

УДК: 52—64

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО МЕТОДА К ЗАДАЧАМ ПЕРЕНОСА В СТОХАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Р. С. ВАРДАНЯН, Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Поступила 27 июня 1988

Принята к печати 27 апреля 1989

Рассматривается задача переноса излучения в случайно-неоднородной среде. Предполагается, что коэффициент поглощения, вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния, функция перераспределения по частотам являются случайными функциями точки. Учитывается корреляция между значениями указанных параметров в двух последовательных точках рассеяния. На основании вероятностного метода В. В. Соболева выводится соответствующее уравнение переноса. Изучаются полученное уравнение и нелинейные уравнения факторизации.

1. *Введение.* В теории переноса излучения обычно предполагается, что локальные оптические свойства среды либо одинаковы во всех ее частях (однородная среда), либо описываются функциями координат или времени (неоднородная или нестационарная среда). При более строгом рассмотрении физических процессов, происходящих в астрофизических и других объектах, возникает необходимость учета случайных изменений (флуктуаций) локальных свойств среды (случайно-неоднородная или стохастическая среда—СС). В атмосферах звезд и планет, в туманностях и в других астрофизических объектах вследствие турбулентных движений или при случайных изменениях внешних электромагнитных полей электронная температура, концентрации атомов, ионов, свободных электронов, их распределение по скоростям могут подвергаться случайным изменениям. Все указанные факторы приводят к флуктуациям коэффициента поглощения κ , вероятности λ выживания кванта при элементарном акте рассеяния, функции $r(x, x')$ перераспределения излучения по частотам и др.

В работе Н. Б. Енгибаряна и А. Г. Никогосяна [1] впервые была рассмотрена задача переноса излучения в СС. В указанной работе применялся метод, который был основан на принципе инвариантности (ПИ) В. А. Амбарцумяна. В работах авторов [2—4], наряду с развитием и обобщением метода работы [1], найден способ применения вероятностного метода (ВМ) В. В. Соболева к задачам переноса в СС.

К настоящему времени в статистической радиофизике накоплен богатый материал по решению задач распространения электромагнитных волн в СС (см. [5—8]). Методы статистической радиофизики находят применение и в феноменологической теории переноса в СС [9—12]. Однако возможности такого применения сильно ограничены из-за специфики требований, предъявляемых к характеру флуктуаций оптических параметров. В работе [13] рассмотрена задача переноса излучения в турбулентной среде, при предположении, что вдоль траектории фотона поле скоростей описывается марковским процессом.

Следует отметить, что, как в статистической радиофизике, так и в теории переноса излучения, в СС не удастся получить точные замкнутые уравнения относительно статистических характеристик поля излучения. В связи с этим обратим внимание на следующее важное обстоятельство. Как известно, в теории переноса излучения в детерминированных средах можно использовать различные уравнения: краевые задачи для интегродифференциальных уравнений переноса или их интегральные формы, интегральные уравнения, полученные применением ВМ, нелинейные функциональные уравнения, к которым приводит ПИ. Все эти уравнения полностью согласованы друг с другом: разработаны математические методы формального перехода от одного уравнения к другому. Что касается задач переноса в СС, то выбор метода имеет более принципиальное значение. Дело в том, что применение каждого конкретного метода связано с определенным приближением. В ряде случаев априори неизвестно, каким методом можно получить более точное уравнение. Поэтому сравнение результатов, полученных тем или иным методом, может дать существенную информацию о степени точности метода и решения соответствующей задачи переноса в СС. С этой точки зрения роль вероятностного метода Соболева в теории переноса излучения в СС оказывается важнее роли этого метода в классической теории переноса. В случае детерминированной среды ВМ является удобным и наглядным способом прямого вывода интегральных уравнений переноса и вероятностной трактовки той или иной величины. Что касается переноса в СС, то ВМ позволяет получить замкнутые уравнения для ряда задач переноса излучения при таких приближениях, которые с большим трудом поддаются (либо вовсе не поддаются) компактному описанию другими методами. К преимуществам ВМ относится возможность его применения к задачам переноса в трехмерных стохастических средах, а также возможность его сочетания с методом Монте-Карло. Отметим также следующие преимущества ПИ и ВМ по сравнению с методами статистической радиофизики: а) в отличие от последних, ПИ и ВМ можно применить при весьма общих предположениях о характере флуктуаций самых различных параметров, описывающих локальные свойства среды; б) применение методов статистической радиофизики предполагает выполнение операции

усреднения в исходном стохастическом уравнении переноса по всему ансамблю реализаций случайного поля. Применение ПИ и ВМ основано на составлении уравнений относительно некоторых условных вероятностей при заданном значении u поля в некоторой точке, что равносильно проведению операции усреднения по подансамблю реализаций случайного поля. Далее, после решения полученного уравнения, в котором u играет роль одного из аргументов, проводится усреднение по распределению u . Такой путь увеличивает точность решения задачи.

В настоящей работе будет показано, что сочетание ВМ с методом нелинейных уравнений факторизации работ [14—15] приводит к эффективному решению ряда задач переноса в СС.

2. *Постановка задачи.* Предположим, что случайным изменениям подвергается некоторый параметр u , от которого зависят α , λ или другие величины, описывающие элементарный акт рассеяния. Так, например, в задачах переноса в спектральных линиях от u может зависеть функция перераспределения по (безразмерным) частотам $r(x, x')$. В задачах анизотропного рассеяния от u может зависеть индикатриса рассеяния. Указанные и другие величины являются детерминированными функциями от u , которая в свою очередь является случайной функцией от координат точки z : $u = U(z)$. В качестве примера рассмотрим задачу переноса в спектральной линии при предположении, что случайным изменениям подвергается λ вследствие флуктуаций концентрации n_e свободных электронов.

Имеем (см. [16])

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + n_e a_{21}},$$

где A_{21} — эйнштейновский коэффициент спонтанного перехода, a_{21} — коэффициент деактивации атома вследствие электронных ударов.

Следуя работе [3], в качестве u можно взять $u = -\ln n_e$, т. е.

$$\lambda = \lambda(u) = \frac{1}{1 + \gamma e^{-u}}; \quad \gamma = \frac{a_{21}}{A_{21}}. \quad (1)$$

Тогда, если u изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то λ изменяется от 0 до 1.

Теперь несколько слов о возможных случайных изменениях функции перераспределения r . Рассмотрим случай, когда уширение спектральной линии обусловлено совместным влиянием эффекта Доплера и эффектов давления. Тогда (см. [20])

$$r(x, x') = \pi^{-\frac{5}{2}} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} f(x, y) f(x', y) e^{-y^2} dy,$$

где

$$f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{a} - \arctg \frac{x-y}{a}.$$

Флуктуации концентрации атомов может привести к случайным изменениям величины a , т. е. $a = a(u)$, что и обуславливает зависимость f от u .

Нами будет принята следующая модель случайного поля $U(z)$:
 а) Пусть z и z' — две точки среды. Обозначим через g плотность распределения величины u в точке z , при условии, что $U(z') = u'$. Предполагается, что g зависит от расстояния между точками z и z' , т. е. $g = g(|z - z'|, u, u')$. Пусть $G = G(z) (z \geq 0)$ — оператор с ядром g : $[G(z)f](u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z, u, u') f(u') du'$. G является стохастическим интегральным оператором, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z, u, u') du' = 1. \quad (2)$$

б) Предполагается, что оператор-функция $G = G(z)$ обладает полугрупповым свойством

$$G(z_1 + z_2) = G(z_1) G(z_2); G(0) = I; z_{1,2} \geq 0. \quad (3)$$

Здесь I — единичный оператор.

Условие (3) означает марковость случайного поля U вдоль каждого луча.

в) При составлении уравнения переноса будем исходить из следующего (приближенного) допущения о корреляции между значениями u в разных точках: пусть $z_1, \dots, z_n$ — последовательные точки рассеяния кванта, после чего квант поглощается или рассеивается в точке z . Распределение величины u в точке z считается зависящим только лишь от значения $u_n = U(z_n)$. Таким образом, в принятом нами приближении не учитывается информация о значениях поля в предыдущих точках рассеяния $z_1, \dots, z_{n-1}$. Приведем некоторые аргументы в пользу сделанного выше допущения.

В известных моделях случайных полей [7] корреляция между значениями поля в двух точках z и z' быстро убывает с возрастанием расстояния $|z - z'|$ между этими точками. Если же известны значения поля в точках $z_1, \dots, z_n$, то основную роль в распределении u в точке z играет та из этих точек, которая наиболее близка к точке z . В случае задач переноса в трехмерной среде с достаточно большой вероятностью p близлежащей к z точкой является предыдущая точка рассеяния z_n . Так, например, в случае задачи когерентного изотропного рассеяния $p \approx 0,8$; в случае некоге-

рентного рассеяния эта вероятность еще ближе к 1. Что касается одномерных задач переноса, то их мы рассматриваем как приближения к трехмерным, поэтому качественные особенности трехмерных задач можно считать выполненными также в одномерном случае. В связи со сказанным представляет интерес рассмотрение задачи в более точной постановке, когда учитывается информация о значениях u в двух или трех предыдущих точках рассеяния.

Рассмотрим теперь случай быстрых флуктуаций, когда реализация случайного поля может подвергаться случайным изменениям за время, порядка времени диффузии одного кванта. Если величина u меняется только лишь со временем t и случайный процесс $U(t)$ является марковским, то сделанное нами выше предположение выполняется точно. Вопросы, связанные с существованием таких полей, мы здесь затрачивать не будем.

Предположим теперь, что при диффузии частица между двумя последующими рассеяниями подвергается непрерывным слабым воздействиям со стороны среды, вследствие чего флуктуирует энергия, направление движения или какой-нибудь другой параметр, характеризующий частицу. Согласно известной предельной теореме Маркова—Линдберга указанные флуктуации будут распределены нормально. Очевидно также, что при этом выполняется условие марковости вдоль траектории. Такие задачи вполне укладываются в вышеописанную схему.

Обозначим через M инфинитезимальный производящий оператор полугруппы G (см. [17, 18, 1]):

$$M = \frac{dG(z)}{dz} \Big|_{z=0^+}. \quad (4)$$

$G(z)$ удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\frac{dG}{dz} = MG; \quad G(0) = I. \quad (5)$$

Формальное решение (5) следующее:

$$G(z) = e^{Mz}. \quad (6)$$

В случае гаусс-марковского случайного поля функция g и оператор G имеют вид (см. [17, 18, 1])

$$g = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(1-k^2)}} \exp \left\{ \frac{-[u - \bar{u} - k(u' - \bar{u})]^2}{2\sigma^2(1-k^2)} \right\}, \quad (7)$$

$$M = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial u^2}; \quad \varepsilon = \frac{\sigma^2}{l}, \quad (8)$$

где σ^2 — дисперсия поля $U(z)$, $k = k(|z - z'|)$ — коэффициент корреляции, $\bar{u}$ — среднее значение величины u , l — эффективный радиус корреляции. В случае экспоненциально-коррелированного поля $U(z)$ имеем

$$k(z) = e^{-\frac{|z|}{l}}. \quad (9)$$

3. *Распределение длины свободного пробега.* Рассмотрим одну вспомогательную задачу, решение которой будет использовано при составлении уравнения переноса в СС. Случайные изменения коэффициента поглощения α приводят к флуктуациям величины оптического расстояния между двумя точками среды. Обозначим через $q(z, u, u') du'$ вероятность того, что квант без поглощения пройдет путь длины z и в конце пути значение случайного поля $U(z)$ будет лежать в интервале $(u', u' + du')$, при условии, что в начальной точке пути $U = u$.

Из определения q , марковости поля $U(z)$ вдоль лучей и формулы полной вероятности следует

$$q(z_1 + z_2, u, u') = \int_{-\infty}^{\infty} q(z_1, u, u'') q(z_2, u'', u') du'', \quad z_{1,2} \geq 0. \quad (10)$$

Имеем также

$$q(0, u, u') = \delta(u - u'). \quad (11)$$

Определим операторы Q и A_0 :

$$[Q(z)f](u) = \int_{-\infty}^{\infty} q(z, u, u') f(u') du'; \quad [A_0 f](u) = \alpha(u) \cdot f(u).$$

Равенства (10), (11) означают, что оператор-функция $Q(z)$ обладает полугрупповым свойством. Обозначим через A инфинитезимальный оператор этой полугруппы: $Q = e^{-Az}$. Займемся вопросом нахождения вида A .

Согласно определению функций q , g и коэффициента поглощения α , для «малого» пути Δz имеем

$$q(\Delta z, u, u') = (1 - \alpha(u) \Delta z) g(\Delta z, u, u') + 0(\Delta z),$$

или в операторной форме

$$Q(\Delta z) = (1 - A_0 \Delta z) G(\Delta z) + 0(\Delta z). \quad (12)$$

Из (12) имеем

$$\frac{Q(\Delta z) - 1}{\Delta z} = \frac{G(\Delta z) - 1}{\Delta z} - A_0 G(\Delta z) + \frac{0(\Delta z)}{\Delta z}.$$

Совершая предельный переход при $\Delta z \rightarrow 0$ получаем вид искомого оператора A :

$$A = A_0 - M. \quad (13)$$

Оператор $e^{-(A_0 - M)z}$, вообще говоря, нельзя представить в виде произведения $e^{-A_0 z} \cdot e^{Mz}$. Это возможно тогда, когда операторы A_0 и M коммутативны. Так обстоит дело в том частном случае, когда коэффициент поглощения α не флуктуирует: $\alpha = \text{const}$. Тогда для оператора $Q(z)$ получаем выражение:

$$Q(z) = e^{-\alpha z} \cdot G(z). \quad (14)$$

Мы до сих пор не учитывали возможную зависимость α и q от частоты кванта x . Если считать, что во время свободного пробега частота кванта не изменяется, то q зависит от x как от параметра:

$$q(z, u, u') \equiv q(z, x, u, u').$$

Определим теперь оператор $Q(z)$ посредством

$$[Q(z)f]_{(x, u)} = \int_{-\infty}^{\infty} q(z, x, u, u') f(x, u') du'.$$

Легко убедиться, что в рассматриваемой ситуации, как и прежде, оператор Q обладает полугрупповым свойством, с тем же инфинитезимальным оператором — A , но с той разницей, что A_0 является функций умножения на $\alpha(u, x)$. Оператор Q формально можно представить в виде

$$[Q(z)f]_{(x, u)} = \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}(z, x, x', u, u') f(x', u') dx' du',$$

где

$$\tilde{Q}(z, x, x', u, u') = Q(z, x, u, u') \delta(x - x').$$

4. *Уравнение переноса в одномерном приближении.* Рассмотрим задачу некогерентного рассеяния в одномерной стохастической среде геометрической толщины z_0 . Следуя вероятностному методу В. В. Соболева, введем понятие вероятности выхода кванта из среды, поглощенной или переизлученной в некоторой точке z .

Пусть на глубине z среды переизлучен один квант частоты x , причем известно, что $U(z) = u$. Обозначим через $P(z, x, x', u, u') dx' du'$ вероятность того, что после ряда рассеяний этот квант выйдет из границы $z = 0$ среды, причем будет иметь некоторую частоту. заклю-

ченную между x' и $x' + dx'$, а значение поля U будет лежать между u' и $u' + du'$. Мы будем придерживаться модели, описанной в разделе 2.

Применение ВМ с учетом вероятностного смысла функции q приводит к следующему интегральному уравнению относительно функции P :

$$P(z, x, x', u, u') = \frac{1}{2} \delta(x - x') q(z, x, u, u') + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{z_0} dz' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \int_{-\infty}^{\infty} du'' q(|z - z'|, x, u, u'') \alpha(x, u'') r(x, x'', u'') \times \\ \times P(z', x'', x', u'', u'). \quad (15)$$

Перепишем уравнение (15) в операторной форме

$$P(z) = \frac{1}{2} Q(z) + \int_0^{z_0} Q(|z - z'|) L P(z') dz'. \quad (16)$$

Здесь $Q(z)$ — оператор, введенный в конце раздела 3: L и P — суть операторы вида

$$[L f](x, u) = \frac{\alpha(x, u) \lambda(u)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x', u) f(x', u) dx',$$

$$[P(z) f](x, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(z, x, x', u, u') f(x', u') dx' du'.$$

Заметим, что уравнение (16) является интегральной формой следующей краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений переноса

$$\frac{dJ^{\pm}}{dz} = -A J^+ + L(J^+ + J^-),$$

$$J^+(0) = \frac{1}{2} I; \quad J^-(z_0) = 0.$$

5. Полубесконечная среда. Рассмотрим уравнение (16) в случае $z_0 = \infty$. Будем применять метод нелинейных уравнений факторизации работ [14, 15]. Перепишем (16) при $z_0 = +\infty$ в «супероператорной» форме

$$(I - \hat{K}) P = \frac{1}{2} Q. \quad (17)$$

Здесь $\hat{K}$ — следующий интегральный оператор типа Винера—Хопфа.

$$[\hat{K}f](z) = \int_0^{\infty} Q(|z - z'|) f(z') dz'.$$

Рассмотрим следующую факторизацию:

$$I - \hat{K} = (I - \hat{V}_-)(I - \hat{V}_+), \quad (18)$$

где $\hat{V}_{\pm}$ — суть искомые вольтерровские операторы вида

$$[\hat{V}_+ f](z) = \int_0^z V_+(z-t) f(t) dt; \quad [\hat{V}_- f](z) = \int_z^{\infty} V_-(t-z) f(t) dt.$$

Ядра $V_{\pm}$ операторов $\hat{V}_{\pm}$ удовлетворяют следующей системе нелинейных (операторных) уравнений (см. [14]):

$$\begin{aligned} V_+(z) &= Q(z)L + \int_0^{\infty} V_-(t) V_+(z+t) dt, \\ V_-(z) &= Q(z)L + \int_0^{\infty} V_-(z+t) V_+(t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Ищем решение (19) в виде

$$V_+(z) = \varphi Q(z)L; \quad V_-(z) = Q(z)\varphi L. \quad (20)$$

Здесь φ (как и L) — не зависящий от z оператор. Легко проверить, что система (19) будет иметь решение вида (20), если φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi = I + \int_0^{\infty} Q(t)\varphi L\varphi Q(t) dt. \quad (21)$$

Из (21) можно перейти к следующему уравнению типа уравнения Амбарцумяна относительно $\rho = \varphi - I$:

$$A\rho + \rho A = (I + \rho)L(I + \rho). \quad (22)$$

ρ — искомый интегральный оператор, имеющий смысл оператора отражения.

Уравнение (22) обладает тем преимуществом над (17), что ρ в (22), в отличие от P , не зависит от z .

Вопрос о применении факторизации (18) к решению уравнения (17) будет рассмотрен в разделе 8.

6. *Вопросы разрешимости.* Вкратце рассмотрим вопросы разрешимости уравнения переноса (16) и уравнения Амбарцумяна (22) (или его интегральной формы (21)). Мы ограничимся рассмотрением того частного случая, когда флуктуирует только λ , т. е. α и γ не зависят от u . Тогда оператор-функция $Q(z)$ имеет вид (14).

Рассмотрим вопрос разрешимости уравнения (16). Введем последовательные приближения для (16):

$$P_{n+1}^{(z)} = \frac{1}{2} e^{-A_0 z} G(z) + \int_0^{\infty} e^{-A_0 |z-z'|} G(|z-z'|) L P_n(z') dz', \quad (23)$$

$$P_0 = 0; \quad n = 0, 1, \dots$$

Очевидно, (23) определяет последовательность P_n положительных операторов, монотонно возрастающих по n . Пусть $J = J(x, u)$ — функция, тождественно равная единице. Из (23) индукцией по n доказывается оценка

$$P_n J \leq J. \quad (24)$$

Из монотонности P_n и оценки (24) следует существование ее предела P ,

который удовлетворяет уравнению (16), причем $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, x', u, u', z) dx' du' \leq 1$. Это неравенство согласуется с вероятностным смыслом функции P . Можно доказать единственность такого решения.

Рассмотрим теперь уравнение (21). Введем следующие последовательные приближения:

$$\rho_{n+1} = \int_0^{\infty} Q(t) (I + \rho_n) L (I + \rho_n) Q(t) dt, \quad \rho_0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (25)$$

Предел ρ последовательности ρ_n назовем каноническим решением (КР) уравнений (21) и (22). Очевидно, $\rho_n \geq 0$ и ρ_n возрастает по n . Перепишем (25) в форме (22):

$$(A_0 - M) \rho_{n+1} + \rho_{n+1} (A_0 - M) = L + \rho_n L + L \rho_n + \rho_n L \rho_n. \quad (26)$$

Воспользуемся соотношениями

$$L J \leq \frac{1}{2} A_0 J; \quad G(t) J \leq J; \quad \forall t > 0; \quad M J = 0. \quad (27)$$

Здесь первое неравенство выполняется в силу $\lambda(u) \leq 1$, второе — в силу (2). Последнее равенство следует из предыдущего. M имеет вид (8).

Индукцией по n докажем неравенство

$$\rho_n J \leq J. \quad (28)$$

Введем обозначения $\beta_n = \rho_n J$; $\gamma_n = \rho_n A_0 J$.

Пусть (28) выполняется для некоторого $n \geq 0$. Применяя обе части операторного равенства (26) на функцию J , с учетом (27) и (28) получим

$$\begin{aligned} (A_0 - M) \beta_{n+1} + \gamma_{n+1} &\leq \frac{1}{2} A_0 J + \frac{1}{2} \gamma_n + \frac{1}{2} L \beta_n + \frac{1}{2} \rho_n L \beta_n \\ &\leq \frac{1}{2} A_0 J + \frac{1}{2} \gamma_n + \frac{1}{2} A_0 J + \frac{1}{2} \gamma_n = A_0 J + \gamma_n. \end{aligned}$$

В силу $\gamma_{n+1} > \gamma_n$, получаем

$$(A_0 - M) \beta_{n+1} \leq A_0 J. \quad (29)$$

Применяя к обеим частям (29) положительный оператор $Q(t) = e^{-At} = e^{-(A_0 - M)t}$ и интегрируя по t от 0 до $+\infty$, получаем:

$$\int_0^\infty e^{-At} A \beta_{n+1} dt \leq \int_0^\infty e^{-A_0 t} A_0 G(t) J dt = \int_0^\infty e^{-A_0 t} A J dt = J. \quad (30)$$

Оценка (28) доказана.

Из монотонности ρ_n и (28) следует существование КР ρ уравнения (21), которое является (сильным) пределом ρ_n , причем справедлива оценка

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x', u, u') dx' du' \leq 1. \quad (31)$$

Таким образом, мы построили положительное решение уравнений (21) и (22). По формулам (20) это решения определяет функции $V_{\pm}$, с помощью которых строится факторизация (18).

7. *Случай гауссовского поля.* Рассмотрим уравнение Амбарцумяна (21) и (22) в случае гауссовского случайного поля $U(z)$. Тогда оператор M имеет вид (8), следовательно в этом случае уравнение (22) является интегро-дифференциальным уравнением в частных производных. Для ядра $\rho(x, x', u, u')$ оператора ρ это уравнение следующее:

$$\begin{aligned}
 & [a(x, u) + a(x', u')] \rho(x, x', u, u') - \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial u'^2} \right) \rho = \\
 & = \frac{1}{2} \lambda(u) a(x, u) r(x, x', u) + \frac{1}{2} \lambda(u) a(x, u) \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x'', u) \rho(x'', x', u, u') \times \\
 & \quad (32) \\
 & \quad dx'' + \frac{\lambda(u')}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x'', u, u') a(x'', u') r(x'', x', u') dx'' + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \times \\
 & \quad \times \rho(x, x'', u, u'') \frac{\lambda(u'')}{2} a(x'', u'') r(x'', x''', u'') \rho(x''', x', u'', u') dx'' dx''' du''.
 \end{aligned}$$

Из результатов предыдущего пункта следует, что при $\alpha = \text{const}$ уравнение (32) обладает положительным решением таким, что выполняется неравенство [31]. Построение этого «физического» решения уравнения (32), исходя из итерационного процесса (25), является довольно трудоемким, так как предполагает интегрирование по дополнительному параметру l . Вопросам эффективного построения ρ намечается посвятить отдельную работу авторов.

8. Решение основного уравнения. Факторизация (18) и формулы (20) сводят уравнение переноса (16) к последовательному решению следующих двух уравнений:

$$F(z) = \frac{1}{2} Q(z) + \int_{-\infty}^{\infty} V_{-}(t-z) F(t) dt, \quad (33)$$

$$P(z) = F(z) + \int_0^{\infty} V_{+}(z-t) P(t) dt. \quad (34)$$

Уравнение (33) может быть решено в замкнутом виде: справедлива формула

$$F(z) = \frac{1}{2} \varphi Q(z). \quad (35)$$

Рассмотрим теперь уравнение (34). С учетом (35) и (20) получим следующее уравнение для P :

$$P(z) = \frac{1}{2} \varphi Q(z) + \int_0^{\infty} \varphi Q(z-t) L P(t) dt. \quad (36)$$

Обозначим

$$H(z) = \int_0^z Q(z-t) L P(t) dt. \quad (37)$$

Из (36) для $H(z)$ получается следующее уравнение:

$$\frac{dH}{dz} = -(A - L\varphi) H + \frac{1}{2} L\varphi Q(z), \quad (38)$$

с условием

$$H(0) = 0. \quad (39)$$

Решение задачи (38), (39) имеет вид

$$H(z) = \frac{1}{2} \int_0^z \Omega(z-t) L\varphi Q(t) dt, \quad (40)$$

где

$$\Omega(z) = e^{-(A-L\varphi)z}. \quad (41)$$

Итак, мы получили следующее представление для решения уравнения (16):

$$P(z) = \frac{1}{2} \varphi \left[Q(z) + \int_0^z \Omega(z-t) L\varphi Q(t) dt \right]. \quad (42)$$

9. *Среда конечной толщины.* С помощью найденного выше оператора ρ можно построить решение также задачи переноса в среде конечной толщины z_0 . Ниже мы опишем способ решения уравнения (16) для $z_0 < +\infty$, используя при этом решение (42) задачи (16) на полуоси. Этот метод исходит из работы [19]. Обозначим через $Y(z) \equiv Y_+(z)$ решение уравнения (16) (или (15)), а через $P(z)$ — решение задачи на полуоси. Оно имеет вид (42). Уравнение (16) при $z_0 = +\infty$ можно переписать в виде

$$P(z) = \frac{1}{2} Q(z) + \int_{z_0}^{\infty} Q(|z-t|) L P(t) dt + \int_0^{z_0} Q(|z-t|) L P(t) dt. \quad (43)$$

Будем считать, что $z \leq z_0$. Тогда в первом интеграле правой части (43) $z-t \leq 0$. Поэтому (43) можно представить в виде

$$P(z) = \frac{1}{2} Q(z) + Q(z_0 - z) W + \int_0^{z_0} Q(|z-t|) L P(t) dt, \quad (44)$$

где

$$W \equiv W_{z_0} = \int_{z_0}^{\infty} Q(t - z_0) L P(t) dt. \quad (45)$$

С учетом формулы (42) для W можно получить следующее выражение:

$$W = \frac{1}{2} \int_{z_0}^{\infty} Q(t - z_0) L \left\{ \varphi Q(t) + \varphi \int_0^t Q(t - y) L \varphi Q(y) dy \right\} dt. \quad (46)$$

Сравнение свободных членов уравнений (16) и (44) приводит к следующему соотношению между их решениями:

$$P(z) = Y(z) + Y(z_0 - z) W. \quad (47)$$

Из (47) получаем явную формулу для $Y(z)$:

$$Y(z) = [P(z) - P(z_0 - z)] (I - W^2)^{-1}.$$

Несколько слов об обратимости оператора $I - W^2$. Из (24) и (27) следует, что $WJ \leq \lambda_0 J$, где $\lambda_0 = \max \lambda(u) \leq 1$. Если $\lambda_0 < 1$, то оператор W сжимающий, а $I - W^2$ обладает положительным обратным. Заметим также, что при $\lambda_0 < 1$ норма оператора W экспоненциально убывает по z_0 , что существенно упрощает вычисления при больших z_0 .

Авторы выражают глубокую благодарность академику В. А. Амбарцумяну за ценное обсуждение результатов работы.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

APPLICATION OF THE PROBABILITY METHOD TO PROBLEMS OF TRANSFER IN STOCHASTIC MEDIA

R. S. VARDANIAN, N. B. YENGIBARIAN

The present paper deals with the problem of radiation transfer in randomly inhomogeneous medium. The absorption coefficient, the quantum survival probability in case of the elementary act of scattering and the frequency redistribution function are supposed to be random functions of the point. Correlation between the values of the parameters mentioned above are taken into account in two successive points of scattering. A corresponding transfer equation is derived on the basis of V. V. Sobolev's probability method. The obtained transfer equation and non-linear equations of factorization are studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян, в сб. «Звезды, туманности, галактики», Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1969, стр. 65.
2. Р. С. Варданын, Канд. диссертация, Ереван, 1972.
3. Р. С. Варданын, Н. Б. Енгибарян, Принцип инвариантности и его применения, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1989.
4. Отчет ИППФ АН Арм.ССР, «Разработать мат. методы решения задач переноса излучения в среде со случайными локальными свойствами...», № Гос. рег. 01.84.0, 038492, 0286.0, 000953, ВНИИЦ.
5. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, Наука, М., 1967.
6. А. Исимару, Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах, ч. 1, 2, Мир, М., 1981.
7. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Введение в статистическую радиофизику, ч. 2, Наука, М., 1978.
8. Л. А. Апресян, Ю. А. Кравцов, Теория переноса излучения, Наука, М., 1983.
9. Р. С. Варданын, Астрофизика, 24, 550, 1986.
10. Р. С. Варданын, Г. В. Папян, Изв. АН Арм.ССР, Физика, 22, 316, 1987.
11. Р. С. Варданын, Н. Б. Енгибарян, Изв. АН Арм.ССР, Физика, 23, 9, 1988.
12. R. S. Vardanian, Astrophys. and Space Sci., 141, 375, 1988.
13. H. Fritsch, U. Fritsch, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 175, 157, 1976.
14. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, Мат. сб., 97, 35, 1975.
15. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, Итоги науки и техн. ВИНТИ, Мат. анализ, 22, 175, 1984.
16. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
17. А. Д. Вентцель, Курс теории случайных процессов, Наука, М., 1975.
18. К. Иосида, Функциональный анализ, Мир, М., 1967.
19. Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, Мат. заметки, 19, 927, 1976.
20. Д. Михалас, Звездные атмосферы, Мир, М., 1, 2, 1982.