\eta + \zeta)\, a_1(\eta, \zeta) = R(a_1) + \frac{\lambda}{2}\left[\varphi(\eta)\,\zeta\beta(\zeta) + \varphi(\zeta)\,\eta\beta(\eta) - \frac{\lambda}{4}\,\varphi(\eta)\,\varphi(\zeta)\right], \tag{46}$$

$$(\eta - \zeta)\, b_1(\eta, \zeta) = R(b_1) +$$
$$+ \frac{\lambda}{2}\left[\omega(\eta)\,\zeta\beta(\zeta) + \varphi(\zeta)\,\eta\gamma(\eta) - \frac{\lambda}{4}\,\omega(\eta)\,\varphi(\zeta)\right], \tag{47}$$

$$-(\eta + \zeta)\, c_1(\eta, \zeta) = R(c_1) +$$
$$+ \frac{\lambda}{2}\left[\omega(\eta)\,\zeta\gamma(\zeta) + \omega(\zeta)\,\eta\gamma(\eta) - \frac{\lambda}{4}\,\omega(\eta)\,\omega(\zeta)\right], \tag{48}$$

где обозначено

$$\beta(\eta) = \int_0^1 a_1(\eta, \zeta)\, d\zeta, \quad \gamma(\eta) = \int_0^1 b_1(\eta, \zeta)\, d\zeta. \tag{49}$$

Мы видим, что решение уравнений (46)—(48) сводится к определению функций $\beta(\eta)$ и $\gamma(\eta)$. Для нахождения первой из этих функций воспользуемся уравнением (46). Из него с помощью (2), (22) и (30) получаем уравнение

$$\frac{\beta(\eta)}{\varphi(\eta)} = \frac{\lambda}{2}\,\varphi(\eta)\int_0^1 \frac{\zeta\beta(\zeta)}{\eta + \zeta}\, d\zeta - \frac{\lambda}{4}\,\frac{\varphi(\eta) - 1}{\eta} +$$
$$+ \frac{\lambda}{4}\int_0^1 [\varphi(\eta)\,\varphi(\zeta)\,(1 + \eta\zeta) - (1 - \eta^2)\,\varphi'(\eta)\,\zeta\,\varphi(\zeta) -$$
$$- (1 - \zeta^2)\,\varphi'(\zeta)\,\eta\,\varphi(\eta)]\,\frac{d\zeta}{(\eta + \zeta)^2}. \tag{50}$$

Используя выражения для двух первых производных функции $\varphi(\eta)$, найденные из уравнения (30), убеждаемся в том, что решение уравнения (50) имеет вид

$$\beta(\eta) = \frac{\lambda}{8\eta}\,\varphi(\eta) + \frac{1}{2}\,\eta\varphi'(\eta) - \frac{1}{4}\,(1 - \eta^2)\,\varphi''(\eta). \tag{51}$$

Уравнение для определения функции $\gamma(\eta)$ получается из (47). Пользуясь также формулами (32) и (51), имеем

$$\gamma(\eta) = \frac{\lambda}{8\eta}\omega(\eta) - \frac{1}{2}\eta\omega'(\eta) + \frac{1}{4}(1-\eta^2)\omega''(\eta). \tag{52}$$

Как видно из полученных нами формул (43) — (52), величина $\rho_1(x, \eta, \zeta)$ выражается только через две функции — $\varphi(\eta)$ и $\omega(\eta)$. Это относится и к величине $\rho_0(x, \eta, \zeta)$, а значит, и к величине $\rho_s(x, \eta, \zeta)$. Поскольку же функция $\omega(\eta)$ с помощью формулы (32) выражается через функцию $\varphi(\eta)$, то знание одной этой функции достаточно для определения коэффициента отражения шара большого оптического радиуса.

Заметим, что в работе [19] даны выражения и таблицы для производных $\varphi'(\eta)$ и $\varphi''(\eta)$. Там же содержатся таблицы функции, определенной формулой (51), и некоторых других функций, встречающихся в теории, развитой Г. ван де Хюлстом [16, 17].

5. *Светимость сферической туманности*. Полученные выше результаты могут быть использованы при изучении туманностей, освещаемых звездами .Мы рассмотрим два случая расположения звезды: 1) звезда находится на бесконечно большом расстоянии от туманности, 2) звезда расположена на ее краю. Для каждого случая найдем полную энергию, рассеянную туманностью, т. е. ее светимость.

В первом случае будем считать, что туманность освещена параллельными лучами с потоком H. Тогда на туманность с радиусом r_0 падает энергия $\pi r_0^2 H$. Представим светимость туманности в виде

$$L = A_s \pi r_0^2 H, \tag{53}$$

где A_s — так называемое «сферическое альбедо». Учитывая физический смысл коэффициента отражения $\rho_s(x, \eta, \zeta)$, имеем

$$A_s(x) = 4\int_0^1 \zeta\, d\zeta \int_0^1 \rho_s(x, \eta, \zeta)\, \eta\, d\eta. \tag{54}$$

Во втором случае обозначим через L_* светимость звезды, находящейся на границе туманности. Представляя светимость туманности в виде

$$L = \frac{L_*}{2} B_s, \tag{55}$$

для величины B_s получаем

$$B_s(x) = 2\int_0^1 d\zeta \int_0^1 \rho_s(x, \eta, \zeta)\, \eta\, d\eta. \tag{56}$$

Величины $A_s(x)$ и $B_s(x)$ связаны между собой простым соотношением, вытекающим из уравнения (1). Интегрируя (1) по η и ζ от 0 до 1, находим

$$A_s'(x)+4B_s(x)+\frac{2}{x}A_s(x)=\lambda\left[1+B_s(x)+\frac{1}{2x}(1-e^{-2x})\right]^2. \tag{57}$$

В случае чистого рассеяния (т. е. при $\lambda=1$) величины $A_s(x)$ и $B_s(x)$ определяются очевидными формулами

$$A_s(x)=1-\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)e^{-2x}, \tag{58}$$

$$B_s(x)=1-\frac{1}{2x}(1-e^{-2x}), \tag{59}$$

выражающими собой тот факт, что в данном случае все фотоны, поглощенные в туманности, выходят после рассеяний наружу. Легко проверить, что функции $A_s(x)$ и $B_s(x)$, определенные формулами (58) и (59), удовлетворяют соотношению (57).

Соотношения (57) — (59) справедливы при любом оптическом радиусе туманности x. В случае же больших x можно получить асимптотические формулы для величин $A_s(x)$ и $B_s(x)$ при произвольных λ. Для этого надо в формулы (54) и (56) подставить выражение (10) и использовать последующие выражения для величин $\rho_0(x, \eta, \zeta)$ и $\rho_1(x, \eta, \zeta)$. Сохраняя при интегрировании лишь члены нулевого и первого порядка относительно $1/x$, легко убедиться, что в принятом приближении обращаются в нуль все члены, содержащие экспоненциальные функции, кроме одного, даваемого первой из формул (45).

В результате получаем следующие асимптотические формулы для величин $A_s(x)$ и $B_s(x)$:

$$A_s(x)=1-2\varphi_1\sqrt{1-\lambda}-\frac{8}{\lambda k}\cdot\frac{(1-\lambda)N}{e^{2kx}-N}+\frac{\lambda\varphi_1^2}{x}, \tag{60}$$

$$B_s(x)=\varphi_0-1-\frac{4}{\lambda}\cdot\frac{N\sqrt{1-\lambda}}{e^{2kx}-N}+\frac{2\varphi_1-1}{2x}. \tag{61}$$

В случае чистого рассеяния (при $\lambda=1$) формулы (60) и (61) дают (с точностью до членов порядка $1/x^2$):

$$A_s(x)=1,\quad B_s(x)=1-\frac{1}{2x}, \tag{62}$$

что согласуется с формулами (58) и (59).

Недавно в работе [16] были также найдены формулы (60) и (61) другим способом. Еще раньше в работе [5] были получены формулы для светимости туманности произвольного оптического радиуса. Из них при $x \gg 1$ также вытекают формулы (60) и (61).

В заключение заметим, что в настоящей статье при решении задачи о свечении сферической туманности мы ограничились случаем внешних источников энергии. В другой нашей статье будет рассмотрен случай, когда туманность светится под действием звезды, находящейся в ее центре.

Ленинградский государственный
университет

DIFFUSE RADIATION REFLECTION FROM A SPHERICAL NEBULA

A. K. KOLESOV, V. V. SOBOLEV

The problem of diffuse radiation reflection from a homogeneous sphere is considered. It is assumed that in the medium the processes of radiation absorbing and isotropic scattering take place. To solve the problem we used the known integro—differential equations for the light reflection coefficient. These equations were transformed by us to a more convenient form. Asymptotic formulae for the light reflection coefficient are derived for the case of a sphere of a large optical radius. In addition, asymptotic expressions for the luminosity of a spherical nebula are found for different cases of the illuminating star position.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Дэвисон*, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960.
2. *A. Leonard, T. W. Mullikin*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 52, 683, 1964.
3. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 39, 632, 1962.
4. *M. A. Heaslet, R. F. Warming*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 5, 669, 1969.
5. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 8, 197, 1972.
6. *R. E. Bellman, R. E. Kalaba, G. M. Wing*, J. Math Mech., 8, 575, 1959.
7. *P. B. Bailey*, J. Math. Anal. Appl., 8, 144, 1964.
8. *P. B. Bailey, G. M. Wing*, J. Math. Anal. Appl, 8, 170, 1964.
9. *R. E. Bellman, R. E. Kalaba*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 54, 1293, 1965.
10. *R. E. Bellman, H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba*, J. Comp Phys., 1, 245, 1966.
11. *G. B. Rybicki*, J. Comp. Phys., 6, 131, 1970.
12. *S. Ueno, H. Kagiwada, R. Kalaba*, J. Math. Phys., 12, 1279, 1971.
13. *В. В. Соболев*, Докл. АН СССР, 273, 573, 1983.
14. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 21, 309, 1984.
15. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 22, 177, 1985.
16. *H. C. van de Hulst*, Astron. and Astrophys., 173, 115, 1987.
17. *H. C. van de Hulst*, Astron. and Astrophys., 207, 182, 1988.
18. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
19. *J. W. Hovenier, C. V. M. van der Mee, D. de Heer*, Astron. and Astrophys., 207, 194, 1988.