АСТРОФИЗИКА

ТОМ 30 ИЮНЬ, 1989 ВЫПУСК 3

УДК 524.4—32—17

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА И ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ГАЛАКТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ.

Е. И. ТИМОШКОВА

Поступила 18 апреля 1988
Принята к печати 15 мая 1988

Рассматривается обратная задача звездной динамики в новой постановке — ищется потенциал по заданному полю скоростей. В рамках этой задачи построен класс потенциалов, допускающих еще один, квадратичный по скоростям интеграл, помимо интеграла энергии. Приводятся конкретные примеры полностью интегрируемых потенциалов, которые могут использоваться в качестве аппроксимирующих для представления ротационно-симметричных полей реальных галактик и звездных скоплений. Полученные в работе формулы обобщают многие известные ранее результаты других авторов.

В звездной динамике хорошо известна обратная задача определения потенциала по заданному семейству траекторий [1—3]. В такой постановке задача, по-видимому, впервые была рассмотрена в работе В.Себехейя 1974г. [1]. В данной статье предлагается несколько иная постановка обратной задачи. Не конкретизируя детали, ее можно сформулировать как задачу нахождения потенциала по заданному определенным образом полю скоростей.

Ограничимся рассмотрением простых динамических систем с двумя степенями свободы, описываемых гамильтонианом вида

$$H \equiv \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-V(x,y)=E. \tag{1}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени, E— постоянная энергии. Как известно [4], интегрирование такой гамильтоновой системы равносильно нахождению полного интеграла уравнения Гамильтона— Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2=2(V+E), \tag{2}$$

причем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\dot{x},\ \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)=\dot{y}. \tag{3}$$

В случае полной интегрируемости системы с заданным гамильтонианом (1) функция $S(x,y)$ должна содержать еще две произвольные постоянные, одной из которых является постоянная энергии.

Но (2) можно рассматривать и как уравнение для определения потенциала $V(x,y)$, если считать заданной некоторую функцию $S(x,y)$ или две функции $S_x(x,y)$ и $S_y(x,y)$, с помощью которых задается поле скоростей. Очевидно, что для построения потенциала, для которого соответствующие уравнения движения в прямой задаче полностью интегрируются, задаваемое поле скоростей должно содержать две произвольные постоянные и одна из них E. Для простоты в дальнейшем будем называть таким образом построенный потенциал или соответствующий гамильтониан полностью интегрируемым. Если же задаваемое поле скоростей будет содержать меньшее число произвольных постоянных (т.е. одну или вообще ни одной), то соответствующий потенциал будем называть частично интегрируемым.

Будем, как и в предыдущей нашей работе [5], где решалась обратная задача в постановке В. Себехейя, исходить из двух ортогональных функций $u(x,y)$ и $w(x,y)$. С помощью этих двух функций зададим поле скоростей так, что

$$\begin{aligned} S_x&=A(u)u_x+B(w)w_x,\\ S_y&=A(u)u_y+B(w)w_y, \end{aligned} \tag{4}$$

где $A(u)$ и $B(w)$— некоторые произвольные функции от соответствующих аргументов. Легко проверяется необходимое равенство $S_{xy}=S_{yx}$. Поскольку функции u и w ортогональны, то имеем $u_xw_x+u_yw_y=0$, и из формулы (2) можно найти

$$2(V+E)=A^2(u)(u_x^2+u_y^2)+B^2(w)(w_x^2+w_y^2). \tag{5}$$

Теперь для получения полностью интегрируемого потенциала согласно (5) надо, чтобы из произвольных функций $A^2(u)$ и $B^2(w)$ можно было выделить такие две произвольные постоянные (одной из них должна быть E), которые бы содержались в выражениях (4) для составляющих скорости, но не входили бы в выражение для самого потенциала $V(x,y)$. Ясно, что при таком общем задании поля скоростей, как (4), о таком выделении говорить трудно. Выделение становится возможным (или частично возможным), если в большей степени конкретизировать задаваемые ортогональные функции $u(x,y)$ и $w(x,y)$. Условно будем различать следующие четыре случая.

1. Функции $u(x,y)$ и $w(x,y)$ ортогональные и такие, что

$$u_x^2+u_y^2=w_x^2+w_y^2=h\text{—const.} \tag{6}$$

Уравнением (6) функции u и w определяется фактически однозначно: $u=x, w=y$ с точностью до поворотов и подобий.

Пусть для простоты $h=1$, тогда согласно (5) получаем:

$$2(V+E)=A^2(u)+B^2(w). \tag{7}$$

Теперь для выделения двух нужных постоянных достаточно положить

$$A(u)=\pm\sqrt{2f(u)+E+c}, \tag{8}$$

$$B(w)=\pm\sqrt{2\psi(w)+E-c},$$

причем знаки перед корнем в выражениях для $A(u)$ и $B(w)$ выбираются одинаковые, а функции $f(u)$ и $\psi(w)$— произвольные.

Окончательно для потенциала получаем следующее выражение:

$$V=f(u)+\psi(w). \tag{9}$$

Очевидно, что в этом случае прямая задача, т.е. задача о движении частицы единичной массы в поле потенциала (9) при условии (6), интегрируется в квадратурах.

2. Функции $u(x,y)$ и $w(x,y)$ ортогональные, но такие, что

$$u_x^2+u_y^2=w_x^2+w_y^2\neq\text{const.} \tag{10}$$

Тогда по формуле (5) имеем

$$2(V+E)=[A^2(u)+B^2(w)](u_x^2+u_u^2). \tag{11}$$

Представление (11) при условии (10) допускает выделение лишь одной произвольной постоянной, для чего надо положить

$$A(u)=\pm\sqrt{2f(u)+c}, \tag{12}$$

$$B(w)=\pm\sqrt{2\psi(w)-c},$$

где c— постоянная. Постоянную интеграла энергии E, как следует из (11), приходится принять равной нулю. Таким образом, получим лишь частично интегрируемый потенциал

$$V(x,y)=[f(u)+\psi(w)](u_x^2+u_y^2). \tag{13}$$

Для потенциала (13), так же, впрочем, как и для потенциала (9), может быть найден еще один интеграл, независимый от интеграла энергии. Однако в случае потенциала (13), в отличие от полностью интегрируемого потенциала (9), дополнительный интеграл будет локальным, поскольку постоянная интеграла энергии ($E=0$) фиксирована. Явный вид этого интеграла нетрудно найти, если обратиться к формулам (4). С учетом (12) имеем

$$\dot{x}=\sqrt{2f(u)+c}\;u_x+\sqrt{2\psi(w)-c}\;w_x, \tag{14}$$

$$\dot{y}=\sqrt{2f(u)+c}\;u_y+\sqrt{2\psi(w)-c}\;w_y,$$

получаем квадратичный по скоростям интеграл в виде

$$\frac{(\dot{x}u_x+\dot{y}u_y)^2}{(u_x^2+u_y^2)}-2f(u)=c. \tag{15}$$

В случае потенциала (9) вместо (15) имеем дополнительный глобальный интеграл

$$(\dot{x}u_x+\dot{y}u_y)^2-2f(u)-E=c. \tag{16}$$

В формулах (14) для простоты перед корнем опущены знаки $\pm$, тем более, что на окончательный результат (15) они не влияют. Траектории движения для потенциала (13) находятся в квадратурах.

Ранее в работах Стодолкевича [6] другими методами была получена формула (13) как наиболее общее представление потенциалов, допускающих локальный квадратичный по скоростям интеграл, отличный от интеграла энергии. При этом у Стодолкевича наряду с (10) возможно и (6).

3. Функции $u(x,y), w(x,y)$ предполагаются ортогональными и такими, что

$$u_x^2+u_y^2+w_x^2+w_y^2=1. \tag{17}$$

Здесь допускается и случай чисто мнимых значений функции w. Обращаясь к формуле (5) видим, что при условии (17) в выражения для произвольных функций $A(u)$ и $B(w)$ удается включить только одну произвольную постоянную E. Полагая

$$A^2(u)=2f(u)+2E, \tag{18}$$

$$B^2(w)=2\psi(w)+2E,$$

из (5) находим

$$V(x,y)=f(u)(u_x^2+u_y^2)+\psi(w)(w_x^2+w_y^2). \tag{19}$$

Этот результат впервые был получен другим методом В.А.Антоновым в работе, посвященной вопросам существования локального квадратичного интеграла в звездной динамике [7]. Действительно, как и в случае Стодолкевича (случай 2) для потенциала (19) при условии (17) существует лишь локальный дополнительный интеграл, независимый от интеграла энергии. Его явный вид можно получить тем же путем, что и интеграл (15), но в отличие от последнего здесь постоянная дополнительного интеграла фиксирована, а постоянная интеграла энергии E остается произвольной.

4. Функции $u(x,y)$ и $w(x,y)$— ортогональные и такие, что

$$u_x^2+u_y^2\neq w_x^2+w_y^2. \tag{20}$$

При таких общих предположениях, как видно из формул (4) и (5), в выражениях для произвольных функций $A(u)$ и $B(w)$ не удается включить ни одной произвольной постоянной такой, чтобы она не присутствовала в окончательном представлении потенциала. Поэтому, принимая $E=0$, получим из формулы (5) для потенциала $V(x,y)$ то же выражение (19), что и в предыдущем случае. Если $\psi(w)=0$, то получаем частный случай формулы Жуковского [5].

Аналогично (15) можно написать

$$\frac{(\dot{x}u_x-\dot{y}u_y)^2}{(u_x^2+u_y^2)}-2f(u)=0, \tag{21}$$

так что здесь также можно говорить о существовании локального дополнительного интеграла, но только с нулевыми константами.

Конечно, выделение приведенных здесь четырех случаев задания ортогональных функций несколько произвольно. В действительности эти случаи могут перекрываться или могут выполняться еще другие дополнительные условия для функций $u(x,y)$ и $w(x,y)$, так что полностью интегрируемые потенциалы могут получаться и в случаях Антонова и Стодолкевича. Примеры таких потенциалов можно найти в указанных работах этих авторов [6,7].

Как ясно из предыдущих рассмотрений, формулы (4) и (5) являются наиболее общими и составляют основу алгоритма для решения задачи об определении потенциала по заданному полю скоростей в наиболее общей постановке. По существу это поле может быть задано только с помощью одной функции $u(x,y)$, поскольку ортогональную к $u(x,y)$ функцию обычно можно вычислить без особых трудностей. Заметим также, что формула

(5) дает наиболее общий вид потенциалов, допускающих квадратичный по скоростям дополнительный интеграл.

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров.

Пусть заданы две ортогональные гармонические функции

$$u=x+ay,\quad w=ax-y, \tag{22}$$

где a— произвольный постоянный параметр.

Тогда

$$u_x^2+u_y^2=w_x^2+w_y^2=(1+a^2),$$

и мы имеем случай 1, следовательно, можем построить полностью интегрируемый потенциал. Поскольку здесь $h=1+a^2$, то вместо (7) будем иметь

$$2(V+E)=(1+a^2)[A^2(u)+B^2(w)]. \tag{23}$$

Выбираем функции $A^2(u)$ и $B^2(w)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} A^2(u)&=2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(x+ay)^k,\\ B^2(w)&=2\sum_{k=0}^{n}\beta_k(ax-y)^k, \end{aligned} \tag{24}$$

где α_k,β_k— произвольные постоянные параметры. Считая $E=(\alpha_0+\beta_0)(1+a^2)$, согласно формуле (23) найдем

$$V(x,y)=(1+a^2)\sum_{k=1}^{n}[\alpha_k(x+ay)^k+\beta_k(ax-y)^k]. \tag{25}$$

Как видно из (24) и (25), две произвольные постоянные α_0,β_0 не входят в окончательное выражение для потенциала, но присутствуют, согласно формулам (4), в выражениях для составляющих скорости, что, по существу, и обеспечивает полную интегрируемость гамильтониана (1) с потенциалом (25). Вместо постоянных α_0,β_0 можно считать произвольными, например, E и α_0, тогда

$$\beta_0=[E/(1+a^2)]-\alpha_0.$$

Формула (25) обобщает некоторые известные результаты, касающиеся потенциалов, используемых для описания возмущенного движения тела единичной массы в ротационно-симметричном поле галактики. Все эти результаты получаются для случая $a=1, \alpha_k=\beta_k$. Так, в недавней работе В.Орлова [8] другим методом получен потенциал вида

$$V_0(x,y)=A_0\sum_{k=2}^{n}[(x+y)^k+(x-y)^k]. \quad (26)$$

Если в (25) отличными от нуля считать только коэффициенты $\alpha_k=\beta_k$ для $2\leqslant k\leqslant 4$, то при $a=1$ из (25) имеем

$$V_H=A_0(x^2+y^2)+B_0(x^3+3xy^2)+C_0(x^4+6x^2y^2+y^4). \quad (27)$$

При $C_0=0(\alpha_4=\beta_4=0)$ с точностью до обозначений формула (25) представляет частный случай известного потенциала Хенона—Хейлеса. Доказательство полной интегрируемости динамических систем с гамильтонианом (1) и потенциалом (27) приводится, например, в [9].

Выбирая определенным образом произвольные параметры a, α_k, β_k, можно из (25) получить различные аппроксимирующие выражения для известных неинтегрируемых потенциалов. Например, динамическая система (1) с потенциалом Хенона — Хейлеса

$$V_H=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{x^3}{3}-xy^2, \quad (28)$$

как известно [10], обнаруживает сильно стохастическое поведение решений. Для сравнения интересно исследовать поведение полностью интегрируемой динамической системы (1) с потенциалом

$$V_A=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+(\frac{x^3}{3}-xy^2)+[\frac{2a}{1-a^2}x^2y+\frac{a^4+1}{3a(1-a^2)}y^3] \quad (29)$$

при различных значениях произвольного параметра a и постоянной энергии E. Потенциал (29) получается из (25) при

$$\alpha_1=\beta_1=0,\ \alpha_2=\beta_2=-\frac{1}{(1+a^2)^2},\ \alpha_3=\frac{1}{3(1-a^4)},$$

$$\beta_3=\frac{1}{3a(a^4-1)},\ \alpha_k=\beta_k=0 \text{ для } k\geqslant 4.$$

Нетрудно видеть, что динамическая система с гамильтонианом (1) и потенциалом (25) при произвольных параметрах a, α_k, β_k и, следовательно, (26), (27), (29) интегрируется в квадратах. Действительно, согласно формулам (4), (22) и (24) имеем

$$\dot{x}=\pm\left[\sqrt{2\alpha_0+2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x+ay)^k}+a\sqrt{2\beta_0+2\sum_{k=1}^{n}\beta_k(ax-y)^k}\right],$$
$$\dot{y}=\pm\left[a\sqrt{2\alpha_0+2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x+ay)^k}-\sqrt{2\beta_0+2\sum_{k=1}^{n}\beta_k(ax-y)^k}\right]. \tag{30}$$

Умножая сначала второе из равенств (30) на a и складывая, затем первое на a и вычитая, видим, что переменные разделяются. В результате получаем

$$\int\limits_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{2\alpha_0+2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u^k}}=\pm(1+a^2)(t-t_0), \tag{31}$$

$$\int\limits_{w_0}^{w}\frac{dw}{\sqrt{2\beta_0+2\sum_{k=1}^{n}\beta_k w^k}}=\pm(1+a^2)(t-t_0), \tag{32}$$

где $\beta_0=[E/(1+a^2)]-\alpha_0$ и E— постоянная интеграла энергии, u_0, w_0— еще две произвольные постоянные, определяющие координаты u и w в начальный момент времени t_0.

Интересно, что, несколько изменив ортогональные функции (22), можно удовлетворить условиям (17) пункта 3 (случай В.Антонова). Для этого достаточно положить

$$u(x,y)=x+ay,\quad w(x,y)=\lambda(ax-y), \tag{33}$$

где λ— постоянная, определяемая равенством

$$(1+a^2)(1+\lambda^2)=1.$$

Однако потенциал, построенный на основе функций (33), по существу будет тем же, что и (25).

В качестве примера частично интегрируемого потенциала рассмотрим потенциал, построенный в [5]. Пусть

$$V(x,y)=(x^2+y^2)^2\left(\frac{x^3}{3}-xy^2+h\right), \tag{34}$$

где h— произвольный параметр. Нетрудно видеть, что $V(x,y)$ имеет вид (13) (случай Стодолкевича). Действительно, если положим

$$\begin{gathered} u=\frac{x^3}{3}-xy^2, \text{ тогда } w=x^2y-\frac{y^3}{3}, \\ u_x^2+u_y^2=w_x^2+w_y^2=(x^2+y^2)^2, \end{gathered} \tag{35}$$

так что формула (34) перепишется в виде

$$V(x,y)=(x^2+y^2)^2(u+h). \tag{36}$$

Сравнивая (13) и (36), получаем

$$f(u)+\psi(w)=u+h,$$

и полагая $f(u)=u$, $\psi(w)=h$, в соответствии с формулами (4) находим

$$\begin{aligned} \dot{x}&=\pm(\sqrt{2u+c}\;u_x+\sqrt{2h-cw_x}), \\ \dot{y}&=\pm(\sqrt{2u+c}\;u_y+\sqrt{2h-cw_y}), \end{aligned} \tag{37}$$

где c— произвольная постоянная, тогда как $E=0$. Потенциал (36) интересен тем, что здесь $u(x,y)$ есть частный случай неинтегрируемого потенциала Хенона—Хейлеса (28).

Из формул (37) можно получить уравнение траекторий в виде

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sqrt{2u+c}\;u_x+\sqrt{2h-c}\;w_x}{\sqrt{2u+c}\;u_y+\sqrt{2h-c}\;w_y} \tag{38}$$

и после его интегрирования получаем двухпараметрическое семейство траекторий

$$w(x,y)-\sqrt{2h-c}\,\sqrt{2u+c}=c_1$$

или в развернутом виде

$$\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)-\sqrt{(2h-c)\left[2\left(\frac{x^3}{3}-xy^2\right)+c\right]}=c_1. \tag{39}$$

Для того, чтобы проинтегрировать задачу до конца, остается решить еще одно дифференциальное уравнение первого порядка, устанавливающее связь координат и времени. Интегрированием этого уравнения вводится еще одна произвольная постоянная, связанная со временем t_0. Окончательное решение будет зависеть только от трех произвольных постоянных c, c_1, t_0, вместо четырех — E, c, c_1, t_0.

В заключение отметим, что сформулированная здесь задача определения потенциала по заданному полю скоростей допускает обобщение на трехмерный случай. Более того, пункты 1—4 данной работы остаются в силе, если $\mathrm{grad}\,u$ и $\mathrm{grad}\,v$ рассматривать в пространстве трех измерений.

Автор выражает благодарность доктору физ.—мат. наук В.А.Антонову за обсуждение результатов работы.

Ленинградский государственный
университет

THE INVERSE PROBLEM FOR THE DETERMINATION OF THE POTENTIAL AND THE VELOCITY FIELD IN THE GALACTIC PLANE

E.I. TIMOSHKOVA

A new version of the inverse problem in stellar dynamics is proposed: the velocity field, being given the potential is searched which gives rise to this field. For this problem the class of potential is constructed which permits the quadratic integral of velocities in addition to integral of energy. Some examples of complete integrable potentials are given. These potentials may be used for the approximation of rotational symmetric gravitational fields of galaxies and stellar clusters. The formulae derived in the present paper generalize the results given by other authors.

ЛИТЕРАТУРА

1. *V.Szebehely*, Proc. Internat. Meeting on Earth's Rotation by Satellite Observ., Ed. E. Proverbio, Bologna, 1974.
2. *R.Broucke, H. Lass*, Celest. Mech., 16, 216, 1977.
3. *G.Bozis, A.Nakla*, Celest. Mech., 38, 357,1986.
4. *А.Парс*, Аналитическая механика, М., 1971.
5. *Е.И.Тимошкова*, Вестн. ЛГУ, №19,1988.
6. *J.S.Stodolkiewicz*, Acta Astron., 24, 265, 1974.

7. *В.А.Антонов*, Вестн. ЛГУ, №19, 97, 1981.
8. *В.В.Орлов*, Вестн. ЛГУ, №19, 101, 1988.
9. *P.Cleary*, Proc. ASA, 6, 453, 1986.
10. *В.А.Антонов*, Итоги науки и техники, Астрономия, 26, 1985.