

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК: 52:532—527

О ВОЗМОЖНОСТИ ПЛОСКОГО ОДНОРОДНОГО ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ В ЖИДКИХ КОНФИГУРАЦИЯХ НЕЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Как известно, простейшим вариантом движения жидкости внутри конфигурации эллипсоидальной формы является такой, когда поле скоростей линейно зависит от координат и вихрь $\vec{J} = \text{rot } \vec{u}$ этого поля одинаков в любой точке. Данное однородное вихревое движение представим в матричном виде

$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dot{a}_1 a_1 \lambda_3 - a_1 \lambda_2 \\ -a_2 \lambda_3 \quad \dot{a}_2 a_2 \lambda_1 \\ a_3 \lambda_2 - a_3 \lambda_1 \dot{a}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1/a_1 \\ X_2/a_2 \\ X_3/a_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь $a_i(t)$ — полуоси эллипсоида, а компоненты вихря J_i связаны с:

$$\lambda_k = -\frac{a_i a_j}{a_i^2 + a_j^2} J_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2)$$

В литературе (см., например, [1] и [2]) не раз обсуждалась и обратная задача: для каких ограниченных полостей возможно однородное вихревое движение жидкости? Насколько нам известно, каких-либо новых результатов, выводящих за пределы указанного хрестоматийного эллипсоидального решения, при решении обратной задачи, не было получено.

В данной заметке доказано, что однородное вихревое движение жидкости может представляться и нелинейными по координатам полями скоростей. Как следствие, указан также класс нетривиальных решений обратной задачи.

Движение однородной идеальной гравитирующей жидкости во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ системе отсчета описывается уравнением

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \text{grad} \left(-\frac{p}{\rho} + \Phi + \frac{\Omega^2}{2} r^2 \right) + 2 [\vec{u} \vec{\Omega}]. \quad (3)$$

Здесь p — давление, Φ — гравитационный потенциал, движение стационарное. С помощью известного векторного тождества

$$(\vec{u} \nabla) \vec{u} = \frac{1}{2} \text{grad } u^2 - [\vec{u} \text{ rot } \vec{u}] \quad (4)$$

уравнение (3) записывается в виде

$$\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} - \Phi - \frac{\Omega^2}{2} r^2 + \frac{u^2}{2} \right) = [\vec{u} (2 \vec{\Omega} + \vec{J})]. \quad (5)$$

Исключим из последнего уравнения неизвестные нам p и Φ , применяя к нему операцию rot . Имеем тогда

$$\text{rot} [\vec{u} \vec{J}^{(0)}] = 0, \text{ где } \vec{J}^{(0)} = 2 \vec{\Omega} + \vec{J} \text{ — полный вихрь.} \quad (6)$$

Отметим, что в безвихревом случае $\vec{J}^{(0)} = 0$ уравнение (6) удовлетворяется тождественно, однако к каким-либо особым решениям в обратной задаче оно не приводит и отдельно его рассматривать не будем. В развернутом виде

$$\text{rot} [\vec{u} \vec{J}^{(0)}] = (\vec{J}^{(0)} \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \nabla) \vec{J}^{(0)} - \vec{J}^{(0)} \text{div } \vec{u} + \vec{u} \text{div } \vec{J}^{(0)}, \quad (7)$$

где, конечно, $\text{div } \vec{J}^{(0)} = \text{div } \vec{J} = \text{div rot } \vec{u} = 0$. Жидкость будем считать несжимаемой ($\text{div } \vec{u} = 0$), вихрь же $\vec{J}$ по условиям от координат не зависит. С учетом сказанного, уравнение (6) сводится к

$$(\vec{J}^{(0)} \nabla) \vec{u} = 0. \quad (8)$$

Упростим нашу задачу, положив $\Omega_1 = \Omega_2 = J_1 = J_2 = 0$; тогда течение жидкости описывается уравнениями

$$J_3^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = J_3^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = J_3^{(0)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \quad (9)$$

Поскольку мы рассматриваем только ограниченные полости и конфигурации, согласно последнему в (9) уравнению следует положить $u_3 = 0$. Два первых уравнения в (9) требуют лишь, чтобы движение жидкости было плоским:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2). \quad (10)$$

Подчеркнем, что требование уравнений гидродинамики таково: течение жидкости с однородной завихренностью должно быть двумерным, но отнюдь не обязательно, чтобы это движение происходило именно в эллиптической полости*.

* Никаких ограничений на форму полости вдоль x_3 также не существует.

Постараемся удовлетворить уравнениям (9), представив компоненты скорости жидкого элемента суммой вихревой и потенциальной частей

$$u_1 = -\frac{J_3}{2} x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad u_2 = \frac{J_3}{2} x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}. \quad (11)$$

Напомним, что спиновая скорость вращения одинакова у всех жидких элементов, т. е. в (11) J_3 от координат не зависит. В силу несжимаемости жидкости $\varphi(x_1, x_2)$ должна быть гармонической функцией

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0. \quad (12)$$

Но отнюдь не любая гармоническая функция после подстановки в (11) обеспечит существование замкнутых линий тока! Чтобы это было именно так, вихревая и потенциальная части в выражениях (11) определенным образом должны между собой быть согласованы. Требование замкнутости линий тока сужает круг возможных решений обратной задачи. Мы сейчас укажем один класс решений, заведомо удовлетворяющих условию замкнутости линий тока.

В качестве исходного приближения возьмем движение жидкости по эллиптическим линиям тока с полем скоростей

$$u_1 = \frac{\lambda_3}{n} x_2, \quad u_2 = -\lambda_3 n x_1, \quad (n = a_2/a_1). \quad (13)$$

Деформируем слегка теперь исходные эллипсы: семейство деформированных линий тока будет описываться уравнением

$$S(x_1, x_2, m) = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - m^2 - \varepsilon f(x_1, x_2) = 0, \quad (0 \leq m < 1), \quad (14)$$

где ε — бесконечно малая величина. После деформации поле скоростей (13)

также получит добавку $\delta \vec{u}$, и мы потребуем, чтобы существовал потенциал φ для этой добавки

$$\delta \vec{u} = \text{grad } \varphi. \quad (15)$$

Теперь формулы (11) уточняются

$$u_1 = \frac{\lambda_3}{n} x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad u_2 = -\lambda_3 n x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}. \quad (16)$$

Единственно, за чем надо следить при таком подходе, так это за выполнением граничного условия

$$\left(\frac{\lambda_2}{n} x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial S}{\partial x_1} + \left(-\lambda_2 n x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \quad (17)$$

С учетом вида S из (14) последнее условие требует, чтобы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\varepsilon \frac{a_1 a_2 \lambda_2}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \varepsilon \frac{a_1 a_2 \lambda_2}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1}. \quad (18)$$

Это значит, что функции φ и $\varepsilon \frac{a_1 a_2 \lambda_2}{2} f$ должны быть сопряженными гармоническими функциями (и, в частности, полиномами). Указанный путь сведения обратной задачи к детально изученной теории аналитических функций двух переменных делает первую ясной и легко решаемой.

Итак, подчеркнем следующее*. При возмущении исходного эллипса гармоникой n -го порядка ($n \geq 3$) поле скоростей будет описываться полиномом $(n-1)$ -го порядка. Но хотя в деформированной полости поле скоростей уже нелинейное по координатам, его вихрь остается всюду равным прежней невозмущенной величине J_3 .

При построении функций φ и f надо исходить из того, что для любого n существует именно пара сопряженных гармонических полиномов: в каком сочетании их брать, не имеет принципиального значения. Вот примеры пар сопряженных однородных полиномов для $n = 3$ и $n = 4$:

$$\{3x_1^2 x_2 - x_2^3; 3x_1 x_2^2 - x_1^3\}; \{4(x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3); x_1^4 - 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4\}. \quad (19)$$

Надо учитывать, конечно, что к однородным полиномам могут быть добавлены без нарушения гармоничности еще члены, линейно зависящие от координат.

Приведем пример, давший толчок к написанию данной заметки. В статье [3] рассматривался равновесный жидкий цилиндр с внутренним полем скоростей (13). Было показано, что при некотором n цилиндр без потери равновесия может быть деформирован лагранжевым смещением $\bar{\xi}(x)$

$$\bar{\xi}_1 = S_0 + S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2; \quad \bar{\xi}_2 = -2S_1 x_1 x_2 \quad (20)$$

в двумерную грушевидную фигуру (где S_i —бесконечно малые величины). Для грушевидной фигуры найдены линии тока

$$S(x_1, x_2, m) = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - m^2 - \frac{2x_1}{a_1^2} \left[S_0 + S_1 x_1^2 + \left(S_2 - \frac{2S_1}{n_2} \right) x_2^2 \right] = 0, \quad (21)$$

* Малый объем заметки заставляет нас ограничиться далее частным случаем гармонических полиномов.

и поправки к исходному полю скоростей

$$\delta u_1 = -2 \lambda_3 n \left(S_2 - \frac{2S_1}{n^2} \right) x_1 x_2; \quad \delta u_2 = \lambda_3 n \left[S_0 + 3S_1 x_1^2 + \left(S_2 - \frac{2S_1}{n^2} \right) x_2^2 \right]. \quad (22)$$

Условием сохранения вихря при деформации цилиндра является

$$S_2 + \left(3 - \frac{2}{n^2} \right) S_1 = 0. \quad (23)$$

Из (15) с учетом выражений (22) находим теперь

$$\varphi = \lambda_3 n x_2 [S_0 + (3x_1^2 - x_2^2) S_1]. \quad (24)$$

Из (21) видно, что введенная в (14) функция $\epsilon f(x_1, x_2)$ равна

$$\epsilon f = \frac{2x_1}{a_1^2} \left[S_0 + S_1 x_1^2 + \left(S_2 - \frac{2S_1}{n^2} \right) x_2^2 \right] = \frac{2x_1}{a_1^2} \left[S_0 + (x_1^2 - 3x_2^2) S_1 \right] \quad (25)$$

Легко теперь убедиться, что найденные нами функции из (24) и (25) действительно удовлетворяют условию сопряженности (18). Мы приходим к тому же выводу из совершенно иных соображений.

3 июля 1989

Педагогический институт
г. Глазов

Б. П. КОНДРАТЬЕВ

On the Possibility of Plane Fluid Motion with Uniform Vorticity in Nonellipsoidal Cavities. In this note we consider the motion of incompressible fluid with uniform vorticity and reveal from hydrodynamical equations that the case of elliptical streamlines can in no way be the sole solution of this problem. The analytic method of calculation of distorted elliptical cavities has been developed.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Жак, Прикл. мат. и мех., 21, вып. 4, 1957.
2. Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев, Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, Наука, М., 1965, стр. 101.
3. Б. П. Кондратьев, Астрофизика, 31, 477, 1989.