А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 30 ИЮНЬ, 1989 ВЫПУСК 3

УДК:524.7—337

УСТОЙЧИВОСТЬ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ОДНОРОДНОГО СФЕРОИДА С АЗИМУТАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ. II

В.А.АНТОНОВ, О.А.ЖЕЛЕЗНЯК

Поступила 20 июня 1988
Принята к печати 11 октября 1988

Исследуется устойчивость самогравитирующего сфероида с вмороженным магнитным полем по отношению к «кольцеобразным» возмущениям. Показано, что без учета диссипативных эффектов трехосность сфероида наступает всегда раньше, чем отделение кольца.

В первой части работы [1] было изучено влияние магнитного поля на то критическое сжатие сфероида, при котором он теряет устойчивость по отношению к возникновению трехосности. Однако в классической теории фигур равновесия несжимаемой жидкости известны другие, более сложные неустойчивости. В частности, достаточно хорошо изучена неустойчивость четвертого порядка [2], приводящая к зависимости от направления деформации или к отделению в конце концов периферийного кольца от центрального сгущения, или к появлению «подушкообразности». Для обычной жидкости эта неустойчивость четвертого порядка возникает на последовательности Маклорена гораздо позже неустойчивости эллипсоидальных деформаций и поэтому не может иметь реального космологического значения. Но присутствие в сфероиде вмороженного магнитного поля $\vec{H}(-\lambda a^2 y, \lambda b^2 x, 0)$ могло бы существенно изменить дело, так как оно совсем по-разному взаимодействует с ротационно симметричными и несимметричными возмущениями.

Ввиду очевидной симметрии «кольцеобразных» возмущений в уравнениях эволюции должны оставаться только потенциальные, но не гироскопические силы. Поэтому применим энергетический подход к вопросу об устойчивости или неустойчивости сфероида с магнитным полем. Как всегда в окрестности стационарного состояния, приращение энергии δE при допустимых деформациях, не нарушающих, в частности, ротационной симметрии, должно выражаться величиной второго порядка малости по амплитуде деформации. Из разных существующих способов вычислени δE выберем основанный на анализе работы, совершаемой при деформации, поскольку при этом наглядным образом выясняется пассивная в некотором смысле роль магнитного поля.

Разобьем мысленно всю фигуру на бесконечно тонкие круговые кольца. Каждое жидкое кольцо, точки которого имели определенные цилиндрические координаты R, z (и произвольное φ), пусть смещаются в положение $R+\delta R, z+\delta z$. Всюду должно соблюдаться условие неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial R}(R\delta R)+R\frac{\partial \delta z}{\partial z}=0. \tag{1}$$

Важное значение имеет деформация поверхности фигуры. Как принято в вышеупомянутых классических работах, эту деформацию выразим смещением в направлении внешней нормали. Обозначим его через l и введем угол γ наклона нормали к оси z. Тогда

$$\cos\gamma=\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{R^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}}},\quad \sin\gamma=\frac{\frac{R}{a^2}}{\sqrt{\frac{R^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

$$l=\delta z\,\cos\gamma+\delta R\sin\gamma. \tag{2}$$

Для подсчета совершаемой работы формально надо задать последовательность промежуточных состояний, хотя, ввиду консервативности сил, в ответ войдет только окончательная деформация. Применим простейшую линейную зависимость промежуточной деформации от ее формального времени τ:

$$(\delta R)^{in}=\tau\delta R,\quad (\delta z)^{in}=\tau\delta z\quad (0<\tau<1). \tag{3}$$

Символ «in» означает промежуточную деформацию в отличие от окончательного деформированного состояния. Равным образом несущественно, как изменяется распределение давления $P(x,y,z)$ в зависимости от τ, поскольку силы давления все равно не совершают работы на перемещение частиц несжимаемой жидкости. Используем удобное для дальнейшего предположение, что P не зависит от τ.

В наш расчет войдут четыре рода объемных сил: центробежная F_1, магнитная F_2, гравитационная F_3, сила давления F_4. Искомое полное приращение энергии можно записать в виде

$$\delta E=-\int_0^1 d\tau\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial(\delta\bar{r})^{in}}{\partial\tau}\cdot F_i^{in}(\tau)dm-\int_0^1 d\tau\int(\delta P)^{in}\frac{\partial l^{in}}{\partial\tau}d\sigma=$$

$$=-\int_0^1 d\tau \int \sum_{i=1}^{4} [F_i^{in}(\tau)-F_i^{in}(0)]\frac{\partial(\delta \bar{r})^{in}}{\partial\tau}dm-\int_0 d\tau \int (\delta P)^{in}\frac{\partial l^{in}}{\partial\tau}d\sigma, \quad (4)$$

где введены обозначения: dm— элемент массы, $d\sigma$ — элемент поверхности $\delta\bar{r}$ — вектор в меридиональной плоскости с компонентами $(\delta R, \delta z)$, δP — скачок давления при переходе из внешней области во внутреннюю. Отметим также, что знак dE определяется членами второго порядка малости по отношению к $\delta\bar{r}$ или l. Соответственно все соотношения, связующие $\delta\bar{r}$, l и приращение сил $\bar{F}_i(\tau)-\bar{F}_i(0)$, выписываем только в линейном приближении, что и было сделано в формулах (1) и (2).

Рассмотрим введенные силы более подробно.

1) Закон изменения центробежной силы следует из того факта, что на место смещенного кольца встает другое кольцо, имевшее в невозмущенном состоянии радиус $R-\delta R$ и удельный момент, отличающийся от момента первого кольца коэффициентом $\left(\frac{R-\delta R}{R}\right)^2$. В том же отношении изменяется локальная угловая скорость, а для центробежных сил указанное соотношение возводится в квадрат. Таким образом $\bar{F}_1$ имеет только R—компонент:

$$F_1(\tau)-F_1(0)=\omega^2 R[(1-\frac{\delta R}{R})^2-1]=-4\omega^2\delta R. \quad (5)$$

2) Внутри каждого кольца вмороженное магнитное поле, по симметрии остается продольным, азимутальным. Его напряженность H меняется обратно пропорционально сечению кольца и, в силу сохранения объема, в точности пропорциональна длине $2\pi R$. Так как в невозмущенном состоянии H при переходе от точки к точке тоже пропорционально R, то перемещение жидких элементов никак не сказывается на H как функции координат фиксированной точки. Поэтому в точности

$$\bar{F}_2(\tau)-\bar{F}_2(0)=0.$$

3) Возмущение гравитационной силы, как для всякой несжимаемой фигуры, можно считать обусловленным появлением дополнительного слоя на поверхности с поверхностной плотностью ρl. Возмущения потенциала снаружи и внутри, соответственно обозначаемые U_e и U_i, оказываются гармоническими функциями каждая в своей области, но на границе фигуры, как известно [3], существует скачок производных

$$\frac{\partial U_e}{\partial n}-\frac{\partial U_i}{\partial n}=-4\pi G\rho l \quad (6)$$

при непрерывном сшивании самих функций U_e и U_i. Процедура подбора таких потенциалов, чтобы l в (6) выражалось достаточно простым образом, описана во многих руководствах [4]. Основой этой процедуры является введение сплюснутых сфероидальных координат по формулам

$$R=\sqrt{(a^2-c^2)(1-\xi^2)(1-\eta^2)},\quad z=\sqrt{a^2-c^2}\xi\cdot\eta. \tag{7}$$

В частности, поверхности самой фигуры соответствует постоянное значение координаты ξ,

$$\xi_0=\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}. \tag{8}$$

Для дальнейших расчетов полезно иметь в виду, что вдоль меридиана сфероида

$$(ds)^2=(dR)^2+(dz)^2=(a^2-c^2)(\xi_0^2+\eta^2)\frac{(d\eta)^2}{1-\eta}, \tag{9}$$

$$RdR=-(a^2-c^2)(1+\xi_0)\eta d\eta, \tag{10}$$

причем η меняется от нуля на экваторе до единицы на полюсе. Тогда нормальная производная в (6) раскрывается как

$$\frac{\partial}{\partial n}=\sqrt{\frac{1+\xi_0^2}{(a^2-c^2)(\xi_0^2+\eta^2)}}\frac{\partial}{\partial\xi}. \tag{11}$$

Простейшими гармоническими функциями, удовлетворяющими условию непрерывности при переходе через границу, являются

$$U_{me}=P_m(\eta)q_m(\xi)p_m(\xi_0),\quad U_{mi}=P_m(\eta)q_m(\xi_0)p_m(\xi), \tag{17}$$

где $P_m(x)$—полиномы Лежандра, $p_m(x)=i^{-m}P_m(im)$, $q_m(x)=i^{-m}Q_m(ix)$, $Q_m(x)$— второе решение дифференциального уравнения полиномов Лежандра, стремящееся к нулю на бесконечности. Нормировку $q_m(x)$, для определенности, подбираем так, чтобы в известном соотношении

$$[p_m'(x)q_m(x)-p_m(x)q_m'(x)](1+x^2)=\text{const} \tag{13}$$

постоянная справа равнялась единице. Для записи произвольного возмущения потенциала используем суперпозицию

$$U_i=\sum_m c_m U_{mi},\quad U_e=\sum_m c_m U_{me} \tag{14}$$

с какими-либо постоянными коэффициентами c_m. Тогда из (6) с учетом (11) следует

$$l=\frac{1}{4\pi G\rho a}\sum_m \frac{c_m P_m(\eta)}{\sqrt{\xi_0^2+\eta^2}}. \tag{15}$$

Нетривиальные симметричные возмущения начинаются с $m=2$, так как при $m=0$ и 1 получается просто смещение начала отсчета потенциала или сдвиг фигуры как целого в направлении z. Далее нечетные m соответствуют изгибным возмущениям, которые заведомо устойчивы. Исходя из этого, суммирование в (15) должно вестись по значениям $m=2,4,\ldots$, однако, мелкомасштабные возмущения ($m\geqslant 6$) могут дать неустойчивость только при очень больших сжатиях фигуры.

Наконец, для вычисления полной работы необходимо знать скачок суммарного давления, гидродинамического и давления магнитного поля на границе фигуры. Как ясно из вышесказанного, суммарное давление зависит от координат точки, но не от τ. Согласно данным части I [1]

$$P=P_0+\Theta\left(1-\frac{R^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right). \tag{16}$$

Снаружи у нас остается все время какое—то фиксированное внешнее давление P_0, поэтому $P-P_0$ на перемещающейся границе обусловлено только изменением самой границы, т.е.

$$\delta P=-2\Theta l\sqrt{\frac{R^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}}. \tag{17}$$

Необходимо остановиться на связи δR и l. Интегральной формой условия неразрывности является

$$Rh(R)\delta\overline{R}+\int_0^R \frac{l}{\cos\gamma}RdR=0, \tag{18}$$

где $h(R)$ — полутолщина сфероида

$$h(R)=c\sqrt{1-\frac{R^2}{a^2}},$$

а черта сверху δR означает усреднение по z.

Вычисление интегралов в формуле (4) требует некоторых пояснений. В выражении для работы центробежных сил приходится иметь дело с интегралом

$$\int_0^{h(R)} (\delta R)^2 dz = h(R)(\overline{\delta R})^2 \geqslant h(R)(\delta R)^2, \qquad (19)$$

причем точное равенство достигается в (19) только в случае независимости δR от z. Иначе говоря, при заданном возмущении поверхности l энергетически наиболее выгодна такая внутренняя деформация, при которой любой вертикальный столбик жидкости остается вертикальным, что мы в дальнейшем и предполагаем. (На величине же работы гравитационных сил, как подтвердится ниже, изгиб столбика не сказывается).

Напомним, что для устойчивости или неустойчивости рассматриваемой фигуры необходимо взять интегралы в (4) и исследовать знак их суммы. Присутствие переменной интеграции τ сказывается только в появлении коэффициента

$$\int_0^1 \tau d\tau = \frac{1}{2},$$

типичного вообще для теории малых деформаций [5]. Этот общий коэффициент в нашей задаче не играет никакой роли, так что можно снять интегрирование по τ и положить $\tau=1$. В частности, в такой форме работа против гравитационных сил

$$-\int\left(\delta R\frac{\partial U_i}{\partial R}+\delta z\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)dm = -4\pi\rho\int\int_{z>0}\left(\delta R\frac{\partial U_i}{\partial R}+\delta z\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)RdRdz=$$

$$=-4\pi\rho\int\int_{z>0}\left[\frac{\partial}{\partial R}(R\delta R\cdot U_i)+\frac{\partial}{\partial z}(R\delta z U_i)\right]dRdz = -4\pi\rho\int_{z>0} R\cdot U_i l ds.$$

При переходе от объемного к поверхностному интегралу использовано условие (1).

Вернемся еще раз к вычислению работы центробежных сил. Значение $\delta R=\overline{\delta R}$ находим из (18) с учетом (7) и (10); найденное выражение

$$\delta R = -\frac{\sqrt{(a^2-c^2)(1-\eta^2)}}{4\pi G\rho ac\eta}\sum_m \frac{c_m P_m^1(\eta)}{m(m+1)} \qquad (20)$$

подставляем в (5). Дальнейшие выкладки, ведущие к вычислению интегралов в (4), не представляют существенных затруднений, при этом используются известные соотношения ортогональности для функций Лежандра

$P_m(x), P_m^1(x)$.

В итоге расчетов находим приращение энергии, с точностью до несущественной положительной постоянной

$$\delta E=\frac{\omega^2(a^2-c^2)}{\pi G\rho c}\sum\frac{c_m^2}{m(m+1)(2m+1)}-\sqrt{a^2-c^2}\sum\frac{c_m^2P_m(\xi_0)q_m(\xi)}{2m+1}+$$

$$+c\left(1-\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\arccos\frac{c}{a}\right)\sum\frac{c_m^2}{2m+1}. \qquad (21)$$

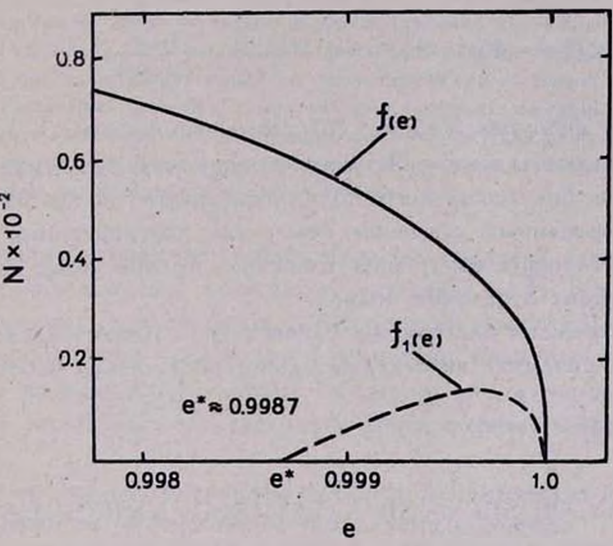

Рис. 1

Остается подставить ω^2 из [1], чтобы получить условие неустойчивости сфероида с магнитным полем в наиболее существенном случае $m=4$, отвечающем за отделение кольца:

$$\frac{H_0^2}{40\pi^2G\rho^2a^2\xi_0}+\frac{1}{5}\left[-3\xi_0+(1+3\xi_0^2)\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\xi_0}\right]-\frac{(35\xi_0^4+30\xi_0^2+3)^2}{32}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\xi_0}+$$

$$+\frac{5}{32}\xi_0\left(7\xi_0^2+\frac{11}{3}\right)(35\xi_0^4+30\xi_0^2+3)+2\left(\xi_0-\xi_0^2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\xi_0}\right)<0. \qquad (22)$$

Для сравнения с условием устойчивости сфероида с магнитным полем по отношению к трехосности, полученным в [1], преобразуем (22) к виду

$$\frac{H_0^2}{4\pi^2 G\rho^2 a^2} < f_1(e), \tag{23}$$

где

$$f_1(e) = \frac{10\sqrt{1-e^2}}{e}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{3\sqrt{1-e^2}}{e} - \frac{3-2e^2}{e^2}\arcsin e\right) + \right.$$

$$+ \frac{(8e^4-40e^2+35)^2}{32e^8}\arcsin e - \frac{5}{96}\frac{(21-10e^2)\sqrt{1-e^2}}{e^7}\times$$

$$\left.\times(8e^4-40e^2+35) - 2\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} - \frac{1-e^2}{e^2\arcsin e}\right)\right]. \tag{24}$$

Изобразим функции $f(e)$ и $f_1(e)$ совместно на рис. 1. Из рисунка видно, что трехосность всегда наступает раньше, чем отделение кольца от сфероида, как и без магнитного поля. Указанный результат применим только к изолированным системам без учета диссипативных эффектов, реально присутствующее внутреннее и внешнее трение может существенно повлиять на момент отделения кольца.

Авторы выражают благодарность участникам Ленинградского семинара по звездной динамике за содержательное обсуждение работы.

Ленинградский государственный
университет

THE STABILITY OF SELF—GRAVITATIONAL UNIFORM SPHEROID WITH AZIMUTAL MAGNETIC FIELD. II

V.A.ANTONOV, O.A.ZELESNYAK

The stability of the self—gravitational spheroid of magnetized liquid in respect to ring—like deformations is investigated. It has been shown that the spheroid becomes triaxial always before the separation of the ring.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А.Антонов, О.А.Железняк*, Астрофизика, 27, 111, 1987.
2. *С.Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
3. *М.Ф.Субботин*, Курс небесной механики, т. 3, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
4. *Ф.М.Морс, Г.Фешбах*, Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1958.
5. *Э.Дж.Раус*, Динамика систем твердых тел, т.1, Наука, М., 1983.