ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. С. Григорян[1,2], В. Г. Едоян[2],
член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян[1,2]

О взаимодействии концентраторов напряжений типа трещин и стрингеров с кусочно-однородным упругим полупространством при антиплоской деформации

(Представлено 17/II 2021)

Ключевые слова: *кусочно-однородное упругое полупространство, трещина, стрингер, антиплоская деформация, система интегральных уравнений.*

Введение. Во многих областях прикладной механики и инженерной практики, как например, в механике композитов, геомеханике, строительной механике и механике материалов, измерительной технике, часто возникает необходимость исследования вопросов взаимодействия различных типов концентраторов напряжений с массивными деформируемыми телами. Вокруг этих концентраторов напряжений возникают локальные поля высоких напряжений, количественная и качественная оценка которых представляет как теоретический, так и практический интерес. В этом направлении укажем на работы [1-5]. В монографии [6] рассмотрены различные варианты сочетания трещин и абсолютно жестких тонких включений, взаимодействующих с массивными упругими телами. Основные результаты и работы в этой области теории упругости с достаточной полнотой отражены в [7-9].

В настоящей статье рассматривается вопрос о взаимодействии произвольного конечного числа коллинеарных сквозных ленточных трещин и произвольного конечного числа стрингеров с кусочно-однородным полупространством при антиплоской деформации. При этом кусочно-однородное полупространство состоит из верхнего упругого слоя и нижнего упругого полупространства, изготовленных из разнородных материалов. На линии соединения разнородных материалов расположена коллинеарная система трещин, а на верхней грани слоя – коллинеарная система стрингеров. При помощи интегрального преобразования Фурье решение задачи сведено к решению системы из двух сингулярных интегральных уравнений (СИУ) довольно непростой структуры. Получена формула для разрушающих касательных напряжений вне системы трещин на их линии расположения. Рассмотрен частный случай только одной трещины. Другие важные частные случаи будут рассмотрены в дальнейшем. Результаты исследования поставленной задачи могут быть полезны при проведении расчетов сейсмостойких сооружений и зданий в условиях оползней горных пород или землетрясений, когда сдвиговые деформации почвы превалируют.

Постановка задач и вывод основных уравнений. Пусть кусочно-однородное полупространство, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, состоит из верхнего упругого слоя $\Pi_+ = \{-\infty < x, z < \infty;\ 0 \le y \le H\}$ с модулем сдвига G_+ и нижнего упругого полупространства $\Pi_- = \{-\infty < x, z < \infty;\ -\infty < y \le 0\}$ с модулем сдвига G_-. Пусть далее на линии стыковки разнородных материалов $y = 0$ расположена система коллинеарных сквозных ленточных трещин бесконечных протяженностей в направлении оси Oz $L = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j)$, верхние берега которых нагружены касательными силами $\tau_+(x)$, а нижние – касательными силами $\tau_-(x)$. Верхняя грань $y = H$ полосы Π_+ усилена коллинеарной системой ленточных стрингеров $l = \bigcup_{p=1}^{m} (c_p, d_p)$ опять бесконечных протяженностей в направлении оси Oz. Каждый стрингер системы l имеет высоту h и модуль сдвига G_0. Верхние грани стрингеров в отрицательном направлении оси Oz нагружены касательными силами, причем на p-ом стрингере силами интенсивности $\tau_p(x)$. Кроме того на левом конце $x = c_p$ этого стрингера приложены сосредоточенная сила S_p в положительном направлении оси Oz, а на правом конце $x = d_p$ в отрицательном направлении оси Oz– сосредоточенная сила $T_p\ \left(p = \overline{1, m}\right)$. При указанных силовых факторах кусочно-однородное упругое полупространство с системами трещин и стрингеров будет находиться в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. Требуется определить плотности дислокаций на берегах трещин, раскрытий трещин, коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), разрушающие касательные напряжения вне трещин на оси Ox, касательные контактные напряжения под стрингерами и осевые напряжения в их сечениях.

Приступим к выводу основных уравнений поставленной задачи, откуда будут определяться указанные механические характеристики. С этой целью введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &\tau_{yz}\big|_{y=\pm 0}=-T_\pm(x)=\begin{cases}-\tau_\pm(x) & (x\in L),\\ -\tilde{\tau}(x) & (x\in L',\ L'=R\setminus L),\end{cases}\\ &\tau_{yz}\big|_{y=H-0}=\begin{cases}-\tau(x) & (x\in l),\\ 0 & (x\in l',\ l'=R\setminus l),\end{cases}\end{aligned} \tag{2.1}$$

где τ_{yz} – компонента касательных напряжений, а $\tau(x)$ – неизвестные пока касательные контактные напряжения под стрингерами. Так как в условиях антиплоской деформации единственная отличная от нуля компонента перемещений $u_z(x,y)$ в соответствующих областях является гармонической функцией, то сначала для упругой полосы $\omega_+=\{-\infty<x<\infty;\ 0\le y\le H\}$ рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_z^+}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_z^+}{\partial y^2}=0 \quad (-\infty<x<\infty;\ 0<y<H)\\ \tau_{yz}\big|_{y=+0}=G_+\dfrac{\partial u_z^+}{\partial y}\bigg|_{y=+0}=-T_+(x);\ \ \tau_{yz}\big|_{y=H-0}=G_+\dfrac{\partial u_z^+}{\partial y}\bigg|_{y=H-0}=-q(x),\end{cases} \tag{2.2}$$

где $q(x)$ считается известной функцией. Решение задачи (2.2) построим методом интегрального преобразования Фурье, полагая

$$\left\{\overline{u}_z^+(\lambda,y);\ \overline{T}_+(\lambda);\ \overline{q}(\lambda)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{u_z^+(x,y);T_+(x);\ q(x)\right\}e^{i\lambda x}dx.$$

Применив к задаче (2.2) преобразование Фурье по переменной x, получим, что двухмерная задача (2.2) в трансформантах Фурье перейдет в следующую одномерную граничную задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\overline{u}_z^+}{dy^2}-\lambda^2\overline{u}_z^+=0 \quad (0<y<H);\\ G_+\dfrac{d\overline{u}_z^+}{dy}\bigg|_{y=+0}=-\overline{T}_+(\lambda);\ \ G_+\dfrac{d\overline{u}_z^+}{dy}\bigg\|_{y=H-0}=-q(\lambda).\end{cases} \tag{2.3}$$

Общее решение граничной задачи (2.3) имеет вид $\overline{u}_z^+(\lambda,y)=Ach(\lambda y)+Bsh(\lambda y)\ (0\le y\le H)$. Подчинив это решение граничным условиям из (2.3), находим

$$\overline{u}_z^+(\lambda,y)=\frac{1}{\lambda G_+ sh(\lambda H)}\left[ch(\lambda(y-H))\overline{T}_+(\lambda)-ch(\lambda y)\overline{q}(\lambda)\right]\ (0\le y\le H). \tag{2.4}$$

Далее для нижней упругой полуплоскости $\omega_- = \{-\infty < x < \infty;\ -\infty < y \le 0\}$ рассмотрим вспомогательную граничную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_z^-}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_z^-}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty;\ y < 0) \\ \tau_{yz}\big|_{y=-0} = G_- \dfrac{\partial u_z^-}{\partial y}\Big|_{y=-0} = -T_-(x)\ (-\infty < x < \infty); \quad grad\, u_z^-(x,y) \to 0 \ \ при\ \ x^2 + y^2 \to \infty. \end{cases} \tag{2.5}$$

В трансформантах Фурье решение граничной задачи (2.5) представляется формулой

$$\bar{u}_z^-(\lambda, y) = -\bar{T}_-(\lambda) e^{|\lambda|/y} \Big/ |\lambda| G_- \quad (-\infty < y \le 0). \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (2.6) имеем

$$-i\lambda \bar{u}_z^+(\lambda,+0) = -i\left[ch(\lambda H)\bar{T}_+(\lambda) - \bar{q}(\lambda)\right]/G_+ sh(\lambda H);\ \ -i\lambda \bar{u}_z^-(\lambda,-0) = isign\lambda \bar{T}_-(\lambda)/G_-. \tag{2.7}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_\pm(x) = \frac{1}{2}\left[u_z^+(x,+0) \pm u_z^-(x,-0)\right];\ \ \Omega_\pm(x) = \frac{1}{2}\left[T_+(x) \pm T_-(x)\right] \ \ (-\infty < x < \infty).$$

Отсюда

$$u_z^\pm(x,\pm 0) = \varphi_+(x) \pm \varphi_-(x);\ \ T_\pm(x) = \Omega_+(x) \pm \Omega_-(x) \ \ (-\infty < x < \infty).$$

Преобразования Фурье этих функций обозначим теми же функциями с черточками наверху. Тогда

$$\bar{u}_z^\pm(\lambda,\pm 0) = \bar{\varphi}_+(\lambda) \pm \bar{\varphi}_-(\lambda);\ \ \bar{T}_\pm(\lambda) = \bar{\Omega}_+(\lambda) \pm \bar{\Omega}_-(\lambda). \tag{2.8}$$

(2.8) подставим в (2.7). После простых преобразований относительно $\bar{\varphi}_+(\lambda)$ и $\bar{\Omega}_+(\lambda)$ получим линейную систему уравнений

$$\begin{cases} i\lambda\bar{\varphi}_+(\lambda) - \dfrac{i}{G_+} cth(\lambda H)\bar{\Omega}_+(\lambda) = -i\lambda\bar{\varphi}_-(\lambda) + \dfrac{i}{G_+}\left[cth(\lambda H)\bar{\Omega}_-(\lambda) - \dfrac{\bar{q}(\lambda)}{sh(\lambda H)}\right] \\ i\lambda\bar{\varphi}_+(\lambda) + \dfrac{isign\lambda}{G_-}\bar{\Omega}_+(\lambda) = i\lambda\bar{\varphi}_-(\lambda) + \dfrac{isign\lambda}{G_-}\bar{\Omega}_-(\lambda). \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\bar{\varphi}_+(\lambda) = -\frac{i}{G_+ sign\lambda + G_- cth(\lambda H)}\left\{\left[G_+ sign\lambda - G_- cth(\lambda H)\right]\lambda\bar{\varphi}_-(\lambda) - 2sign\lambda\, cth(\lambda H)\bar{\Omega}_-(\lambda)\right\}; \tag{2.9}$$

$$\bar{\Omega}_+(\lambda) = -\frac{i}{G_+ sign\lambda + G_- cth(\lambda H)}\left\{2i\lambda G_+ G_- \bar{\varphi}_-(\lambda) + i\left[G_+ sign\lambda - G_- cth(\lambda H)\right]\bar{\Omega}_-(\lambda) + \frac{iG_+\bar{q}(\lambda)}{sh(\lambda H)}\right\}.$$

Далее займемся только вторым уравнением из (2.9) и применим к нему формулу обратного интегрального преобразования Фурье. После элементарных преобразований придем к ключевому уравнению

$$\Omega_+(x)=\frac{1}{2}\left[T_+(x)+T_-(x)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Omega}_+(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=-\frac{2G_+}{\pi}\int_L K_1(s-x)\varphi_-'(s)ds+\frac{1}{\pi}\int_L K_2(|s-x|)\Omega_-(s)ds+ \quad (2.10)$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_L K_3(|s-x|)q(s)ds \qquad (-\infty<x<\infty);$$

$$K_1(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda x)d\lambda}{\kappa+cth(\lambda H)};\quad K_2(x)=\int_0^{\infty}\frac{\kappa-cth(\lambda H)}{\kappa+cth(\lambda H)}\cos(\lambda x)d\lambda;\quad K_3(x)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda x)d\lambda}{\kappa sh(\lambda H)+ch(\lambda H)};\ \kappa=\frac{G_+}{G_-}.$$

Выделим в ядерных функциях $K_j(x)\ \left(j=\overline{1,3}\right)$ их главные части. Так как

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\kappa+cth(\lambda H)}=\frac{1}{\kappa+1},$$

то функцию $K_1(x)$ преобразуем следующим образом:

$$K_1(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda x)d\lambda}{\kappa+cth(\lambda H)}=\frac{1}{\kappa+1}\int_0^{\infty}\sin(\lambda x)d\lambda+\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\kappa+cth(\lambda H)}-\frac{1}{\kappa+1}\right]\sin(\lambda x)d\lambda=$$
$$=\frac{1}{(\kappa+1)x}-\frac{1}{\kappa+1}\int_0^{\infty}\frac{1-th(\lambda H)}{1+\kappa th(\lambda H)}\sin(\lambda x)d\lambda=\frac{1}{(\kappa+1)x}-\frac{1}{\kappa+1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda H}\sin(\lambda x)d\lambda}{\kappa sh(\lambda H)+ch(\lambda H)}.$$

В результате

$$K_1(x)=\frac{1}{\kappa+1}\left[\frac{1}{x}-L_1(x)\right];\ L_1(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda H}\sin(\lambda x)d\lambda}{\Delta(\lambda,H)};\quad \Delta(\lambda,H)=\kappa sh(\lambda H)+ch(\lambda H) \quad (2.11)$$
$$(-\infty<x<\infty).$$

Вполне аналогичным образом получим

$$K_2(x)=\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\delta(x)-\frac{2\kappa}{\kappa+1}L_2(x);\ L_2(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda H}\cos(\lambda x)d\lambda}{\Delta(\lambda,H)}\qquad(-\infty<x<\infty);$$
$$K_3(x)=\frac{2H}{\pi(\kappa+1)\left(x^2+H^2\right)}+\frac{\kappa}{\kappa+1}L_3(x);\ L_3(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\lambda H}\cos(\lambda x)d\lambda}{\Delta(\lambda,H)}. \quad (2.12)$$

Здесь использовано значение известного интеграла из [10] (с. 23, ф-ла 1.4.(1)), а $\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака.

Подставляя (2.11)-(2.12) в (2.10), после элементарных выкладок представим ключевое уравнение в форме

$$-\frac{2G_+}{\pi(\kappa+1)}\int_L\left[\frac{1}{s-x}-L_1(s-x)\right]\varphi_-'(s)ds+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\Omega_-(x)-\frac{2\kappa}{\kappa+1}\int_L L_2(|x-s|)\Omega_-(s)ds+ \quad (2.13)$$
$$+\frac{2H}{\pi(\kappa+1)}\int_l\left[\frac{1}{(s-x)^2+H^2}+\frac{\pi\kappa}{2H}L_3(|x-s|)\right]\tau(s)ds=\frac{1}{2}\left[T_+(x)+T_-(x)\right]\quad(-\infty<x<\infty).$$

Здесь согласно (2.1) учтено, что $q(x)=\begin{cases}\tau(x) & (x\in l);\\ 0 & (x\in R\setminus l)\end{cases}$. Далее ключевое уравнение (2.13) рассмотрим на системе трещин. В результате относительно $\varphi'_-(x)$ и $\tau(x)$ придем к следующему СИУ $(x\in L)$:

$$\frac{2G_+}{\pi(\kappa+1)}\int_L\left[\frac{1}{s-x}-L_1(s-x)\right]\varphi'_-(s)\,ds-\frac{2H}{\pi(\kappa+1)}\int_l\left[\frac{1}{(s-x)^2+H^2}+\frac{\pi\kappa}{2H}L_3(|x-s|)\right]\tau(s)\,ds=f(x)$$

$$f(x)=\frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)}\left[\tau_+(x)-\tau_-(x)\right]-\frac{\kappa}{\kappa+1}\int_L L_2(|s-x|)\left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds-\frac{1}{2}\left[\tau_+(x)+\tau_-(x)\right]\quad(x\in L).$$

(2.14)

Рассматривая же ключевое уравнение (2.13) вне системы трещин L, для разрушающих касательных напряжений получим

$$\tau_{yz}\big|_{y=0}=-\tilde{\tau}(x)=\frac{2G_+}{\pi(\kappa+1)}\int_L\left[\frac{1}{s-x}-L_1(s-x)\right]\varphi'_-(s)\,ds-\frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)}\left[\tau_+(x)-\tau_-(x)\right]+ \qquad (2.15)$$

$$+\frac{\kappa}{\kappa+1}\int_L L_2(|x-s|)\left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds-\frac{2H}{\pi(\kappa+1)}\int_l\left[\frac{1}{(s-x)^2+H^2}+\frac{\pi\kappa}{2H}L_3(|x-s|)\right]\tau(s)\,ds$$

$(x\in L'=R\setminus L)$.

Перейдем к выводу второго СИУ, описывающего контакт системы стрингеров l с кусочно-однородным упругим основанием. С этой целью сначала из (2.4) определим

$$-i\lambda\overline{u}_z^+(\lambda,H)=-\frac{1}{G_+sh(\lambda H)}\left[\overline{T}_+(\lambda)-ch(\lambda H)\overline{q}(\lambda)\right].$$

Подставим сюда $\overline{T}_+=\overline{\Omega}_+(\lambda)+\overline{\Omega}_-(\lambda)$, где $\overline{\Omega}_+(\lambda)$ дается второй формулой из (2.9). После несложных преобразований имеем $(-\infty<x<\infty)$:

$$-i\lambda\overline{u}_z^+(\lambda,H)=-\frac{i}{G_+}\left\{\frac{2\kappa sign\lambda\overline{\Omega}_-(\lambda)}{\kappa sign\lambda sh(\lambda H)+ch(\lambda H)}-\frac{\left[sh(\lambda H)+\kappa sign\lambda ch(\lambda H)\right]\overline{q}(\lambda)}{\kappa sign\lambda sh(\lambda H)+ch(\lambda H)}\right\}-\frac{2i\lambda\overline{\varphi}_-(\lambda)}{\kappa sign\lambda sh(\lambda H)+ch(\lambda H)}.$$

К этому равенству применим формулу обратного преобразования Фурье, а затем в полученных ядерных функциях, как выше, выделим их главные части. Опуская промежуточные выкладки, окончательно имеем

$$\frac{d\overline{u}_z^+(x,H)}{dx}=\frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)G_+}\int_L\left[\frac{s-x}{(s-x)^2+H^2}+\frac{\kappa-1}{2}R_1(s-x)\right]\Omega_-(s)\,ds-$$

$$-\frac{1}{\pi(\kappa+1)G_+}\int_l\left[\frac{\kappa+1}{s-x}+R_2(s-x)\right]\tau(s)\,ds+\frac{1}{\pi(\kappa+1)}\int_L\left[\frac{2H}{(s-x)^2+H^2}+R_3(|x-s|)\right]\varphi'_-(s)\,ds\ (-\infty<x<\infty);$$

(2.16)

$$R_1(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-2\lambda H}}{\Delta(\lambda,H)}\sin(\lambda x)\,d\lambda;\quad R_2(x)=\int_0^\infty\frac{\kappa^2-e^{-\lambda H}}{\Delta(\lambda,H)}\sin(\lambda x)\,d\lambda;$$

$$R_3(x)=\int_0^\infty\frac{\kappa+1+(\kappa-1)e^{-2\lambda H}}{\Delta(\lambda,H)}\cos(\lambda x)\,d\lambda;\quad \Delta(\lambda,H)=\kappa sh(\lambda H)+ch(\lambda H).$$

Здесь были использованы значения известных интегралов из [10] (с.23, ф-ла 1.4.(1) и с.71, ф-ла 2.4.(1)). Обратимся к определению напряженно-деформационных характеристик стрингеров. Дифференциальное уравнение деформирования p-го стрингера согласно модифицированной модели Мелана имеет вид [11]

$$G_0 h \frac{d^2 u_z^{(0)}}{dx^2} = \tau(x) - \tau_p(x) \quad \left(c_p < x < d_p;\ p = \overline{1,m}\right), \tag{2.17}$$

где $u_z^{(0)}(x)$ – перемещения точек стрингеров в направлении оси Oz. При этом в предположении, что касательные напряжения $\tau_{xz}(x)$ в сечении x по высоте стрингера равномерно распределены, будем иметь $S(x) = \tau_{xz}(x)h$, где $S(x)$ – результирующее касательное усилие в сечении x. Оно определяется из граничной задачи

$$\frac{dS}{dx} = \tau(x) - \tau_p(x) \quad \left(c_p < x < d_p;\ p = \overline{1,m}\right), \quad S(c_p) = S_p;\ S(d_p) = T_p. \tag{2.18}$$

Из (2.17) и (2.18) находим

$$\frac{du_z^{(0)}}{dx} = \frac{S(x)}{G_0 h} \quad \left(c_p \le x \le d_p\right),$$

$$S(x) = \frac{1}{2}\left\{\int_{c_p}^{d_p} sign(x-s)\left[\tau(s) - \tau_p(s)\right]ds + S_p + T_p\right\} \ \left(p = \overline{1,m}\right). \tag{2.19}$$

Из второго уравнения (2.19) вытекает условие равновесия p-го стрингера:

$$\int_{c_p}^{d_p} \tau(s)ds = Q_p;\ Q_p = T_p - S_p + N_p;\ N_p = \int_{c_p}^{d_p} \tau_p(s)ds \quad \left(p = \overline{1,m}\right). \tag{2.20}$$

Подставляя в условие контакта системы стрингеров с основанием $\dfrac{du_z^+(x,H)}{dx} = \dfrac{du_z^{(0)}}{dx}$ $\left(c_p < x < d_p;\ p = \overline{1,m}\right)$ (2.16) и первое равенство из (2.19), отноительно $\tau(x)$ и $\varphi'_-(x)$ придем ко второму определяющему СИУ:

$$\frac{1}{\pi(\kappa+1)G_+}\int_{c_p}^{d_p}\left[\frac{\kappa+1}{s-x} + R_2(s-x) - \frac{\pi(\kappa+1)G_+}{2G_0 h} sign(s-x)\right]\tau(s)ds + \frac{1}{\pi(\kappa+1)G_+}\sum_{\substack{j=1 \\ j\ne p}}^{m}\int_l\left[\frac{\kappa+1}{s-x} + R_2(s-x)\right]\tau(s)ds -$$

$$- \frac{1}{\pi(\kappa+1)}\int_L\left[\frac{2H}{(s-x)^2 + H^2} + R_3(|x-s|)\right]\varphi'_-(s)ds = g(x) \quad \left(c_p < x < d_p;\ p = \overline{1,m}\right); \tag{2.21}$$

$$g(x) = \frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)G_+}\int_L\left[\frac{s-x}{(s-x)^2 + H^2} + \frac{\kappa-1}{2}R_1(s-x)\right]\Omega_-(s)ds - \frac{1}{2G_0 h}\left\{S_p + T_p + \int_{c_p}^{d_p} sign(x-s)\tau_p(s)ds\right\}.$$

Таким образом, (2.14) и (2.21) составляют определяющую систему СИУ из двух уравнений поставленной задачи, решение которой должно удовлетворять условиям (2.20) и следующим условиям:

$$\int_{a_j}^{b_j} \varphi'_-(s)ds = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{2.22}$$

выражающим условия непрерывности перемещений в концевых точках трещин.

В (2.14) и (2.21), а также в условиях (2.20) и (2.22) введем безразмерные величины, полагая

$$\xi = x/a,\ \eta = s/a;\ H_0 = H/a;\ \tau_0(\xi) = \tau(a\xi)/G_+;\ \Omega_0(\xi) = \Omega_-(a\xi)/G_+;\ \tau_\pm^{(0)}(\xi) = \tau_\pm(a\xi)/G_+;$$

$$\varphi_0(\xi) = \varphi'_-(a\xi);\ \alpha_j = a_j/a;\ \beta_j = b_j/a;\ L_0 = \bigcup_{j=1}^{n}(\alpha_j, \beta_j);\ \omega(\xi) = \tilde{\tau}(a\xi)/G_+;\ \tau_p^{(0)}(\xi) = \tau_p(a\xi)/G_+;$$

$$\Lambda = aG_+/2G_0h;\ S_p^{(0)} = S_p/aG_+;\ T_p^{(0)} = T_p/aG_+;\ \gamma_p = c_p/a;\ \delta_p = d_p/a\ \left(p = \overline{1,m}\right);\ l_0 = \bigcup_{p=1}^{m}(\gamma_p, \delta_p);$$

$$f_0(\xi) = f(a\xi)/G_+;\ g_0^{(p)}(\xi) = g(a\xi),$$

где a – некоторый линейный параметр, например $a = a_1$, если $a_1 \neq 0$. В результате СИУ (2.14) и (2.21) преобразуются в следующую систему СИУ:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{L_0}\left[\frac{1}{\eta-\xi} - L_1^{(0)}(\eta-\xi)\right]\varphi_0(\eta)d\eta - \frac{2H_0}{\pi}\int_{l_0}\left[\frac{1}{(\eta-\xi)^2 + H_0^2} + \frac{\pi\kappa}{2H_0}L_3^{(0)}(|\xi-\eta|)\right]\tau_0(\eta)d\eta = f_0(\xi)(\xi \in L_0) \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\gamma_p}^{\delta_p}\left[\frac{1}{\eta-\xi} + \frac{1}{\kappa+1}R_2^{(0)}(\eta-\xi) - \pi\Lambda sign(\eta-\xi)\right]\tau_0(\eta)d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{m}\int_{l_0}\left[\frac{1}{\eta-\xi} + \frac{1}{\kappa+1}R_2^{(0)}(\eta-\xi)\right]\tau_0(\eta)d\eta - \\ -\dfrac{1}{\pi(\kappa+1)}\displaystyle\int_{L_0}\left[\frac{2H_0}{(\eta-\xi)^2 + H_0^2} + R_3^{(0)}(|\xi-\eta|)\right]\varphi_0(\eta)d\eta = g_0^{(p)}(\xi)\ \left(\gamma_p < \xi < \delta_p;\ p = \overline{1,m}\right); \end{cases} \tag{2.23}$$

$$f_0(\xi) = (\kappa-1)\Omega_0(\xi) - 2\kappa\int_{L_0} L_2^{(0)}(|\xi-\eta|)\Omega_0(\eta)d\eta - \frac{\kappa+1}{2}\left[\tau_+^{(0)}(\xi) + \tau_-^{(0)}(\xi)\right];\quad \Omega_0(\xi) = \frac{1}{2}\left[\tau_+^{(0)}(\xi) - \tau_-^{(0)}(\xi)\right];$$

$$g_0^{(p)}(\xi) = \frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)}\int_{L_0}\left[\frac{\eta-\xi}{(\eta-\xi)^2 + H_0^2} + \frac{\kappa-1}{2}R_1^{(0)}(\eta-\xi)\right]\Omega_0(\eta)d\eta - \Lambda\left[S_0^{(p)} + T_0^{(p)} + \int_{\gamma_p}^{\delta_p} sign(\eta-\xi)\tau_p^{(0)}(\eta)d\eta\right];$$

$$L_1^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha H_0}}{\Delta_0(\alpha, H_0)}\sin(\alpha\xi)d\alpha;\ L_2^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha H_0}\cos(\alpha\xi)d\alpha}{\Delta_0(\alpha, H_0)};$$

$$L_3^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha H_0}\cos(\alpha\xi)d\alpha}{\Delta_0(\alpha, H_0)};\ R_1^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha H_0}\sin(\alpha\xi)d\alpha}{\Delta_0(\alpha, H_0)};\quad R_2^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{\left(\kappa^2 - e^{-\alpha H_0}\right)\cos(\alpha\xi)d\alpha}{\Delta_0(\alpha, H_0)};$$

$$R_3^{(0)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{\left[\kappa + 1 + (\kappa-1)e^{-2\alpha H_0}\right]\cos(\alpha\xi)d\alpha}{\Delta_0(\alpha, H_0)};\ \Delta_0(\alpha, H_0) = \kappa sh(\alpha H_0) + ch(\alpha H_0);$$

а условия (2.20) и (2.22) преобразуются к виду

$$\int_{\gamma_p}^{\delta_p}\tau_0(\eta)d\eta = Q_p^{(0)};\ \left(Q_p^{(0)} = \frac{Q_p}{\alpha G_+}\right);\ \int_{\alpha_j}^{\beta_j}\varphi_0(s)ds = 0 \qquad \left(p = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right). \tag{2.24}$$

В тех же безразмерных величинах (2.15) примет вид

$$\omega(\xi)=-\frac{2}{\pi(\kappa+1)}\int\limits_{L_0}\left[\frac{1}{\eta-\xi}-L_1^{(0)}(\eta-\xi)\right]\varphi_0(\eta)d\eta+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\Omega_0(\xi)-\frac{2\kappa}{\kappa+1}\int\limits_{L_0}L_2^{(0)}(|\xi-\eta|)\Omega_0(\eta)d\eta+ \tag{2.25}$$
$$+\frac{2H_0}{\pi(\kappa+1)}\int\limits_{l_0}\left[\frac{1}{(\eta-\xi)^2+H_0^2}+\frac{\pi\kappa}{2H_0}L_3^{(0)}(|\xi-\eta|)\right]\tau_0(\eta)d\eta \quad (\xi\in R\setminus L_0).$$

Таким образом, в безразмерных величинах основными уравнениями поставленной задачи будут система СИУ (2.23), условия (2.24) и формула (2.25).

Частный случай. Рассмотрим простейший частный случай, когда стрингеры отсутствуют и имеется лишь одна трещина $L=(-a,a)$. Тогда система СИУ (2.23) вырождается в одинарное СИУ

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\eta-\xi}-L_1^{(0)}(\eta-\xi)\right]\varphi_0(\eta)d\eta=f_0(\xi)\quad(-1<\xi<1), \tag{3.1}$$

решение которого согласно второму равенству (2.24) должно удовлетворять условию

$$\int\limits_{-1}^{1}\varphi_0(\eta)d\eta=0. \tag{3.2}$$

Решение СИУ (3.1)-(3.2), полагая

$$\varphi_0(\xi)=\Phi_0(\xi)\Big/\sqrt{1-\xi^2}\qquad(-1<\xi<1),$$

где $\Phi_0(\xi)$ – гельдеровская функция на $[-1,1]$, известным численно-аналитическим методом решения СИУ [12-14] можно свести к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{s=1}^{N}K_{rs}X_s=a_r\quad\left(r=\overline{1,N}\right)$$
$$K_{rs}=\begin{cases}\dfrac{2}{N}\left[\dfrac{1}{\eta_s-\xi_r}-L_1^{(0)}(\eta_s-\xi_r)\right] & \left(r=\overline{1,N-1};\ s=\overline{1,N}\right);\\ 1 & \left(r=N;\ s=\overline{1,N}\right);\end{cases}$$
$$a_r=\begin{cases}f_0(\xi_r)\quad\left(r=\overline{1,N-1}\right);\\ 0\qquad(r=N);\end{cases}\qquad \begin{matrix}\xi_r=\cos\left(\dfrac{\pi r}{N}\right) & \left(r=\overline{1,N-1}\right);\\ \eta_s=\cos\left(\dfrac{(2s-1)\pi}{2N}\right) & \left(s=\overline{1,N}\right);\end{matrix}\qquad X_s=f_0(\eta_s), \tag{3.3}$$

где N – любое натуральное число, а ξ_r,η_s – известные чебышевские узловые точки.

После решения СЛАУ (3.2) безразмерное раскрытие трещин можно определить по формуле

$$\Psi_0(\xi)=\frac{\pi}{N}\sum_{s=1}^{N}sign(\eta_s-\xi)X_s\quad\left(\Psi_0(\xi)=\frac{1}{a}\left[u_z^+(x,+0)-u_z^-(x,-0)\right]\right).$$

Перейдем к вычислению КИН. По [15]

$$K_{III}(\pm a) = \mp \lim_{x\to\pm a\pm 0}\left[\sqrt{2\pi(x\mp a)}\tau_{yz}\right], \tag{3.4}$$

но полагая $\varphi_-'(x) \sim \Phi(\pm a)/\sqrt{a^2 - x^2}$ $(x \to \pm a \pm 0)$ и воспользовавшись известным интегралом из [16] (с. 175, ф-ла (21)), (2.15), находим

$$\tau_{yz}\Big|_{y=0} \sim -\frac{2G_+}{\kappa+1}\frac{\Phi(\pm a)}{\sqrt{x^2-a^2}} signx \quad (x \to \pm a \pm 0). \tag{3.5}$$

Приняв во внимание (3.5), из (3.4) получим

$$K_{III}(\pm a) = \mp \frac{2G_+G_-}{G_+ + G_-}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\Phi(\pm a).$$

Далее введем безразмерный КИН. Тогда

$$K_{III}^{(0)}(\pm a) = \mp\Phi_0(\pm 1);\ K_{III}^{(0)}(\pm a) = \frac{G_+ + G_-}{2G_+G_-}\sqrt{\frac{a}{\pi}}K_{III}(\pm a). \tag{3.6}$$

Входящие в (3.6) значения $\Phi_0(\pm 1)$ после решения СЛАУ (3.3) легко вычисляются по интерполяционному многочлену Лагранжа [14].

В заключение отметим, что СИУ (3.1)-(3.2) можно свести к простейшему гиперсингулярному уравнению и изложенным в [17] методом построить его решение.

[1]Институт механики НАН РА
[2]Национальный университет архитектуры и строительства Армении
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

М. С. Григорян, В. Г. Едоян,
член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

О взаимодействии концентраторов напряжений типа трещин и стрингеров с кусочно-однородным упругим полупространством при антиплоской деформации

Рассматривается вопрос о взаимодействии коллинеарной системы из произвольного конечного числа сквозных ленточного типа трещин и коллинеарной системы стрингеров с кусочно-однородным упругим полупространством при антиплоской деформации. Кусочно-однородное полупространство состоит из верхнего слоя и нижнего упругого полупространства, изготовленных из разнородных материалов. На линии стыковки разнородных материалов расположена коллинеарная система трещин, а на верхней грани слоя – коллинеарная система стрингеров. При помощи интегрального преобразования Фурье решение задачи сведено к решению системы из двух сингулярных интегральных уравнений, откуда определяются плотности дислокаций на берегах трещин и касательные контактные напряжения под стрингерами. Выведены также уравнения определения разрушаю-

щих касательных напряжений вне системы трещин на линии их расположения и коэффициенты интенсивности напряжений. Рассмотрен частный случай.

Մ. Ս. Գրիգորյան, Վ. Հ. Եդոյան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

Ճաքերի և ստրինգերների տիպի լարումների կենտրոնացուցիչների ու կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական կիսատարածության փոխազդեցության մասին հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ

Դիտարկված է կամայական վերջավոր թվով միջանցիկ ժապավենային տիպի համագիծ ճաքերի համակարգի և կամայական վերջավոր թվով ստրինգերների նույնատիպ համակարգի ու կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական կիսատարածության փոխազդեցության հարցը: Կտոր առ կտոր համասեռ կիսատարածությունը բաղկացած է տարբեր նյութերից պատրաստված վերին առաձգական շերտից և ստորին առաձգական կիսատարածությունից: Դրանց միացման հարթության վրա տեղավորված են միջանցիկ ճաքերը, իսկ շերտի վերին եզրի վրա՝ ստրինգերը: Ֆուրեյի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ խնդրի լուծումը հանգում է երկու սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումներից կազմված համակարգի լուծման, որտեղից որոշվում են ճաքերի ափերի դիսլոկացիաների խտությունը և ստրինգերների տակ գործող շոշափող կոնտակտային լարումները: Արտածվել են նաև ճաքերից դուրս գործող քայքայող շոշափող լարումների և դրանց ուժգնության գործակիցների որոշման բանաձևերը: Դիտարկվել է մասնավոր դեպք:

M. S. Grigoryan, V. H. Yedoyan,
corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

On the Interaction of Stress Concentrators Such as Cracks and Stringers with a Piecewise Homogeneous Elastic Half-Space under Antiplane Deformation

The paper deals with the interaction of a collinear system of through-strip-type cracks of an arbitrary finite number and a collinear system of stringers with a piecewise homogeneous elastic half-space under anti-plane deformation. A piecewise homogeneous half-space consists of an upper layer and a lower elastic half-space made of heterogeneous materials. A collinear system of cracks is located on the interface of heterogeneous materials, while a collinear system of stringers is located on the upper face of the layer. Using the integral Fourier transform, solving the problem is reduced to solving a system of two SIEs, from which the dislocation densities on the crack edges and the tangential contact stresses under the stringers are determined. Equations for determining the breaking tangential stresses outside the system of cracks on their lines of location and stress intensity factors are also derived. A special case is considered.

Литература

1. *Greif R., Sanders J. L., Jr.* The effect of a stringer on the stress in a cracked Sheet, Office Naval Res. Tecn. Rept 17, Div. Engang Harvard Univ., June. 1963.
2. *Greif R., Sanders J. L., Jr.* – J. Appl. Mech. Transactions of the ASME, Ser. E. 1965. № 1. 1965. P. 66-74.
3. *Mkhitaryan S. M.* In: The 6th International Conference on Contemporary Problems of Architecture and Construction, June 24-27. 2014. Ostrava. Czech Republic. Advanced Materials Research. V. 1020. P. 253-257. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1020.253
4. *Григорян М. С., Мхитарян С. М.* – Доклады НАН РА. 2018. Т. 118. № 1. С. 49-59.
5. *Мхитарян С. М., Агаян К. Л.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т. 31. № 3. С. 3-17.
6. *Акопян В. Н.* Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван. Гитутюн. 2014. 322 с.
7. Развитие теории контактных задач в СССР. М. Наука. 1976. 493 с.
8. *Мураками Ю.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Под ред. Ю. Мураками. М. Мир. 1990. Т. 1, 448 с. Т. 2. 568 с.
9. Механика контактных взаимодействий. Под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова. М. Физматлит. 2001. 670 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А. и др.* Таблицы интегральных преобразований. М. Наука. Т. 1. 1969. 344 с.
11. *Мхитарян С. М.* В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1993. С. 129-143.
12. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* In: Mechanics of Fractures. V. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden. Noordhoff Intern. Publ. 1973. P. 368-425.
13. *Theocaris P. S., Ioakimidi N. I.* – Quart. Appl. Math. 1977. V. 35. № 1. P. 173-185.
14. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев. Наукова думка. 1976. 443 с.
15. *Саврук М. П.* Коэффиценты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Механика разрушения и прочность материалов. Под ред. В. В. Панасюка. 1988. Т. 2. Киев. Наукова думка. 619 с.
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А. и др.* Таблицы интегральных преобразований. М. Наука. Т. 2. 1970. 328 с.
17. *Mkhitaryan S. M., Mkrtchyan M. S., Kanetsyan E. G.* – The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2020. V. 73. № 1. P. 51-75.