ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 121 2021 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

О решении двух интегральных уравнений, связанных с контактными задачами для линейно деформируемого основания

(Представлено 1/II 2021)

Ключевые слова: *линейно деформируемое основание, контактная задача, преобразование Фурье, интегральное уравнение.*

Введение. Исходя из потребностей строительной механики было введено понятие линейно деформируемого основания, обобщающее понятие классического основания в виде упругого однородного изотропного полупространства. Это обобщение обусловлено необходимостью разработки более совершенных методов расчета фундаментов зданий и сооружений на деформируемых основаниях, особенно методов расчета характеристик изгиба балок и плит на упругих основаниях, потребностью более полного учета физико-механических свойств оснований (анизотропии, неоднородности и пр.) и их геометрической конфигурации. Первые исследования по контактным задачам для линейно деформирующих оснований восходят к монографиям [1, 2]. В [2] введен важный класс линейно деформируемых оснований, функции влияния которых в правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ (ось Oz направлена внутрь основания) графически изображаются поверхностями вращения, характеризующимися уравнениями вида

$$K(x-\xi, y-\eta) = K\left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right). \tag{0.1}$$

При помощи этих ядер вертикальные перемещения граничных точек линейно деформируемого основания $w(x, y)$ от приложенной в области ω его поверхности распределенной вертикальной нагрузки интенсивности $p(x, y)$ определяется формулой

$$w(x, y) = \iint\limits_{\omega} K(x-\xi, y-\eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{0.2}$$

В [2] приведены явные выражения пяти ядер типа (0.1), которыми, в частности, можно аппроксимировать экспериментально полученные поверхности осадок. Одно из них имеет вид

$$K(x-\xi, y-\eta) = AK_0(\chi R) \quad \left(\chi > 0,\ R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right), \tag{0.3}$$

где A и χ – физические константы, определяемые экспериментальным путем, а $K_0(x)$ – известная функция Макдональда нулевого индекса.

Для другого ядра из [2] типа $K(R) = e^{-\chi R}/R$ в [3] рассмотрены соответствующая осесимметрическая контактная задача с круговой областью контакта и смежная смешанная граничная задача теории диффузии газов и растворов, которая сводится к ИУ Фредгольма первого рода с таким ядром. Последнее, как показано там же, эквивалентно задаче Дирихле для обобщенного потенциала, порожденного этим ядром. Аналогичная граничная задача Дирихле для обобщенного потенциала, порожденного этим ядром (0.3), и связанные с ним ИУ и интегральные соотношения рассмотрены в [4].

Теория контактных задач для линейно деформируемых оснований свое дальнейшее развитие получила во многих работах, в частности в монографии [5]. Укажем также на статьи [6, 7]. Основные результаты этой области теории упругости отражены в [8].

В настоящей работе продолжается исследование решений ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим экспоненциальном ядром, зависящим от разности аргументов, на конечном и полубесконечном интервалах, полученных в [4], где этими ИУ описываются контактные задачи о вдавливании штампов, имеющих в плане форму бесконечной полосы или полуплоскости в линейно деформируемое основание, характеризующееся функцией влияния (0.3).

Постановка задач и вывод определяющих ИУ. Для линейно деформируемого упругого полупространства $z > 0$ с функцией влияния (0.3), отнесенного к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, рассмотрим две контактные задачи. Пусть в первой задаче штамп, имеющий в плане форму бесконечной полосы $\omega_1 = \{-\infty < x < \infty;\ -a < y < a;\ z = 0\}$, под действием вертикальных сил вдавливается в указанное основание. Во второй аналогичной задаче штамп имеет форму полуплоскости $\omega_2 = \{-\infty < x < \infty;\ 0 < y < \infty;\ z = 0\}$. Предполагая, что в контактных областях ω_j $(j = 1,2)$ действуют только нормальные контактные напряжения интенсивности $p(x, y)$, т.е.

$$\sigma_z\big|_{z=+0} = -p(x, y) \quad \left((x, y) \in \omega_j;\ j = 1,2\right),$$

где σ_z – компонента нормальных напряжений, на основании (0.2) и (0.3) для определения неизвестного давления $p(x, y)$ под штампами $p(x, y)$ придем к следующим двумерным определяющим ИУ Фредгольма первого рода:

$$A\iint\limits_{\omega_j} K_0\left(\chi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)p(\xi,\eta)d\xi d\eta = f(x,y) \ \left((x,y)\in\omega_j;\ j=1,2\right). \tag{1.1}$$

Здесь $f(x,y)$ – заданная функция, характеризующая геометрическую конфигурацию основания штампа, причем $f(x,y)=o(1)$ при $x^2+y^2\to\infty$. Далее ИУ (1.1) запишем в виде

$$\iint\limits_{\omega_j} K_0\left(\chi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)p(\xi,\eta)d\xi d\eta = g(x,y) \tag{1.2}$$
$$g(x,y)=f(x,y)/A; \qquad \left((x,y)\in\omega_j;\ j=1,2\right)$$

и к нему применим интегральное преобразование Фурье по переменной x, полагая

$$\{\overline{p}(\lambda,y);\ \overline{g}(\lambda,y)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{p(x,y);\ g(x,y)\}e^{i\lambda x}dx.$$

В результате двумерные ИУ (1.2) перейдут в следующие одномерные ИУ Фредгольма первого рода с экспоненциальным симметрическим ядром, зависящим от разности аргументов [4]:

$$\frac{\pi}{\gamma}\int\limits_{l_j} e^{-\gamma|y-\eta|}\overline{p}(\lambda,\eta)d\eta=\overline{g}(\lambda,y) \ \left(y\in l_j,\ j=1,2\right) \quad l_1=(-a,a);\quad l_2=(0,\infty);\ \gamma=\sqrt{\lambda^2+\chi^2}. \tag{1.3}$$

Решение определяющих ИУ (1.3). Далее займемся построением решений ИУ (1.3) и исследованием их структур. С этой целью сначала докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Ядро ИУ (1.3)* $L(y,\eta)=\exp\left(-\gamma|y-\eta|\right)\ (-a\le y,\eta\le a)$ *является замкнутым в* $L_2[-a,a]$ *ядром.*

Доказательство. Очевидно, что ядро $L(y,\eta)=\exp\left(-\gamma|y-\eta|\right)\ (-a\le y,\eta\le a)$ – симметрическое квадратично суммируемое ядро. По определению [9] такое ядро называется замкнутым в $L_2[-a,a]$, если каждая функция $\omega(y)\in L_2[-a,a]$, удовлетворяющая тождеству

$$\int\limits_{-a}^{a} L(y,\eta)\omega(\eta)d\eta=0,$$

равна нулю почти везде в $L_2[-a,a]$. Пусть

$$\omega(y)\in L_2[-a,a] \text{ и } \int\limits_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\omega(\eta)d\eta=0 \ \left(y\in[-a,a]\right)$$

или

$$e^{-\gamma\eta}\int_{-a}^{y} e^{\gamma\eta}\omega(\eta)d\eta + e^{\gamma\eta}\int_{y}^{a} e^{-\gamma\eta}\omega(\eta)d\eta = 0 \ \ (y \in (-a,a)).$$

Поскольку из $\omega(y) \in L_2[-a,a]$ вытекает, что также $\omega(y) \in L[-a,a]$, то интегралы с верхним и нижним переменными пределами являются абсолютно непрерывными функциями, имеющими почти везде производные, которые равны подынтегральным функциям [10] (с. 234-236). Тогда обе части записанного равенства можем дважды продифференцировать по y. Получим

$$\gamma^2 \int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\omega(\eta)d\eta - 2\gamma\omega(y) = 0 \ \Rightarrow \ \omega(y) = 0 \ \ (y \in (-a,a)).$$

и в результате $\omega(y) \equiv 0$ на любом отрезке $[-b,b] \subset [-a,a]$, т.е. $\omega(y)$ может быть отлично от нуля только на множестве меры нуль отрезка $[-a,a]$. Теорема 1 доказана.

Выясним структуру решения ИУ (1.3) при $l_1 = [-a,a]$:

$$\frac{\pi}{\gamma}\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\bar{p}(\eta)d\eta = \bar{g}(y) \ \ (\bar{p}(y) = \bar{p}(\lambda,y); \ \bar{g}(y) = \bar{g}(\lambda,y), \ -a \le y \le a).$$

С этой целью сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *В смысле теории обобщенных функций имеют место соотношения*

$$\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\delta(\eta \mp a)d\eta = \frac{1}{2}e^{-\gamma(a\mp y)}. \qquad (2.1)$$

Доказательство. Воспользуемся дельта-образной последовательностью [11] $f_N(y) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin(Ny)}{y}$, причем в смысле теории обобщенных функций

$$\lim_{N\to\infty} f_N(y) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\frac{\sin(Ny)}{y}\right] = \delta(y),$$

где $\delta(y)$ – известная дельта-функция Дирака. Очевидно, что общий член этой последовательности можно представить в виде конечного интеграла Фурье

$$f_N(y) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(Ny)}{y} = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{isy}ds.$$

Исходя из этого применительно к нашему случаю вычислим интеграл

$$I_N(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\frac{\sin(N(\eta-a))}{\eta-a}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}d\eta\int_{-N}^{N} e^{is(\eta-a)}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-isa}ds\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}e^{is\eta}d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-isa}ds\left[\int_{-a}^{y} e^{-\gamma(y-\eta)}e^{is\eta}d\eta + \int_{y}^{a} e^{-\gamma(\eta-y)}e^{is\eta}d\eta\right] = \frac{e^{-\gamma y}}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-isa}ds\int_{-a}^{y} e^{(\gamma+is)\eta}d\eta + \frac{e^{\gamma y}}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-isa}ds\int_{y}^{a} e^{(is-\gamma)\eta}d\eta.$$

Далее после элементарных преобразований и вычисления простейших интегралов будем иметь

$$I_N(y)=\frac{2\gamma}{\pi}I_N^{(1)}(y)-\frac{e^{-\gamma(y+a)}}{\pi}\left[\gamma I_N^{(2)}(y)-I_N^{(3)}(y)\right]-\frac{\gamma}{\pi}e^{-\gamma(a-y)}I_N^{(4)} \qquad (2.2)$$

$$I_N^{(1)}(y)=\int_0^N\frac{\cos(s(a-y))ds}{s^2+\gamma^2};\quad I_N^{(2)}(y)=I_N^{(2)}=\int_0^N\frac{\cos(2sa)ds}{s^2+\gamma^2};\ I_N^{(3)}(y)=I_N^{(3)}=\int_0^N\frac{s\sin(2sa)ds}{s^2+\gamma^2};\ I_N^{(4)}=\int_0^N\frac{ds}{s^2+\gamma^2}.$$

Теперь в этих интегралах перейдем к предельному переходу $N\to\infty$. Последовательно будем иметь:

1) $\lim\limits_{N\to\infty}I_N^{(1)}(y)=\int_0^\infty\frac{\cos(s(a-y))ds}{s^2+\gamma^2}=\frac{\pi}{2\gamma}e^{-\gamma(a-y)}\quad (y<a);$

2) $\lim\limits_{N\to\infty}I_N^{(2)}=\int_0^\infty\frac{\cos(2sa)ds}{s^2+\gamma^2}=\frac{\pi}{2\gamma}e^{-2\gamma a};$ 3) $\lim\limits_{N\to\infty}I_N^{(3)}=\int_0^\infty\frac{s\sin(2sa)ds}{s^2+\gamma^2}=\frac{\pi}{2}e^{-2\gamma a};$

4) $\lim\limits_{N\to\infty}I_N^{(4)}=\lim\limits_{N\to\infty}\left[\frac{1}{\gamma}arctg\left(\frac{N}{\gamma}\right)\right]=\frac{\pi}{2\gamma},$

где использованы значения известных пределов из [12] (с.17, ф-ла 1.2.(11) и с.65, ф-ла 2.2.(15)). Далее, приняв во внимание выражения этих интегралов, из (2.2) при помощи предельного перехода $N\to\infty$ получим

$$\lim_{N\to\infty}I_N(y)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a e^{-\gamma|y-\eta|}\frac{\sin(N(\eta-a))}{\eta-a}d\eta=\int_{-a}^a e^{-\gamma|y-\eta|}\delta(\eta-a)d\eta=\frac{1}{2}e^{-\gamma(a-y)}.$$

Вполне аналогичным образом

$$\lim_{N\to\infty}\tilde{I}_N(y)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a e^{-\gamma|y-\eta|}\frac{\sin(N(\eta+a))}{\eta+a}d\eta=\int_{-a}^a e^{-\gamma|y-\eta|}\delta(\eta+a)d\eta=\frac{1}{2}e^{-\gamma(a+y)}.$$

Лемма доказана.

Сформулируем теоремы о структуре решения ИУ (1.3) при $l_1=[-a,a]$.

Теорема 2. *Если* $\bar{g}(y)\in C^{(2)}[-a,a]$, *то решение ИУ (1.3) в классе обобщенных функций представляется формулой* $(\bar{p}(\lambda,y)=\bar{p}(y);\ \bar{g}(\lambda,y)=\bar{g}(y))$:

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]+\frac{1}{\pi}\left[\gamma\bar{g}(a)+\bar{g}'(a)\right]\delta(y-a)+\frac{1}{\pi}\left[\gamma\bar{g}(-a)-\bar{g}'(-a)\right]\delta(y+a)\quad(-a\le y\le a). \qquad (2.3)$$

Доказательство. ИУ (1.3) опять представим в форме

$$e^{-\gamma y}\int_{-a}^y e^{\gamma\eta}\bar{p}(\eta)d\eta+e^{\gamma y}\int_y^a e^{-\gamma\eta}\bar{p}(y)dy=\frac{\gamma}{\pi}\bar{g}(y)\quad(-a<y<a). \qquad (2.4)$$

Так как по условию $\bar{g}(y)\in C^{(2)}[-a,a]$, то левые и правые части этого равенства дважды непрерывно дифференцируемы по y функции. В результате двукратного дифференцирования (2.4) по y получим

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]\ (-a<y<a). \tag{2.5}$$

Чтобы получить решение ИУ (1.3) на отрезке $[-a,a]$, выражение (2.5) подставим в левую часть (1.3) и положим

$$I(y,\gamma)=\frac{e^{-\gamma y}}{2\pi}\int_{-a}^{y}e^{\gamma\eta}\left[\gamma^2\bar{g}(\eta)-\bar{g}''(\eta)\right]d\eta+\frac{e^{\gamma y}}{2\pi}\int_{y}^{a}e^{-\gamma\eta}\left[\gamma^2\bar{g}(\eta)-\bar{g}''(\eta)\right]d\eta\ \ (-a\le y\le a).$$

Далее, чтобы освободиться от второй производной $\bar{g}''(\eta)$, здесь опять произведем интегрирование по частям. После элементарных выкладок находим

$$I(y,\gamma)=\frac{\gamma}{\pi}\bar{g}(y)-\frac{e^{-a\gamma}}{2\pi}\left\{[\gamma\bar{g}(a)+\bar{g}'(a)]e^{\gamma y}\right\}-\frac{e^{-a\gamma}}{2\pi}\left\{[\gamma\bar{g}(-a)-\bar{g}'(-a)]e^{-\gamma y}\right\}\ \ (-a\le y\le a). \tag{2.6}$$

Очевидно, что ИУ (1.3) будет удовлетворено, если в (2.6) второе и третье слагаемые будут отсутствовать. Этого можно добиться, если согласно лемме к (2.5) прибавить компенсирующие их слагаемые:

$$\frac{1}{\pi}[\gamma\bar{g}(a)+\bar{g}'(a)]\delta(y-a);\quad \frac{1}{\pi}[\gamma\bar{g}(-a)-\bar{g}'(-a)]\delta(y+a).$$

Теорема 2 доказана. По этой теореме решение ИУ (1.3) в концевых точках отрезка $[-a,a]$ имеет характер сосредоточенных элементов и не ограничено. Перейдем к описанию ограниченных решений ИУ (1.3).

Теорема 3. *Для того чтобы при $\bar{g}(y)\in C^{(2)}[-a,a]$ решение ИУ (1.3) на отрезке $[-a,a]$ было ограниченным и, следовательно, непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть удовлетворяла условиям*

$$\gamma\bar{g}(-a)-\bar{g}'(-a)=0;\ \ \gamma\bar{g}(a)+\bar{g}'(a)=0. \tag{2.7}$$

Тогда единственное его ограниченное решение будет даваться формулой

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]\ \ (-a\le y\le a). \tag{2.8}$$

<u>Необходимость.</u> Если решение ИУ (1.3) на отрезке $[-a,a]$ ограничено, то из его представления (2.3) вытекает, что правая часть $\bar{g}(y)$ должна удовлетворять условиям (2.7) и тогда решение будет выражаться формулой (2.8). Единственность решения следует из свойства замкнутости ядра $K(y,\eta)=e^{-\gamma|y-\eta|}$ (теорема 1).

<u>Достаточность.</u> Наоборот, если выполняются условия (2.7), то опять из (2.3) вытекает ограниченность решения и его представление (2.8).

Единственное ограниченное на отрезке решение ИУ (1.3) возможно лишь при определенных условиях на правую часть $\bar{g}(y)$. Это решение описывается следующей теоремой.

Теорема 4. *Для того чтобы ИУ (1.3) на отрезке* $[-a,a]$ *обладало единственным ограниченным и, следовательно, непрерывным решением, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть допускала представление*

$$\bar{g}(y)=\bar{h}(y)+Ach(\gamma y)+Bsh(\gamma y)\quad(-a\le y\le a)$$
$$A=-\frac{e^{-\gamma a}}{2\gamma}\left\{\gamma\left[\bar{h}(a)+\bar{h}(-a)\right]+\bar{h}'(a)-\bar{h}'(-a)\right\};\quad B=-\frac{e^{-\gamma a}}{2\gamma}\left\{\gamma\left[\bar{h}(a)-\bar{h}(-a)\right]+\bar{h}'(a)+\bar{h}'(-a)\right\},\tag{2.9}$$

где $\bar{h}(y)\in C^{(2)}[-a,a]$. *Тогда это решение будет представлено формулой*

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{h}(y)-\bar{h}''(y)\right]\quad(-a\le y\le a).\tag{2.10}$$

Необходимость. Пусть ИУ (1.3) на отрезке $-a\le y\le a$ имеет единственное ограниченное решение, даваемое формулой (2.10). Положим

$$\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]=\bar{q}(y)\quad\left(\bar{q}(y)\in C[-a,a]\right).$$

Это равенство будем рассматривать как неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $\bar{g}(y)$. Его общее решение складывается из общего решения однородного уравнения в виде функции $\bar{g}_0(y)=Ach(\gamma y)+Bsh(\gamma y)$, где A и B – пока неизвестные постоянные, и из частного решения неоднородного уравнения в виде функции

$$\bar{h}(y)=-\frac{\gamma}{\pi}\int_{-a}^{a}e^{-\gamma|y-\eta|}\bar{q}(\eta)d\eta\qquad(-a\le y\le a)\quad\left(\bar{h}(y)\in C^{(2)}[-a,a]\right).$$

Следовательно,

$$\bar{g}(y)=\bar{h}(y)+Ach(\gamma y)+Bsh(\gamma y)\quad(-a\le y\le a).\tag{2.11}$$

Но функция $\bar{g}(y)$ по теореме 3 должна удовлетворять условиям (2.7). Подчинив функцию из (2.11) этим условиям, для определения постоянных A и B получим простейшую систему уравнений:

$$\begin{cases}A+B=-\dfrac{e^{-\gamma a}}{\gamma}\left[\gamma\bar{h}(a)+\bar{h}'(a)\right]\\[2ex] A-B=-\dfrac{e^{-\gamma a}}{\gamma}\left[\gamma\bar{h}(-a)-\bar{h}'(a)\right].\end{cases}$$

Отсюда для A и B получаются приведенные в (2.9) выражения.

Достаточность. Если имеет место представление (2.9), то легко проверить выполнение условий (2.7). Тогда действительно решение ИУ (1.3) будет иметь вид (2.10).

Вполне аналогичные результаты имеют место для ИУ (1.3) при $l_2 = (0,\infty)$:

$$\frac{\pi}{\gamma}\int_0^\infty e^{-\gamma|y-\eta|}d\eta = g(y).$$

Теорема 5. *Если* $\bar{g}(y)\in C^{(2)}[0,\infty)\cap L_2(0,\infty)$, *то решение ИУ (1.3) в классе обобщенных функций представляется формулой*

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]+\frac{1}{\pi}\left[\gamma\bar{g}(0)-\bar{g}'(0)\right]\delta(y) \quad (0\le y<\infty). \tag{2.12}$$

Теорема 6. *Для того чтобы при* $\bar{g}(y)\in C^{(2)}[0,\infty)\cap L_2(0,\infty)$ *решение ИУ (1.3) на* $[0,\infty)$ *было единственным и ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть удовлетворяла условию* $\gamma\bar{g}(0)-\bar{g}'(0)=0$. *Тогда*

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right] \quad (0\le y<\infty). \tag{2.13}$$

Теорема 7. *Для того чтобы ИУ (1.3) на* $[0,\infty)$ *обладало единственным ограниченным решением, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть допускала представление*

$$\bar{g}(y)=\bar{h}(y)+Ae^{-\gamma y} \quad (0\le y<\infty), \qquad A=\frac{1}{2\gamma}\left[h'(0)-\gamma h(0)\right],$$

где $\bar{h}(y)\in C^{(2)}[0,\infty)\cap L_2(0,\infty)$. *Тогда это решение будет представлено формулой*

$$\bar{p}(y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{g}(y)-\bar{g}''(y)\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\bar{h}(y)-\bar{h}''(y)\right] \quad (0\le y<\infty).$$

Отметим, что непрерывные части решений ИУ (1.3), представленные формулами (2.5) и (2.13) на интервалах $-a<y<a$ и $0<y<\infty$, соответственно, можно построить также методом ортогональных функций. А именно, методом разделения переменных могут быть установлены следующие спектральные соотношения [4]:

$$\int_{-a}^{a} e^{-\gamma|y-\eta|}\frac{\varphi_k(\eta,\theta)d\eta}{\sqrt{1-\eta^2/a^2}}=\frac{2\gamma a^2}{\lambda_k^1(\theta)}\sqrt{1-y^2/a^2}\,\varphi_k(y,\theta); \quad \left(k=1,2,\ldots;-a<y<a;\ \theta=-\gamma^2/4\right), \tag{2.14}$$

$$\int_0^\infty e^{-\gamma|y-\eta|}e^{-\gamma\eta}\psi_k(\eta)d\eta=\frac{1}{k+1}ye^{-\gamma y}\psi_k(y); \quad (k=0,1,2,\ldots;\ 0<y<\infty), \tag{2.15}$$

где $\varphi_k(y,\theta)=Ps_k^1(y/a,\theta)$; $\psi_k(y)=L_k^1(2\gamma y)$. Здесь $Ps_k^1(y,\theta)$ – вытянутые сфероидальные волновые функции [13], а $L_k^1(2\gamma y)$ – многочлены Чебышева–Лагерра. Но эти соотношения легко могут быть установлены также при помощи формулы (2.8). Действительно, полагая

$$\bar{g}_k(\lambda,y)=\psi_k(y)=\sqrt{1-y^2}\,\chi_k(y),\quad \chi_k(y)=Ps_k^1(y,\theta)\quad (k=1,2,\ldots),$$

по этой формуле можем записать

$$\bar{p}_k(\lambda,y)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma^2\psi_k(y)-\psi_k''(y)\right]=-\frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}}\left\{\left(1-y^2\right)\chi_k''-2y\chi_k'+\left[4\theta\left(1-y^2\right)-\frac{1}{1-y^2}\right]\chi_k\right\}\quad \left(\gamma^2=-4\theta\right).$$

Приняв во внимание дифференциальное уравнение сфероидальных волновых функций [13] (с. 169, ф-ла (1)), сразу находим

$$\bar{p}_k(\lambda,y)=\frac{1}{2\pi}\lambda_n^1(\theta)\frac{\chi_k(y)}{\sqrt{1-y^2}}\quad (-1<y<1;\ k=1,2,\ldots).$$

Перейдя к интервалу $(-a,a)$, придем к соотношению (2.14).

Совершенно аналогичным образом по формуле (2.13) получается соотношение (2.15). Эти же соотношения (2.14)-(2.15) на отрезке $-a\le y\le a$ и на $[0,\infty)$ согласно (2.5) и (2.12) имеют, соответственно, вид

$$\int_{-a}^{a}e^{-\gamma|y-\eta|}\frac{\varphi_k(\eta,\theta)d\eta}{\sqrt{1-\eta^2/a^2}}=\frac{2\gamma a^2}{\lambda_k^1(\theta)}\sqrt{1-y^2/a^2}\,\varphi_k(y,\theta)+\frac{1}{\pi}\left[\gamma\,\Phi_k(a,\theta)+\Phi_k'(a,\theta)\right]\delta(y-a)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[\gamma\,\Phi_k(-a,\theta)-\Phi_k'(-a,\theta)\right]\delta(y+a);\quad \left(k=1,2,\ldots;-a\le y\le a;\ \theta=-\gamma^2/4\right);\tag{2.16}$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\gamma|y-\eta|}e^{-\gamma\eta}\psi_k(\eta)d\eta=\frac{1}{k+1}ye^{-\gamma y}\psi_k(y)+\frac{1}{\pi}\left[\gamma\,\Psi_k(0)+\Psi_k'(0)\right]\delta(y)\quad (k=0,1,2,\ldots;\ 0\le y<\infty)\tag{2.17}$$

$$\Phi_k(y,\theta)=\frac{2\gamma a^2}{\lambda_k^1(\theta)}\sqrt{1-y^2/a^2}\,\varphi_k(y,\theta);\qquad \Psi_k(y)=\frac{1}{k+1}ye^{-\gamma y}\psi_k(y).$$

Далее непрерывную часть $\bar{p}_0(y)$ решения ИУ (1.3) при l_1 представим в форме бесконечного ряда

$$p_0(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2/a^2}}\sum_{n=1}^{\infty}x_n\varphi_n(y,\theta)\ (-a<y<a)\tag{2.18}$$

с неизвестными коэффициентами x_n. Этот ряд поставим в ИУ (1.3), поменяем порядок интегрирования и суммирования, а затем воспользуемся соотношением (2.14). Получим

$$2\gamma a^2\sqrt{1-y^2/a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{\lambda_n^1(\theta)}\varphi_n(y,\theta)=\bar{g}(y)\ (-a<y<a).$$

Обе части этого равенства умножим на $\varphi_n(y,\theta)\Big/\sqrt{1-y^2/a^2}$ и воспользуемся условиями ортогональности функций $\varphi_n(y,\theta)$ [13]

$$\int_{-a}^{a}\varphi_n(y,\theta)\varphi_k(y,\theta)dy=\begin{cases}a\dfrac{n(n+1)}{n+1/2} & (k=n);\\ 0 & (k\neq n).\end{cases}$$

В результате находим

$$x_n=\frac{1}{2\gamma a^3}\frac{n+1/2}{n(n+1)}g_n;\quad g_n=\int_{-a}^{a}\frac{\bar g(y)\varphi_n(y,\theta)}{\sqrt{1-y^2/a^2}}dy\qquad(n=1,2,\dots).\tag{2.19}$$

На основании (2.18) и (2.3) решение ИУ (1.3) при l_1 можно представить также формулой

$$\bar p(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2/a^2}}\sum_{n=1}^{\infty}x_n\varphi_n(y,\theta)+\frac{1}{\pi}[\gamma\bar g(a)+\bar g'(a)]\delta(y-a)+$$
$$+\frac{1}{\pi}[\gamma\bar g(-a)-\bar g'(a)]\delta(y+a)\quad(-a\le y\le a),$$

где x_n дается формулой (2.19).

Ограниченное на отрезке решение ИУ (1.3) при l_1 согласно теореме 4 будет представлено формулой

$$\bar p(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2/a^2}}\sum_{n=1}^{\infty}x_n\varphi_n(y,\theta)+Ach(\gamma y)+Bsh(\gamma y)\quad(-a\le y\le a),$$

где выражения коэффициентов A и B приведены в (2.9).

Совершенно аналогичным образом при помощи (2.15) и теоремы 7 можно построить неограниченное и ограниченное решения ИУ (1.3) при l_2.

Институт механики НАН РА,
Национальный университет архитектуры и строительства Армении
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

О решении двух интегральных уравнений, связанных с контактными задачами для линейно деформируемого основания

Строятся решения одномерных интегральных уравнений (ИУ) Фредгольма первого рода с симметрическим экспоненциальным ядром, зависящим от разности аргументов, на конечном и полубесконечном интервалах. Они получаются

при помощи интегрального преобразования Фурье из соответствующих двухмерных ИУ Фредгольма первого рода, описывающих контактные задачи о вдавливании штампов в форме бесконечной полосы и полуплоскости в линейно деформируемое основание, функцией влияния которого является функциия Макдональда нулевого индекса. Доказано, что решения этих одномерных уравнений, выражающихся простыми аналитическими формулами, в концевых точках содержат сосредоточенные элементы в виде дельта-функций. При определенных условиях на правые части ИУ существуют также единственные ограниченные решения. Основные структурные свойства решений обсуждаемых одномерных ИУ сформулированы в виде теорем. А их решения, помимо элементарных формул, могут быть представлены также рядами по вытянутым сфероидиальным волновым функциям и по многочленам Чебышева – Лагерра.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

Գծային դեֆորմացվող հիմքի համար կոնտակտային խնդիրների հետ կապված երկու ինտեգրալ հավասարումների լուծումների մասին

Վերջավոր և կիսաանվերջ միջակայքերում կառուցվում են արգումենտների տարբերությունից կախված սիմետրիկ էքսպոնենցիալ կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի միաչափ երկու ինտեգրալ հավասարումների (ԻՀ) լուծումները: Դրանք ստացվում են Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի համապատասխան երկչափ ԻՀ-ից Ֆուրեյի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ: Այդ երկչափ ԻՀ-ներով նկարագրվում են Մակդոնալդի զրոյական ինդեքսով ֆունկցիան որպես ազդեցության ֆունկցիա ունեցող գծային դեֆորմացվող հիմքի համար կոնտակտային երկու խնդիրներ, երբ անվերջ շերտի և կիսահարթության տեսքով դրոշմները սեղմվում են այդպիսի հիմքին: Ապացուցվում է, որ միաչափ ԻՀ-ների լուծումները, որոնք արտահայտվում են պարզ անալիտիկ բանաձևերով, միջակայքերի ծայրակետերում պարունակում են դելտա-ֆունկցիաների տեսքով կենտրոնացված տարրեր: ԻՀ-ների աջ մասերի վրա որոշակի պայմանների դեպքում գոյություն ունեն նաև միակ սահմանափակ լուծումներ: Քննարկվող ԻՀ-ների լուծումների կառուցվածքային հատկությունները ձևակերպված են թեորեմներով և, բացի պարզագույն բանաձևերից, ներկայացված են նաև շարքերով՝ ըստ ձգված սֆերոիդալ ալիքային ֆունկցիաների և ըստ Չեբիշև-Լագերի բազմանդամների:

Corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

On the Solution of Two Integral Equations Related to Contact Problems for a Linearly Deformable Foundation

Solutions of one-dimensional Fredholm IEs of the first kind with a symmetric exponential kernel, depending on the difference of arguments, on finite and semi-infinite intervals are constructed. They are obtained using the integral Fourier transform from the corresponding two-dimensional Fredholm IEs of the first kind, describing the contact problems of indentation of stamps in the form of an infinite strip and a half-plane into a linearly deformable foundation. The influence function of the foundation is the Macdonald function of zero index. It is proved that solutions of these one-

dimensional equations, which are expressed by simple analytical formulas, contain concentrated elements in the form of delta functions at the end points.Under certain conditions for the right-hand side of the IEs, there are also unique bounded solutions.The main structural properties of the solutions to the one-dimensional IEs under consideration are formulated in the form of theorems. And their solutions, in addition to elementary formulas, can also be represented by series in prolate spheroidal wave functions and in Chebyshev-Laguerre polynomials.

Литература

1. *Коренев Б. Г.* Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М. Гостехиздат. 1954. 232 с.
2. *Коренев Б. Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М. Физматгиз. 1960. 460 с.
3. *Мхитарян С. М.* – ПММ. 2015. Т.79. Вып. 3. С. 434-446.
4. *Мхитарян С. М.* В кн.: Труды IV междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван. 2015. С. 476-480 (на англ. яз.)
5. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно деформируемого основания. Киев–Одесса. Вища школа. 1982. 167 с.
6. *Степанов Ф. И., Торская Е. В.* – ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 2. С. 256-268.
7. *Punati Venugopala, Sharma Ishan, Waho Pankaj* – Mathematics and Mechanics of Solids. 2018. V. 24. Month 07. P. 108128651878606.
8. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л. А. Галина. М. Наука. 1976. 493 с.
9. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. М. Наука. 1975. 304 с.
10. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М. Наука. 1974. 480 с.
11. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М. Добросвет. 2007. 408 с.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А. и др.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М. Наука. 1969. 344 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М. Наука. 1967. 300 с.