

**О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
ГЕОГРАФИЧЕСКОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ**

Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Ереванский государственный университет
Национальный Аграрный Университет Армении
Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова¹
E-mails: *khachatur.khachatryan@ysu.am; Haykuhi25@mail.ru*

Аннотация. Исследуется многомерное интегральное уравнение типа свертки с вогнутой нелинейностью. Указанное уравнение возникает в математической теории географического распространения эпидемии. Сочетание известных методов многомерных операторов и методов построения инвариантных конусных отрезков для таких операторов с методами теории интегральных операторов типа свертки и предельных теорем теории функций позволяют доказать существование положительных ограниченных решений для таких уравнений. Также изучается асимптотическое поведение построенных решений. В конкретно выбранном конусном отрезке доказывается также единственность решения. Приводятся конкретные прикладные примеры указанных уравнений.

MSC2010 number: 45G05; 92D30.

Ключевые слова: эпидемия; вогнутость; сходимость; единственность; последовательные приближения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующий класс многомерных нелинейных интегральных уравнений на множестве $(-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$:

$$(1.1) \quad u(t, x) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} A(t - \tau, x, y) g(u(\tau, y)) dy d\tau, \quad t \in (-\infty, T], \quad x \in \mathbb{R}^n$$

относительно искомой функции $u(t, x)$.

Уравнение (1.1) имеет непосредственное применение в математической теории географического распространения эпидемии, где

$$(1.2) \quad S(t, x) = S_0 e^{-u(t, x)}, \quad S_0 = \text{const}$$

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 19-11-00223)

представляет собой плотность восприимчивых лиц в момент времени t в точке $x := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (см. [1]-[4]).

Функция $A(\tau, x, y)$ имеет вероятностный смысл: $A(\tau, x, y)d\tau dy$ представляет собой вероятность того, что восприимчивый человек в точке $x \in \mathbb{R}^n$ приобретает инфекцию от инфицированных лиц, находящихся в параллелепипеде $(y, y + dy)$, $y \in \mathbb{R}^n$ и зараженных в момент времени из интервала $(\tau - d\tau, \tau)$.

Соответствующее одномерное уравнение исследовалось в работах [1]-[3] в случае, когда функция A допускает следующее представление:

$$(1.3) \quad A(\tau, x, y) = H(\tau)v(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

где

$$(1.4) \quad H(\tau) \geq 0, \tau \in [0, +\infty), \int_0^\infty H(\tau)d\tau = 1, \int_0^\infty \tau H(\tau)d\tau < +\infty,$$

$$(1.5) \quad v(-x) = v(x) \geq 0, \quad x \in [0, +\infty), \quad \int_{-\infty}^\infty v(x)dx = 1$$

и функция v имеет конечный момент определенного порядка.

В частности, в работе [1] при дополнительных ограничениях на H , v и g построены волновые фронты для следующего одномерного (по координате) нелинейного интегрального уравнения:

$$(1.6) \quad u(t, x) = \int_{-\infty}^t H(t - \tau) \int_{\mathbb{R}} v(x - y)g(u(\tau, y))dyd\tau, \quad (t, x) \in (-\infty, T] \times \mathbb{R}.$$

В работе [3] построены знакопеременные монотонные (и по времени, и по координате) и ограниченные решения для уравнения (1.6). В работах [1]-[2] особое внимание уделено случаю, когда функция $g(u)$ допускает следующее представление:

$$(1.7) \quad g(u) = \gamma(1 - e^{-u}), \quad u \geq 0, \quad \gamma > 1,$$

где γ — числовой параметр. Условие $\gamma > 1$ называется пороговым условием. Последнее означает, что при $\gamma \leq 1$ невозможно остановить инфекцию (см. [1]-[2]).

В многомерном (n -мерном) случае когда, функция $A(\tau, x, y)$ представляется в следующем виде:

$$(1.8) \quad A(\tau, x, y) = H(\tau)V(x - y)\lambda_0(x, y),$$

где

I)

$$(1.9) \quad V(z) \geq 0, \quad z := (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \int_{\mathbb{R}^n} V(z) dz = 1,$$

II) $V(z)$ — четная функция по каждому аргументу, т.е. $V(z) = V(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$,

III) $V \in C_M(\mathbb{R}^n)$ и сходятся интегралы: $\int_0^\infty u T_j(u) du < +\infty$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$,
где

$$(1.10) \quad \begin{aligned} T_1(u) &:= \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty V(u, z_2, \dots, z_n) dz_2 \dots dz_n, \\ T_2(u) &:= \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty V(z_1, u, z_3, \dots, z_n) dz_1 dz_3 \dots dz_n, \\ &\dots \dots \dots \\ T_n(u) &:= \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty V(z_1, \dots, z_{n-1}, u) dz_1 \dots dz_{n-1}, \end{aligned}$$

а $C_M(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}^n$,

IV) $V \downarrow [0, +\infty)$ по z_j на $j = 1, 2, \dots, n$,

A) $1 \geq \lambda_0(x, y) \geq \max\{\mu_1(|y_1|), \mu_2(|y_2|), \dots, \mu_n(|y_n|)\}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$0 < \delta_j \leq \mu_j(u) \leq 1$, $u \in [0, +\infty)$, $\mu_j(u) \uparrow [0, +\infty)$ по u ,

$\lim_{u \rightarrow +\infty} \mu_j(u) = 1$, $1 - \mu_j \in L_1(0, +\infty)$, $j = 1, 2, \dots, n$,

B) $\lambda_0 \in C(\mathbb{R}^{2n})$, $\lambda_0(x, y) \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,

уравнение (1.1) изучалось в недавней работе А.Г. Сергеева и автора (см. [4]).

Заметим, что в том случае, когда $\lambda_0(x, y) \equiv 1$ (консервативный случай) и функция $g(u)$ допускает представление (1.7), уравнение (1.1) с ядром (1.8) обладает двумя тривиальными (вакуумными) решениями:

$$u^1 \equiv 0, \quad u^2 \equiv \eta,$$

где число η является положительным корнем уравнения

$$\gamma(1 - e^{-u}) = u.$$

Как известно, вопрос о построении нетривиальных и ограниченных решений между вакуумами $u^1 \equiv 0$ и $u^2 \equiv \eta$ в n -мерном случае ($n > 1$), когда в представлении (1.8) функция $\lambda_0 \equiv 1$ до сих пор оставался открытым (см. [1]-[3]).

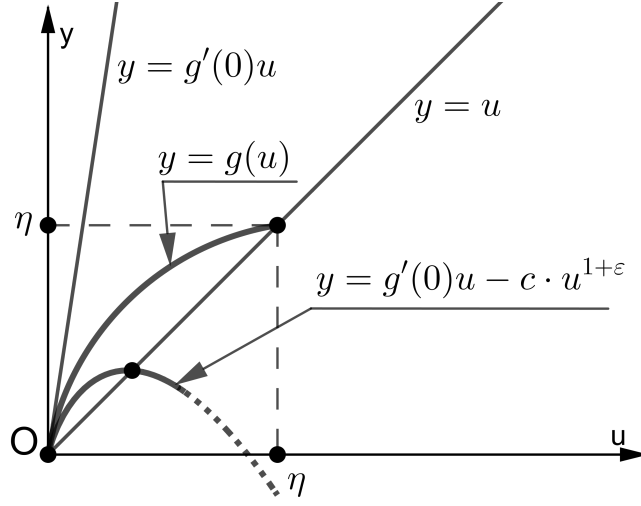


Рис. 1

Настоящая работа посвящена исследованию нелинейного n -мерного интегрального уравнения (1.1) в случае, когда

$$(1.11) \quad A(\tau, x, y) = H(\tau)V(x - y) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

где функции H и V удовлетворяют соответственно условиям (1.4) и I) – III). Предполагается, что $g(u)$ — вогнутая на некотором отрезке $[0, \eta]$ функция, удовлетворяющая следующим условиям (см. рис. 1):

а) существует производная $1 < g'(0) < +\infty$ такая, что

$$g(u) \leq g'(0)u, \quad u \in [0, \eta],$$

б) $g(u) \uparrow$ по u на $[0, \eta]$, $g(0) = 0$, $g(\eta) = \eta$,

с) существуют числа $\varepsilon > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$g(u) \geq g'(0)u - cu^{1+\varepsilon}, \quad u \in [0, \eta].$$

В настоящей работе мы займемся построением ограниченного и нетривиального решения между вакуумами 0 и η для уравнения (1.1) с ядром (1.11), а также исследованием некоторых качественных свойств построенного решения. В конкретном выбранном конусном отрезке докажем также единственность решения. В конце приведем конкретные прикладные примеры уравнения (1.1), для которых выполняются все условия сформулированных теорем. Следует отметить, что из

доказанных результатов, как частный случай, получается теорема О. Дикмана (см. [1], теорема 6.1) о волновых фронтах для одномерного уравнения (1.6).

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

2.1. Функция Дикмана. Рассмотрим следующие функции Дикмана (см. [1]):

$$(2.1) \quad L_j(\lambda) := g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(x) e^{-\lambda x} dx, \quad \lambda \in [0, +\infty), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$(2.2) \quad \tilde{T}_j(x) := \int_0^{\infty} H(p) T_j(x - \theta_j p) dp, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $\theta_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ — числовые параметры (играют роль волновых скоростей (см. [1])), а функции $\{T_j\}_{j=1}^n$ задаются согласно формулам (1.10).

Ниже перечислим некоторые основные свойства ядерных функций $\{T_j(x)\}_{j=1}^n$, $\{\tilde{T}_j\}_{j=1}^n$:

$$(2.3) \quad T_j(-x) = T_j(x), \quad x \in [0, +\infty), \quad T_j(u) \geq 0, \quad u \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} T_j(u) du = 1,$$

$$(2.4) \quad \tilde{T}_j(u) \geq 0, \quad u \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(u) du = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Эти свойства сразу следуют из представлений (1.10) и (2.2) с учетом условий *I*) и *II*). Из (2.3) и условия *III*) следует также, что

$$(2.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u T_j(u) du = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что в силу (2.4), (2.5) и условий *a*), *I*), *III*), (1.4) имеют место следующие соотношения:

$$L_j(0) = g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(x) dx > \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(x) dx = 1,$$

$$\frac{dL_j(0)}{d\lambda} = -g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(x) x dx < 0,$$

ибо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(x) x dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \int_0^{\infty} H(p) T_j(x - \theta_j p) dp dx =$$

$$= \int_0^{\infty} H(p) \int_{-\infty}^{\infty} (\theta_j p + \tau) T_j(\tau) d\tau dp = \theta_j \int_0^{\infty} p H(p) dp > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно также, что

$$\frac{d^2 L_j(\lambda)}{d\lambda^2} = g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \tilde{T}_j(x) e^{-\lambda x} dx > 0, \quad (\text{может быть и } +\infty), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Из этих соображений немедленно следует, что

- $L_j(\lambda) \downarrow$ по λ в некоторых окрестностях нуля $[0, r_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$ соответственно,
- функции $\{L_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ выпуклы (вниз) на $[0, +\infty)$ (см. рис. 2).

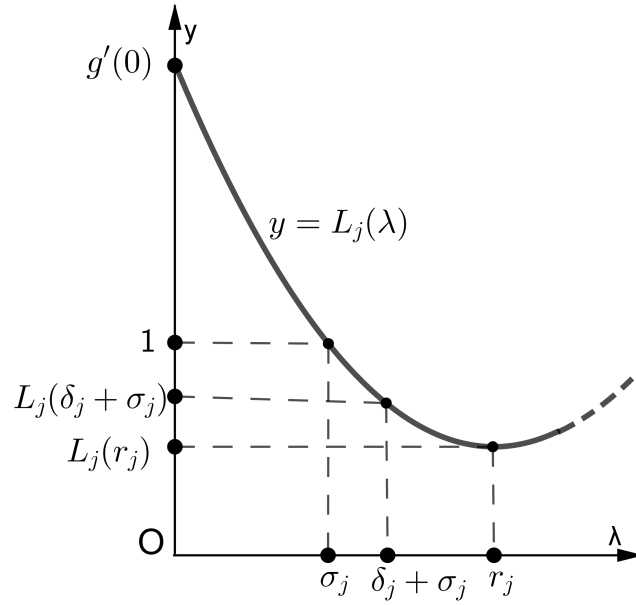


Рис. 2

В дальнейшем, если не будет оговорено противное, будем считать, что

$$(2.6) \quad L_j(r_j) < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда согласно теореме Больцано-Коши, существуют числа $\sigma_j \in (0, r_j)$ такие, что

$$(2.7) \quad L_j(\sigma_j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Из монотонности функций $\{L_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ следует, что числа $\{\sigma_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ определяются единственным образом.

Учитывая монотонность функций $\{L_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, а также формулы (2.6) и (2.7) можем утверждать, что для всех $\delta_j \in (0, r_j - \sigma_j)$ имеют место неравенства

$$(2.8) \quad L_j(\delta_j + \sigma_j) < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим следующие вспомогательные функции (см. [1]):

$$(2.9) \quad \mathcal{L}_j(x) := \max\{\eta e^{\sigma_j x} - M e^{(\delta_j + \sigma_j)x}, 0\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$(2.10) \quad M > \eta, \quad \delta_j \in (0, \min\{r_j - \sigma_j, \varepsilon \sigma_j\}), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

— числовые параметры.

Из определения функций $\{\mathcal{L}_j(x)\}_{j=1}^n$ сразу следует, что

$$(2.11) \quad \mathcal{L}_j(x) = 0 \text{ при } x \geq \frac{1}{\delta_j} \ln \frac{\eta}{M}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$(2.12) \quad \mathcal{L}_j^{1+\varepsilon}(x) \leq \eta^{1+\varepsilon} e^{(\delta_j + \sigma_j)x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

2.2. Последовательные приближения для одномерных вспомогательных уравнений. Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующие одномерные нелинейные интегральные уравнения типа свертки на всей прямой:

$$(2.13) \quad \Phi_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(x-t) g(\Phi_j(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

относительно искомых функций $\{\Phi_j(x)\}_{j=1}^n$, где ядра $\{\tilde{T}_j(x)\}_{j=1}^n$ задаются согласно формуле (2.2). Рассмотрим следующие последовательные приближения Дикмана (см. [1]) для уравнений (2.13):

$$\Phi_j^{(m+1)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(x-t) g(\Phi_j^{(m)}(t)) dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где в качестве нулевого приближения берутся следующие функции:

$$(2.14) \quad \Phi_j^{(0)}(x) = \begin{cases} \eta, & x \geq 0, \\ \eta e^{\sigma_j x}, & x < 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Повторяя аналогичные рассуждения как в работе [1], можно убедиться в достоверности следующих утверждений:

- 1) $\Phi_j^{(m)}(x) \downarrow$ по m , $j = 1, 2, \dots, n$,
- 2) $\Phi_j^{(m)}(x) \uparrow$ по x на $\mathbb{R}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, n$,

- 3) $\Phi_j^{(m)} \in C(\mathbb{R})$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, n$,
 4) при $\delta_j \in (0, \min\{r_j - \sigma_j, \varepsilon\sigma_j\})$ и

$$M > \max \left\{ \eta, \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{c\eta^{1+\varepsilon} L_j(\delta_j + \sigma_j)}{g'(0)(1 - L_j(\delta_j + \sigma_j))} \right\} \right\}$$

имеют место следующие неравенства:

$$\Phi_j^{(m)}(x) \geq \mathcal{L}_j(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, из 1)–4) следует, что последовательность непрерывных функций $\{\Phi_j^{(m)}(x)\}_{m=0}^\infty$, $j = 1, 2, \dots, n$ имеет поточечный предел при $m \rightarrow \infty$: $\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_j^{(m)}(x) = \Phi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Согласно предельной теореме Б. Леви (см. [5]) функции $\{\Phi_j(x)\}_{j=1}^n$ являются решениями уравнений (2.13), причем из 1), 2) и 4) следует, что

$$(2.15) \quad \mathcal{L}_j(x) \leq \Phi_j(x) \leq \Phi_j^{(0)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$(2.16) \quad \Phi_j(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Так как свертка суммируемой и ограниченной функций является непрерывной функцией на $\mathbb{R}$ (см. [6]), то в силу (2.15), (2.4) из (2.13) заключаем, что

$$(2.17) \quad \Phi_j \in C(\mathbb{R}), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Из (2.15) и (2.9) следует, что

$$(2.18) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi_j(x) = 0, \quad \Phi_j \in L_1(-\infty, 0), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Теперь найдем пределы функций $\Phi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, когда $x \rightarrow +\infty$.

В силу (2.15)–(2.17) можем утверждать, что существуют

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_j(x) = l_j \leq \eta,$$

причем $l_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

После перехода к пределу в обеих частях (2.13), когда $x \rightarrow +\infty$, с учетом известного предельного соотношения в операции свертки (см. [7]) получим

$$l_j = g(l_j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad l_j \in (0, \eta_j].$$

В силу условий а) – с) последнее возможно только тогда, когда $l_j = \eta$, $j = 1, 2, \dots, n$. Итак, мы получили, что

$$(2.19) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_j(x) = \eta, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Совершая аналогичные рассуждения как в доказательстве леммы 2 из работы [8], можно убедиться, что

$$(2.20) \quad \eta - \Phi_j \in L_1(0, +\infty), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

3. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ (1.1) С ЯДРОМ (1.11)

3.1. Последовательные приближения для уравнения (1.1) с ядром (1.11).

Рассмотрим следующие итерации для (1.1) с ядром (1.11):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_{m+1}(t, x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) g(u_m(\tau, y_1, \dots, y_n)) dy_1 \dots dy_n d\tau, \\ u_0(t, x_1, \dots, x_n) &= \begin{cases} \frac{\eta}{n} \sum_{j=1}^n e^{\sigma_j(x_j + \theta_j t)}, & \text{при } x_i + \theta_i t < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \eta, & \text{при остальных } (t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \end{aligned}$$

Сперва докажем, что

$$(3.2) \quad 0 \leq u_m(t, x_1, \dots, x_n) \downarrow \text{ по } m.$$

Действительно, учитывая тот факт, что

$$(3.3) \quad g'(0) \int_{\mathbb{R}} \tilde{T}_j(x-z) \Phi_j^{(0)}(z) dz \leq \Phi_j^{(0)}(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(доказательство (3.3) осуществляется прямой проверкой, рассматривая случаи $z \geq 0$ и $z < 0$), очевидное неравенство $0 \leq u_0(t, x_1, \dots, x_n) \leq \eta$, с учетом условия а) из (3.1) для $x_j + \theta_j t < 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ будем иметь

$$\begin{aligned} u_1(t, x_1, \dots, x_n) &\leq \frac{g'(0)}{n} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) (\Phi_1^{(0)}(y_1 + \theta_1 \tau) + \dots + \Phi_n^{(0)}(y_n + \theta_n \tau)) dy_1 \dots dy_n d\tau = \\ &= \frac{g'(0)}{n} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} T_1(x_1 - y_1) \Phi_1^{(0)}(y_1 + \theta_1 \tau) dy_1 d\tau + \\ &+ \dots + \frac{g'(0)}{n} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} T_n(x_n - y_n) \Phi_n^{(0)}(y_n + \theta_n \tau) dy_n d\tau = \\ &= \frac{g'(0)}{n} \int_{\mathbb{R}} \Phi_1^{(0)}(z_1) \int_{-\infty}^t H(t-\tau) T_1(x_1 + \theta_1 \tau - z_1) d\tau dz_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \frac{g'(0)}{n} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n^{(0)}(z_n) \int_{-\infty}^t H(t-\tau) T_n(x_n + \theta_n \tau - z_n) d\tau dz_n = \\
& = \frac{g'(0)}{n} \int_{\mathbb{R}} \Phi_1^{(0)}(z_1) \tilde{T}_1(x_1 + \theta_1 t - z_1) dz_1 + \dots + \frac{g'(0)}{n} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n^{(0)}(z_n) \tilde{T}_n(x_n + \theta_n t - z_n) dz_n \leq \\
& \leq \frac{1}{n} (\Phi_1^{(0)}(x_1 + \theta_1 t) + \dots + \Phi_n^{(0)}(x_n + \theta_n t)) = u_0(t, x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Неотрицательность функции $u_1(t, x_1, \dots, x_n)$ сразу следует из неотрицательности функций H, V и $g(u_0)$.

Предполагая, что $u_m(t, x_1, \dots, x_n) \geq 0$ и $u_m(t, x_1, \dots, x_n) \leq u_{m-1}(t, x_1, \dots, x_n)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, из монотонности функции g и неотрицательности ядерных функций H и V будем иметь

$$\begin{aligned}
u_{m+1}(t, x_1, \dots, x_n) & \leq \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \times \\
& \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) g(u_{m-1}(\tau, y_1, \dots, y_n)) dy_1 \dots dy_n d\tau = u_m(t, x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Теперь докажем, что

$$(3.4) \quad u_m(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_j(x_j + \theta_j t), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где функции $\{\tilde{\Phi}_j\}_{j=1}^n$ являются решениями уравнений (2.13) и обладают свойствами (2.15), (2.16), (2.17), (2.18) и (2.19), (2.20).

Неравенство (3.4) очевидным образом выполняется при $m = 0$, ибо имеет место (2.15). Предполагая, что (3.4) выполняется при некотором натуральном $m \in \mathbb{N}$ и учитывая неравенство Иенсена для вогнутой функции g , в силу (2.2), (2.13) из (3.1) получим

$$\begin{aligned}
u_{m+1}(t, x_1, \dots, x_n) & \geq \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \times \\
& \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) g\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_j(y_j + \theta_j \tau)\right) dy_1 \dots dy_n d\tau \geq \\
& \geq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) g(\Phi_1(y_1 + \theta_1 \tau)) dy_1 \dots dy_n d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) g(\Phi_2(y_2 + \theta_2 \tau)) dy_1 \dots dy_n d\tau + \\
 & + \dots + \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) g(\Phi_n(y_n + \theta_n \tau)) dy_1 \dots dy_n d\tau = \\
 & = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} T_1(x_1 - y_1) g(\Phi_1(y_1 + \theta_1 \tau)) dy_1 d\tau + \\
 & + \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} T_2(x_2 - y_2) g(\Phi_2(y_2 + \theta_2 \tau)) dy_2 d\tau + \dots + \\
 & + \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} T_n(x_n - y_n) g(\Phi_n(y_n + \theta_n \tau)) dy_n d\tau = \\
 & = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \tilde{T}_1(x_1 + \theta_1 t - z_1) g(\Phi_1(z_1)) dz_1 d\tau + \dots + \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \tilde{T}_n(x_n + \theta_n t - z_n) g(\Phi_n(z_n)) dz_n d\tau = \\
 & = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_j(x_j + \theta_j t).
 \end{aligned}$$

Итак, из (3.2) и (3.4) получаем поточечную сходимость последовательности $\{u_m(t, x_1, \dots, x_n)\}_{m=0}^\infty$: $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(t, x_1, \dots, x_n) = u(t, x_1, \dots, x_n)$, причем предельная функция $u(t, x_1, \dots, x_n)$ согласно теореме Б. Леви удовлетворяет уравнению (1.1) с ядром (1.11). Из (3.2) и (3.4) следует также двусторонняя оценка для построенного решения u :

$$(3.5) \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_j(x_j + \theta_j t) \leq u(t, x_1, \dots, x_n) \leq u_0(T, x_1, \dots, x_n), \\
 t \in (-\infty, T], \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Так как $u \in M((-\infty, T] \times \mathbb{R}^n)$, $H \in L_1(\mathbb{R}^+)$ и $V \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (здесь $M((-\infty, T] \times \mathbb{R}^n)$ — пространство ограниченных функций на множестве $(-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$), то из (1.1) и (1.11), в силу непрерывности свертки суммируемых и ограниченных функций следует, что

$$(3.6) \quad u \in C((-\infty, T] \times \mathbb{R}^n).$$

В (3.5) вместо переменной t взяв $t = T$, получим

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_j(x_j + \theta_j T) \leq u(T, x_1, \dots, x_n) \leq u_0(T, x_1, \dots, x_n),$$

из чего в силу (2.19) и (2.14) следует, что

$$(3.7) \quad \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \dots \lim_{x_n \rightarrow +\infty} u(T, x_1, \dots, x_n) = \eta.$$

Так как $t \in (-\infty, T]$, $T < +\infty$, то из (2.18) и (2.14) следует, что

$$(3.8) \quad \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \dots \lim_{x_n \rightarrow -\infty} u(t, x_1, \dots, x_n) = 0.$$

В силу (3.7) и (3.8) из (2.18) и (2.20) можем утверждать также, что

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \eta - u(T, +\infty, \dots, +\infty, x_j, +\infty, \dots, +\infty) &\in L_1(0, +\infty), \\ u(t, -\infty, \dots, -\infty, x_j, -\infty, \dots, -\infty) &\in L_1(-\infty, 0), \quad t \in (-\infty, T], \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Итак, на основе вышеизложенного справедлива следующая

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия (1.4), I) – III), (2.6) и a) – c). Тогда уравнение (1.1) с ядром (1.11) обладает положительным нетривиальным ограниченным и непрерывным на $(-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ решением $u(t, x_1, \dots, x_n)$. Более того, данное решение обладает дополнительными свойствами (3.5), (3.7)–(3.9).

Замечание 3.1. Следует отметить, что теорема 1 дополняет теорему существования, доказанной в работе [4]. Дело в том, что в работе [4] функция λ_0 удовлетворяет сильному ограничению: $\lambda_0 \neq 1$.

Замечание 3.2. Нетрудно убедиться, что всевозможные сдвиги решения $u(t, x_1, \dots, x_n)$ (по переменным $(x_1, \dots, x_n)$) также являются решениями уравнения (1.1) с ядром (1.11). Действительно, из (1.1) и (1.11) с помощью замены переменной будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1-z_1, x_2-z_2, \dots, x_n-z_n) g(u(\tau, z_1+\beta_1, \dots, z_n+\beta_n)) dz_1 \dots dz_n d\tau = \\ = \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1+\beta_1-y_1, x_2+\beta_2-y_2, \dots, x_n+\beta_n-y_n) \times \\ \times g(u(\tau, y_1, \dots, y_n)) dy_1 \dots dy_n d\tau = u(t, x_1+\beta_1, \dots, x_n+\beta_n). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем n -параметрическое семейство решений вида

$$u_{\beta_1, \dots, \beta_n}(t, x_1, \dots, x_n) := u(t, x_1+\beta_1, \dots, x_n+\beta_n),$$

где $u(t, x_1, \dots, x_n)$ — основное решение уравнения (1.1) с ядром (1.11), построенное при помощи последовательных приближений (3.1), а $\beta_1, \dots, \beta_n$ — произвольные вещественные параметры.

3.2. Единственность решения в определенном конусном отрезке. Возникает естественный вопрос: является ли единственным решение $u(t, x)$ уравнения (1.1) с ядром (1.11) в конусном отрезке

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_j(x_j + \theta_j t), u_0(t, x_1, \dots, x_n) \right]$$

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

Теорема 3.2. *При условиях теоремы 1 уравнение (1.1) с ядром (1.11) не может иметь более одного решения в следующем классе непрерывных функций:*

$$\mathfrak{M} := \{u \in C((-\infty, T] \times \mathbb{R}^n) : \left. \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_j(x_j + \theta_j t) \leq u(t, x_1, \dots, x_n) \leq u_0(t, x_1, \dots, x_n) \right\}$$

Доказательство. Предположим обратное: уравнение (1.1) с ядром (1.11) обладает двумя решениями $u, \tilde{u} \in \mathfrak{M}$. Сперва, учитывая следующие простые неравенства:

$$\mathcal{L}_j(x) \geq \eta e^{\sigma_j x} - M e^{(\delta_j + \sigma_j)x}, \quad \mathcal{L}_j(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

оценим разность

$$\begin{aligned} & \left(\Phi_j^{(0)}(x_j + \theta_j t) - \Phi_j(x_j + \theta_j t) \right) e^{-(x_j + \theta_j t)(\delta_j + \sigma_j)} \leq \\ & \leq \begin{cases} \eta e^{-(x_j + \theta_j t)\delta_j} - \eta e^{-(x_j + \theta_j t)(\delta_j + \sigma_j)} + M, & \text{если } x_j + \theta_j t \leq \frac{1}{\delta_j} \ln \frac{\eta}{M}, \\ \eta e^{-(x_j + \theta_j t)(\delta_j + \sigma_j)}, & \text{если } x_j + \theta_j t > \frac{1}{\delta_j} \ln \frac{\eta}{M} \end{cases} \leq \\ & \leq \begin{cases} M, & \text{если } x_j + \theta_j t \leq \frac{1}{\delta_j} \ln \frac{\eta}{M}, \\ \eta e^{\frac{-(\delta_j + \sigma_j)}{\delta_j} \ln \frac{\eta}{M}}, & \text{если } x_j + \theta_j t > \frac{1}{\delta_j} \ln \frac{\eta}{M} \end{cases} \leq \eta \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{M}{\eta} \right)^{1 + \frac{\sigma_j}{\delta_j}} := \Lambda, \end{aligned}$$

ибо

$$\eta \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{M}{\eta} \right)^{1 + \frac{\sigma_j}{\delta_j}} \geq M.$$

Итак, мы получили следующую априорную оценку сверху:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \left(\Phi_j^{(0)}(x_j + \theta_j t) - \Phi_j(x_j + \theta_j t) \right) e^{-(x_j + \theta_j t)(\delta_j + \sigma_j)} \leq \Lambda < +\infty, \\ & x_j \in \mathbb{R}, \quad \theta_j > 0, \quad t \in (-\infty, T], \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Так как $u, \tilde{u} \in \mathfrak{M}$, то в силу (3.10) имеем

$$|u(t, x_1, \dots, x_n) - \tilde{u}(t, x_1, \dots, x_n)| \leq \frac{1}{n} \Lambda \sum_{j=1}^n e^{(x_j + \theta_j t)(\delta_j + \sigma_j)},$$

из которого следует, что

$$(3.11) \quad \alpha := \sup_{(t, x_1, \dots, x_n) \in (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n} \left\{ \left[\sum_{j=1}^n e^{(x_j + \theta_j t)(\delta_j + \sigma_j)} \right]^{-1} \times \right. \\ \left. |u(t, x_1, \dots, x_n) - \tilde{u}(t, x_1, \dots, x_n)| \right\} \leq \frac{\Lambda}{n} < +\infty.$$

С другой стороны, поскольку конусной отрезок $[0, \eta]$ в себе содержит

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_j(x_j + \theta_j t), u_0(x_1, \dots, x_n) \right]$$

и функция g обладает свойствами а) – с) (см. рис. 3), то для $u, \tilde{u} \in \mathfrak{M}$ имеет место следующее неравенство:

$$(3.12) \quad |g(u) - g(\tilde{u})| \leq g'(0)|u - \tilde{u}|$$

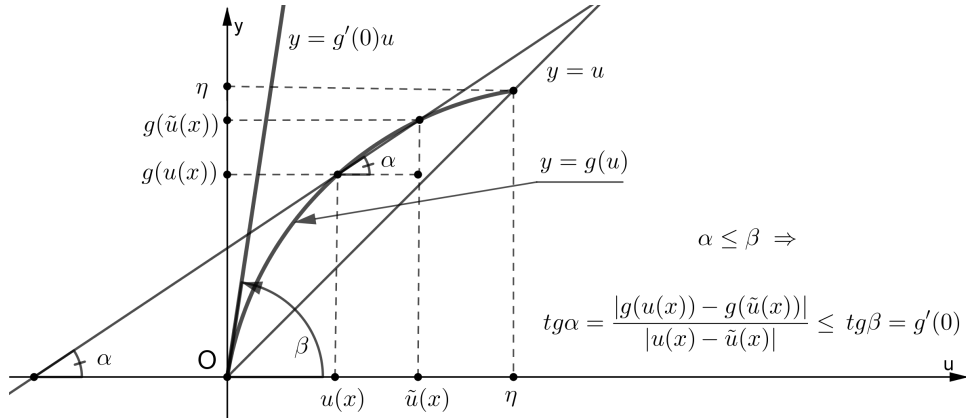


Рис. 3

Таким образом, учитывая (3.11), (3.12), из (1.1) и (1.11), будем иметь

$$\begin{aligned} |u(t, x_1, \dots, x_n) - \tilde{u}(t, x_1, \dots, x_n)| &\leq g'(0) \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}^n} V(x-y) |u(\tau, y) - \tilde{u}(\tau, y)| dy d\tau \leq \\ &\leq \alpha g'(0) \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) \sum_{j=1}^n e^{(y_j + \theta_j \tau)(\delta_j + \sigma_j)} dy_1 \dots dy_n d\tau = \\ &= \alpha g'(0) \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} T_j(x_j - y_j) e^{(\delta_j + \sigma_j)(y_j + \theta_j \tau)} dy_j d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha g'(0) \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} T_j(x_j - z_j + \theta_j \tau) e^{(\delta_j + \sigma_j) z_j} dz_j d\tau = \\
 &= \alpha g'(0) \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{(\delta_j + \sigma_j) z_j} \int_{-\infty}^t H(t-\tau) T_j(x_j - z_j + \theta_j \tau) d\tau dz_j = \\
 &= \alpha g'(0) \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{(\delta_j + \sigma_j) z_j} \int_0^\infty H(p) T_j(x_j + \theta_j t - z_j - \theta_j p) dp dz_j = \\
 &= \alpha g'(0) \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \tilde{T}(x_j + \theta_j t - z_j) e^{(\delta_j + \sigma_j) z_j} dz_j = \\
 &= \alpha g'(0) \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \tilde{T}(l_j) e^{(\delta_j + \sigma_j)(x_j + \theta_j t)} e^{-(\delta_j + \sigma_j) l_j} dl_j = \\
 &= \alpha \sum_{j=1}^n e^{(\delta_j + \sigma_j)(x_j + \theta_j t)} L_j(\delta_j + \sigma_j) \leq \alpha \max_{1 \leq j \leq n} L_j(\delta_j + \sigma_j) \sum_{j=1}^n e^{(\delta_j + \sigma_j)(x_j + \theta_j t)}.
 \end{aligned}$$

Из полученной оценки следует, что

$$(3.13) \quad \alpha \leq \alpha \max_{1 \leq j \leq n} L_j(\delta_j + \sigma_j).$$

Так как $\delta_j \in (0, \min\{\varepsilon \sigma_j, r_j - \sigma_j\})$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$, то

$$(3.14) \quad \rho := \max_{1 \leq j \leq n} L_j(\delta_j + \sigma_j) < 1.$$

Из (3.13) и (3.14) получаем, что $\alpha = 0$. Следовательно,

$$u(t, x_1, \dots, x_n) = \tilde{u}(t, x_1, \dots, x_n), \quad t \in (-\infty, T], \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тем самым, теорема полностью доказана.

Замечание 3.3. Следует отметить, что если первые моменты ядер $\{T_j(x)\}_{j=1}^n$ отрицательны и существуют числа $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_n$ ($\tilde{r}_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$) такие, что $L_j(-\tilde{r}_j) < 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, то тогда сперва при помощи следующих последовательных приближений:

$$\begin{aligned}
 \Phi_j^{(m+1)}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(x-t) \Phi_j^{(m)}(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 \Phi_j^{(0)}(x) &= \begin{cases} \eta, & \text{если } x \leq 0, \\ \eta e^{-\tilde{\sigma}_j x}, & \text{если } x > 0, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

(где $L_j(-\tilde{\sigma}_j) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$) строятся ограниченные решения одномерных уравнений (2.13) ($\Phi_j^{(m)}(x) \geq \mathcal{L}_j(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, n$), затем опять с применением итерационного процесса (3.1) для уравнения (1.1)

(с ядром (1.11)) доказывается существование ограниченного положительного непрерывного на $(-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ решения $u(t, x_1, \dots, x_n)$. Данное решение обладает следующими свойствами:

$$1) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j(x_j + \theta_j t) \leq u(t, x_1, \dots, x_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j^{(0)}(x_j + \theta_j t),$$

$$t \in (-\infty, T], (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \theta_j > 0, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{где } \tilde{\Phi}_j(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_j^{(m)}(x), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$2) \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \dots \lim_{x_n \rightarrow -\infty} u(T, x_1, x_2, \dots, x_n) = \eta,$$

$$3) \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \dots \lim_{x_n \rightarrow +\infty} u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \forall t \in (-\infty, T],$$

$$4) \eta - u(T, -\infty, \dots, -\infty, x_j, -\infty, \dots, -\infty) \in L_1(0, +\infty),$$

$$u(t, +\infty, \dots, +\infty, x_j, +\infty, \dots, +\infty) \in L_1(-\infty, 0)$$

по x_j для всех $t \in (-\infty, T], j = 1, 2, \dots, n,$

5) Решение единственно в следующем классе функций: $\mathfrak{M}^* :=$

$$\left\{ u \in C((-\infty, T] \times \mathbb{R}^n) : \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j(x_j + \theta_j t) \leq u(t, x_1, \dots, x_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\Phi}_j^{(0)}(x_j + \theta_j t) \right\}$$

Замечание 3.4. Совершая аналогичные рассуждения как при доказательстве теоремы 2, для последовательных приближений (3.1) можно получить следующую оценку:

$$(3.15) \quad \alpha_m \leq \alpha_{m-1} \rho, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\alpha_m := \sup_{(t, x_1, \dots, x_n) \in (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^n e^{-(\delta_j + \sigma_j t)(x_j + \theta_j t)} \right)^{-1} \times$$

$$|u_{m+1}(t, x_1, \dots, x_n) - u_m(t, x_1, \dots, x_n)|,$$

а число $\rho < 1$ задается согласно (3.14).

Из оценки (3.15) методом математической индукции легко можно доказать, что

$$(3.16) \quad \alpha_m \leq \alpha_0 \rho^m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Таким образом, в силу (3.16) можем утверждать, что последовательности функций

$$Q_m(t, x) := \left(\sum_{j=1}^n e^{-(\delta_j + \sigma_j t)(x_j + \theta_j t)} \right)^{-1} u_m(t, x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad m = 1, 2, \dots$$

являются равномерно сходящимися на множестве $(-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$.

Замечание 3.5. Заметим, что при условиях теоремы 1 уравнение (1.1) с ядром (1.11) в следующем классе непрерывных функций:

$$\mathfrak{P} := \left\{ f(t, \mathbf{x}) : 0 < \inf_{(t, \mathbf{x}) \in (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n} f(t, \mathbf{x}) \leq f(t, \mathbf{x}) \leq \eta, t \in (-\infty, T], \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

имеет только одно тривиальное решение $u(t, x_1, \dots, x_n) \equiv \eta$.

Действительно, если обозначить через

$$\alpha := \inf_{(t, \mathbf{x}) \in (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n} u(t, \mathbf{x}) > 0,$$

то из уравнения (1.1) с учетом (1.11), (1.4), (1.9) и монотонности функции g на отрезке $[0, \eta]$ будем иметь

$$u(t, x_1, \dots, x_n) \geq \int_{-\infty}^t H(t-\tau) \int_{\mathbb{R}^n} V(x_1-y_1, x_2-y_2, \dots, x_n-y_n) g(\alpha) dy_1 \dots dy_n d\tau = g(\alpha),$$

откуда, в частности, следует, что $\alpha \geq g(\alpha)$. Но, с другой стороны, в силу вогнутости функции g и свойств а) – с) :

$$g(\alpha) \geq \alpha$$

(ибо $\alpha \in (0, \eta]$). Следовательно, $g(\alpha) = \alpha$. Так как $\alpha \in (0, \eta]$ и g – вогнутая функция на отрезке $[0, \eta]$, то $\alpha = \eta$. Прямой проверкой можно убедиться, что $u \equiv \eta$ удовлетворяет уравнению (1.1). Таким образом, если $u \in \mathfrak{P}$ и является решением уравнения (1.1), то $u \equiv \eta$.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приведем прикладные примеры ядерных функций H , V и нелинейности g , для которых выполняются все условия доказанных теорем.

В математической теории географического распространения эпидемии возникают нелинейные интегральные уравнения вида (1.1) с ядром (1.11), в которых функции H и V допускает следующие представления (см. [1]–[2]):

$$(4.1) \quad H(\tau) = ae^{-a\tau}, \tau \geq 0, a > 0, n = 2, V(z_1, z_2) = \frac{1}{\pi} e^{-(z_1^2 + z_2^2)}, z_1, z_2 \in \mathbb{R},$$

а нелинейность $g(u)$ имеет вид:

$$(4.2) \quad g(u) = \frac{\mu S_0}{a} (1 - e^{-u}), u \geq 0, \mu > 0, S_0 > 0.$$

В теории географического распространения эпидемии неравенство

$$(4.3) \quad \frac{a}{\mu S_0} < 1$$

называется пороговым условием: это критическое число зараженных лиц, выше которого эпидемию невозможно остановить.

На этом примере убедимся, что все условия теорем 1 и 2 выполняются.

Очевидным образом приведенные функции H и V удовлетворяют условиям (1.4), $I) - III)$. Из порогового условия (4.3) сразу следует, что для функции вида (4.2) существует

$$g'(0) := \gamma = \frac{\mu S_0}{a} > 1.$$

Убедимся, что

$$g(u) \leq \frac{\mu S_0}{a} u, \quad u \geq 0.$$

Действительно, последнее неравенство сразу следует из следующего известного неравенства: $e^{-u} \geq 1 - u$, $u \in \mathbb{R}$. Так как $g''(u) = -\frac{\mu S_0}{a} e^{-u} < 0$, то функция $g(u)$ будет вогнутой. Для функции вида (4.2) проверим теперь неравенство

$$(4.4) \quad g(u) \geq g'(0)u - cu^{1+\varepsilon}, \quad u \geq 0,$$

Последнее равносильно неравенству

$$(4.5) \quad \frac{\mu S_0}{a}(1 - e^{-u}) \geq \frac{\mu S_0}{a}u - cu^{1+\varepsilon}, \quad u \geq 0.$$

При $\varepsilon = 1$, $c = \frac{\mu S_0}{2a}$ данное неравенство примет следующий вид:

$$(4.6) \quad 1 - e^{-u} \geq u - \frac{u^2}{2}, \quad u \geq 0.$$

Докажем неравенство (4.6). Рассмотрим функцию

$$\chi(u) = 1 - e^{-u} - u + \frac{u^2}{2}, \quad u \geq 0.$$

Заметим, что $\chi(0) = 0$, $\chi'(u) = e^{-u} - 1 + u \geq 0$, $u \geq 0$. Следовательно, (4.4) выполняется.

Проверим теперь выполнение условия (2.6) для ядерных функций вида (4.1).

Во-первых заметим, что тогда функции $\{T_j(x)\}_{j=1,2}$ имеют следующий вид:

$$T_1(x) = T_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

и, следовательно, в силу (2.2) имеем

$$\begin{aligned} L_j(\lambda) &= g'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(x) e^{-\lambda x} dx = \frac{\mu S_0}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x} \int_0^{\infty} H(p) T_j(x - \theta_j p) dp dx = \\ &= \frac{\mu S_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ap} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\theta_j p)^2} e^{-\lambda x} dx dp = \frac{\mu S_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a+\lambda\theta_j)p} dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{-\lambda z} dz \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu S_0}{(a + \lambda \theta_j) \sqrt{\pi}} e^{\lambda^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z+\lambda/2)^2} dz = \frac{\mu S_0}{a + \lambda \theta_j} e^{\lambda^2/4}.$$

Зафиксируем параметры $\{\theta_j\}_{j=1,2}$, μ , a , S_0 и исследуем функции $L_j(\lambda) = \frac{\mu S_0 e^{\lambda^2/4}}{a + \lambda \theta_j}$,

$j = 1, 2$. Заметим, что $L_j(0) = \frac{\mu S_0}{a} > 1$ и $\frac{dL_j(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\mu S_0 e^{\lambda^2/4} (a\lambda + \lambda^2 \theta_j - 2\theta_j)}{2(a + \lambda \theta_j)^2}$.

Следовательно, функции $L_j(\lambda) \downarrow$ по λ на $\left[\frac{-a - \sqrt{a^2 + 8\theta_j^2}}{2\theta_j}, \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8\theta_j^2}}{2\theta_j} \right]$,

$j = 1, 2$ и $r_j := \frac{\sqrt{a^2 + 8\theta_j^2} - a}{2\theta_j}$ являются точками минимума функций $L_j(\lambda)$, $j = 1, 2$.

Теперь числа $\{\theta_j\}_{j=1,2}$ выберем так, чтобы

$$L_j(r_j) < 1, \quad j = 1, 2.$$

Используя следующее простое неравенство:

$$e^{\left(\frac{\sqrt{a^2 + 8\theta_j^2} - a}{4\theta_j} \right)^2} < e^{1/2}$$

имеем

$$L_j(r_j) < \frac{2\mu S_0 e^{1/2}}{a + \sqrt{a^2 + 8\theta_j^2}} < 1$$

при

$$\theta_j > \frac{\sqrt{\mu S_0 e^{1/2} (\mu S_0 e^{1/2} - a)}}{\sqrt{2}}, \quad j = 1, 2$$

ибо $\mu S_0 > a$ (см. пороговое условие).

В конце приведем еще один пример нелинейности $g(u)$, имеющей приложение в теории географического распространения эпидемии:

$$g(u) = \gamma u - \gamma u^2, \quad u \geq 0,$$

где $\gamma > 1$ — числовой параметр.

Очевидно, что если в этом случае в качестве η выбрать $\eta = \frac{\gamma-1}{\gamma}$, то $g \uparrow$ на $[0, \eta]$, $g(0) = 0$, $g(\eta) = \eta$, g — вогнутая функция на отрезке $[0, \eta]$, $g'(0) = \gamma > 1$, $c = \gamma$, $\varepsilon = 1$. Здесь также волновые скорости $\{\theta_j\}_{j=1,2}$ можно подобрать так, чтобы выполнялись условия (2.6).

Выражаем благодарность рецензенту за полезные замечания.

Abstract. A multidimensional integral equation of the convolution type with concave nonlinearity is investigated. This equation meets in the mathematical theory of the geographical spread of the epidemic. The combination of well-known multidimensional

methods and operator methods for constructing invariant cone segments for such operators with methods of the theory of integral operators of convolution type and limit theorems of function theory allow us to prove the existence of positive bounded solutions for such equations. The asymptotic behavior of the constructed solutions is also studied. In a concretely chosen cone segment, the uniqueness of the solution is also proved. Specific applied examples of these equations are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. Dikmann, “Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection”, J. Math. Biol., **6**, no. 2, 109 – 130 (1978).
- [2] O. Dikmann, “Limiting behavior in an epidemic model”, Nonlinear Anal. **1**, no. 5, 459 – 470 (1976/77).
- [3] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, “О разрешимости некоторых нелинейных интегральных уравнений в задачах распространения эпидемии”, Труды МИАН, **306**, 287 – 303 (2019).
- [4] А. Г. Сергеев, Х. А. Хачатрян, “О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии”, Труды ММО, **80**, вып. 1, 113 – 131 (2019).
- [5] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, М., Наука (1980).
- [6] У. Рудин, Функциональный Анализ, Мир. М. (1975).
- [7] Н. Б. Енгибарян, “Уравнения восстановления на полуоси”, Известия РАН, сер. Матем., **93**, no. 1, 61 – 76 (1999).
- [8] Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, “Об одном классе интегральных уравнений с выпуклой нелинейностью на полуоси”, Изв. НАН Армении, матем., **55**, no. 1, 57 – 71 (2020).

Поступила 02 июня 2020

После доработки 06 сентября 2020

Принята к публикации 25 октября 2020