АСТРОФИЗИКА

ТОМ 30 АПРЕЛЬ, 1989 ВЫПУСК 2

УДК: 52:530.12:531.51

АКСИСИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ С ЗАРЯДОМ В ОТО

Г. Г. АРУТЮНЯН, В. В. ПАПОЯН

Поступила 3 февраля 1988

Принята к печати 20 апреля 1988

Доказана возможность генерации решений уравнений ОТО по известным решениям обобщенной теории тяготения и наоборот. Найдено электровакуумное решение уравнений Эйнштейна, описывающее статическое аксиально-симметричное гравитационное поле.

1. *Уравнения стационарной аксисимметричной задачи ОТТ*. Один из возможных способов описания аксисимметричных и стационарных гравитационных полей состоит, как известно, в использовании выражения

$$d\bar{s}^2 = e^{2\bar{\alpha}}(dt - \bar{\omega}d\varphi)^2 - e^{2\bar{\beta}}(dx^1)^2 - e^{2\bar{\mu}}(dx^2)^2 - e^{2\bar{\gamma}}d\varphi^2. \tag{1}$$

Предполагается, что функции $\bar{\alpha}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\gamma}$ зависят лишь от „существенных“ координат $x^a=\{x^1, x^2\}$ (здесь и далее соответствующие начальным буквам латинского алфавита индексы a, $b=1, 2$; латинские индексы, взятые из середины алфавита i, k, $l=1, 2, 3$; греческие индексы α, $\beta=0, 1, 2, 3$).

Скалярный потенциал обобщенной теории тяготения (ОТТ) — $y=y(x^a)$ определим так, чтобы

$$y(x^a) = c^4/k(x^a), \quad k(x^a) \xrightarrow[x^a\to\infty]{} k_0, \tag{2}$$

k_0 — гравитационная постоянная.

Комбинации полевых уравнений ОТТ для конформно преобразованных компонентов метрического тензора

$$g_{\mu\nu} = y\bar{g}_{\mu\nu} \tag{3}$$

в случае электровакуума записываются в виде

$$\left(\frac{y_1}{y}DF\right)_1 + \left(\frac{y_2}{y}\frac{D}{F}\right)_2 = 0, \tag{4}$$

$$(D_1F)_1 + (D_2/F)_2 = 0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{f_1}{f}DF\right)_1+\left(\frac{f_2}{f}\frac{D}{F}\right)_2+f^2D\left(\omega_1^2F+\frac{\omega_2^2}{F}\right)=$$

$$=\frac{2}{f}\left[(A_1^2+B_1^2)F+(A_2^2+B_2^2)/F\right], \tag{6}$$

$$(\omega_1 f^2DF)_1+(\omega_2 f^2D/F)_2=4(A_2B_1-A_1B_2), \tag{7}$$

$$e^{-2\beta}\left[\mu_{11}+\mu_1^2+\left(\frac{D_1}{D}\right)_1+\frac{1}{2}\left(\frac{D_1^2}{D^2}+\frac{f_1^2}{f^2}\right)-\beta_1\left(\frac{D_1}{D}+\mu_1\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\omega_1^2}{2}f^2-\frac{y_1^2}{2y^2}(2\zeta-3)\right]-e^{-2\mu}\left[\beta_{22}+\beta_2\left(\frac{D_2}{D}-\frac{F_2}{F}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{Df}\left[e^{-2\beta}(A_1^2+B_1^2)-e^{-2\mu}(A_2^2+B_2^2)\right], \tag{8}$$

$$e^{-2\beta}\left[\mu_{11}+\mu_1\left(\frac{D_1}{D}+\frac{F_1}{F}\right)\right]+e^{-2\mu}\left[\beta_{22}+\beta_2^2+\left(\frac{D_2}{D}\right)_2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{D_2^2}{D^2}+\frac{f_2^2}{f^2}\right)-\mu_2\left(\frac{D_2}{D}+\beta_2\right)-\frac{\omega_2^2}{2}f^2-\frac{y_2^2}{2y^2}(2\zeta-3)\right]=$$

$$=-\frac{1}{Df}\left[e^{-2\beta}(A_1^2+B_1^2)-e^{-2\mu}(A_2^2+B_2^2)\right], \tag{9}$$

$$\left(\frac{D_1}{D}\right)_2+\frac{1}{2}\left(-\frac{D_1D_2}{D^2}+\frac{f_1f_2}{f^2}\right)-\beta_2\frac{D_1}{D}-\mu_1\frac{D_2}{D}-\frac{1}{2}\omega_1\omega_2f^2-$$

$$-\frac{y_1y_2}{2y^2}(2\zeta-3)=\frac{2}{Df}(A_1A_2+B_1B_2). \tag{10}$$

Уравнения Максвелла в отсутствие постоянных внешних электромагнитных полей с учетом стационарности и аксиальной симметрии автоматически обеспечивают обращение в нуль $F_{(03)}$ и $F_{(12)}$, а для A_a и B_a — производных от «потенциалов» электромагнитного поля дают

$$\left(\frac{F}{f}A_1\right)_1+\left(\frac{A_2}{Ff}\right)_2=\omega_1B_2-\omega_2B_1, \tag{11}$$

$$\left(\frac{F}{f}B_1\right)_1+\left(\frac{B_2}{Ff}\right)_2=\omega_2A_1-\omega_1A_2, \tag{12}$$

где

$$A_1=e^{\alpha+\beta}F_{(01)},\quad A_2=e^{\alpha+\mu}F_{(02)},\quad B_1=-e^{\alpha+\beta}F_{(32)},\quad B_2=e^{\alpha+\mu}F_{(31)}. \tag{13}$$

$F_{(\mu\nu)}$ — компоненты тензора электромагнитного поля, соответствующие определенной обычным образом из (1) ортонормированной тетраде.

Система уравнений (4)—(12) записана в обозначениях

$$D = y\bar{D} = e^{\alpha+\gamma},\ f = \bar{f} = e^{\alpha-\gamma},\ F = \bar{F} = e^{\mu-\beta},\ \sqrt{y}e^{\bar{\beta}} = e^{\beta},\ \sqrt{y}e^{\bar{\mu}} = e^{\mu}. \qquad (14)$$

Нижние индексы 1, 2 означают дифференцирование по x^1 и x^2. Используется геометрическая система единиц $c = k_0 = 1$. (При необходимости систему уравнений (4)—(12) можно переписать в виде, соответствующем метрической форме (1) с тензором $\bar{g}_{\mu\nu}$, учитывая (14)).

Замечание 1.1. Иногда выражению (1) предпочитают

$$ds^2 = e^{2\alpha'}dt^2 - e^{2\beta'}(dx^1)^2 - e^{2\mu'}(dx^2)^2 - e^{2\gamma'}(d\varphi - \omega' dt)^2, \qquad (1a)$$

которое получается из (1) формальной заменой $t \to i\varphi$, $\varphi \to -it$, а также $\bar{\alpha} \to \gamma'$, $\bar{\beta} \to \beta'$, $\bar{\mu} \to \mu'$, $\bar{\gamma} \to \alpha'$, $\bar{\omega} \to -\omega'$. В такой записи ω' имеет простой физический смысл — является угловой скоростью вовлечения свободно падающей инерциальной системы во вращение создающего гравитационное поле источника.

Замечание 1.2. Как (1), так и (1а) позволяют дополнительно специализировать координаты x^a ввиду того, что одно из допустимых координатных условий осталось неиспользованным. Другими словами, существует возможность калибровки компонентов метрического тензора, фиксирующая координаты. В частности, если выбрать

а) $F = 1$ $(\mu = \beta)$, то такая калибровка вместе с уравнением (5) приводит к каноническим координатам Вейля $x^1 = z$, $x^2 = \rho$. В этом случае уравнения (4)—(7) и (11)—(12) разрешаются независимо от уравнений (8)—(10), а комбинации последних сводятся к квадратурам (подробнее об этом см. [1]).

б) $F = F(x^1)$ или $F = F(x^2)$, то, как и в предыдущем случае, уравнения (4)—(7) и уравнения Максвелла (11), (12) независимы от остальных, при условии, что вид функций $F(x^1)$ $(F(x^2))$ совместим с уравнениями (8)—(10) (см., например, [2]).

Замечание 1.3. Часть полевых уравнений ОТТ (5)—(7) и (11)—(12) для конформно преобразованных компонентов метрического тензора $g_{\mu\nu} = y\bar{g}_{\mu\nu}$ имеет такой же вид, как и аналогичные уравнения ОТО. Оставшиеся уравнения ОТТ (8)—(10) отличаются от соответствующих уравнений ОТО наличием дополнительного источника, структура которого определяется производными скалярного потенциала $y(x^a)$ и ζ — безразмерной константой связи скалярного поля с другими полями.

2. *Уравнения ОТТ в канонических координатах.* Как отмечено (см. замечание 1.2а), калибровка $F=1$ позволяет выбрать канонические координаты Вейля $x^1=z$, $x^2=\rho$ (подробности изложены в [1]). В последнее время вновь обсуждаются различные возможности использования гармонических координат в теории тяготения [3—5]. Найдем гармонические координаты, соответствующие вейлевским z и ρ. Во избежание недоразумений представляется необходимым лишний раз дать этому понятию рабочее *определение:* четыре независимых величины x^γ, которые удовлетворяют уравнению Даламбера

$$\Box x^\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta}\right) = 0 \qquad (15)$$

и на больших расстояниях асимптотически совпадают с любыми (не обязательно декартовыми-цилиндрическими, сферическими и т. п.) координатами плоского мира, назовем гармоническими координатами. Метрический тензор $g^{\alpha\beta}(x'^\mu)$ задан в произвольных координатах x'^α. Легко заметить, что (15) совпадает с условием гармоничности Фока [6], если под x'^α понимать гармонические координаты (см. также [5]).

Стационарность задачи диктует выбор одной из гармонических координат $x^0=t$. Если использовать в качестве «опорных» канонические координаты $x'^1=z$, $x'^2=\rho=y\bar{D}=ye^{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}$, $x'^3=\varphi$, тогда вместо (1) имеем

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{y}\left[\psi(dt-\omega d\varphi)^2 - \frac{\Phi^2}{\psi}(dz^2+d\rho^2) - \frac{\rho^2}{\psi}d\varphi^2\right], \qquad (16)$$

где $\psi=\varphi e^{2\bar{\alpha}}$, $\Phi=ye^{\bar{\beta}+\bar{\alpha}}$ (ср. с выражением (4а) работы [1]), и уравнение (15) переписывается в виде

$$\Delta x^k + \frac{\Phi^2}{\rho^2}\frac{\partial^2 x^k}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{y}\nabla x^k \nabla y, \qquad (16)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}, \quad \nabla = \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho},$$

что позволяет выбрать в качестве еще одной гармонической координаты $x^3=\varphi$. Оставшиеся x^a определяются уравнением

$$\Delta x^a = \frac{1}{y}\nabla x^a \nabla y, \qquad (16a)$$

не содержащем явно компонентов метрического тензора $g_{\mu\nu}(z,\rho)$ (в ОТО $\Delta x^a=0$, т. к. $y=1$), что специфично а) для стационарных и аксиально-симметричных полей,

б) когда опорными являются канонические координаты Вейля,

в) когда в качестве «несущественных» гармонических координат допустимы $x^0 = t$, $x^3 = \varphi$.

Система полевых уравнений ОТГ, соответствующая метрической форме (16), записывается следующим образом:

$$\nabla (\nabla y/y) = 0, \tag{17}$$

$$\nabla\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) + \frac{\psi^3}{\rho^2}\nabla\omega\nabla\omega = \frac{2}{\psi}(\nabla A\nabla A + \nabla B\nabla B), \tag{18}$$

$$\nabla\left(\frac{\psi^2}{\rho^2}\nabla\omega\right) = \frac{4}{\rho}(A_2B_1 + A_1B_2), \tag{19}$$

$$\nabla\left(\frac{\nabla A}{\psi}\right) = \frac{1}{\rho}(\omega_1B_2 - \omega_2B_1), \tag{20}$$

$$\nabla\left(\frac{\nabla B}{\psi}\right) = \frac{1}{\rho}(\omega_2A_1 - \omega_1A_2), \tag{21}$$

$$\frac{2}{\rho}(\ln\Phi_y)_1 = y_1y_2/y^2, \tag{22}$$

$$\frac{4}{\rho}(\ln\Phi_y)_2 = (y_2^2 - y_1^2)/y^2, \tag{23}$$

$$\frac{2}{\rho}(\ln\Phi_0)_1 = \frac{\psi_1\psi_2}{\psi^2} - \frac{\psi^2}{\rho^2}\omega_1\omega_2 - 4(A_1A_2 + B_1B_2)/\psi, \tag{24}$$

$$\frac{4}{\rho}(\ln\Phi_0)_2 = (\psi_2^2 - \psi_1^2)/\psi^2 - \frac{\psi^2}{\rho^2}(\omega_2^2 - \omega_1^2) - 4(A_2^2 - A_1^2 + B_2^2 - B_1^2)/\psi. \tag{25}$$

Здесь

$$\Phi = ye^{\bar\alpha + \bar\beta} = \Phi_0\cdot\Phi_y^{(3-2\varkappa)}. \tag{26}$$

Замечание 2.1. Уравнения (17), (22), (23) для скалярного потенциала y и Φ_y — той части метрического коэффициента Φ, которая определяется только лишь гравитационным скаляром $y = y\ (\rho,\ z)$, интегрируются независимо от остальных. Если, в рамках той или иной задачи, найдено решение (17), то (22) и (23) сводятся к квадратурам. Иногда, удобно ввести

$$\sigma = \ln y$$

и переписать (17), (22), (23) в координатах $\xi = z + i\rho$, $\xi^* = z - i\rho$, что дает

$$2\frac{\partial^2 \sigma}{\partial\xi\,\partial\xi^*} = \frac{1}{\xi - \xi^*}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma}{\partial\xi^*}\right), \tag{17a}$$

$$\frac{4}{\xi - \xi^*}\,\frac{\partial \ln \Phi_y}{\partial\xi} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}\right)^2, \tag{22a}$$

$$\frac{4}{\xi - \xi^*}\,\frac{\partial \ln \Phi_y}{\partial\xi^*} = -\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi^*}\right)^2. \tag{23a}$$

Замечание 2.2. Как в ОТТ, так и в ОТО уравнения (18)—(21), (24) и (25), которые определяют метрические коэффициенты ψ, ω, потенциалы A, B, а также функцию Φ_0 (метрический коэффициент ОТО, соответствующий Φ в ОТТ), имеют один и тот же вид.

На основе этих замечаний может быть сформулирована

Теорема 2.1. Если получено решение стационарной аксисимметричной электровакуумной задачи в ОТТ, то можно найти решение аналогичной задачи в ОТО, согласно

$$g_{00}^{\text{ото}} = y\, g_{00}^{\text{отт}},\ g_{33}^{\text{ото}} = y\, g_{33}^{\text{отт}},\ g_{11}^{\text{ото}} = y\, g_{11}^{\text{отт}}/\Phi_y^{2(3-\kappa)} \tag{27}$$

и, наоборот, известные решения ОТО переносятся в ОТТ теми же соотношениями (27), однако предварительно должны быть найдены соответствующие постановке задачи решения уравнений (17), (22), (23).

Соотношения (27) работают только тогда, когда метрика калибрована условием $F = 1$, т. е. записана в канонических координатах Вейля.

Теорема 2.1 указывает на довольно тесное родство ОТО и ОТТ и возможно является отражением связи гравитационного поля с совместными нелинейными реализациями аффинной и конформной симметрий (см. [7]).

Замечание 2.3. а) Система полевых уравнений (17)—(25) симметрична относительно одновременной замены $A \rightleftarrows B$, $\omega \to -\omega$. В статике ($\omega = 0$) это означает, что найденное в электростатическом случае ($\omega = B = 0$, $A \neq 0$) решение пригодно и для магнитостатического случая ($\omega = A = 0$, $B \neq 0$).

б) Компоненты потенциала электромагнитного поля $A_\mu (A_t, 0, 0, A_\varphi)$ связаны с производными A и B так, что

$$A_1 = -\frac{\partial A_t}{\partial z},\ A_2 = -\frac{\partial A_t}{\partial \rho},$$

$$B_1 = \frac{\psi}{\rho}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \omega\,\frac{\partial A_t}{\partial \rho}\right),$$

$$B_2 = -\frac{\psi}{\rho}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \omega\frac{\partial A_t}{\partial z}\right),$$

учитывая которые, а также имея в виду следующее из очевидного условия $B_{12} = B_{21}$ соотношение

$$\nabla\left[\frac{\psi}{\rho^2}(\nabla A_\varphi + \omega\nabla A_t)\right] = 0,$$

вместо (18)—(21) получаем

$$\nabla\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) + \frac{\psi^2}{\rho^2}\nabla\omega\nabla\omega = \frac{2\nabla A_t\nabla A_t}{\psi} + \frac{2\psi}{\rho^2}(\nabla A_\varphi + \omega\nabla A_t)^2,$$

$$\nabla\left[\frac{\psi^2}{\rho^2}\nabla\omega + \frac{4\psi}{\rho^2}A_t(\nabla A_\varphi + \omega\nabla A_t)\right] = 0,$$

$$\nabla\left[\frac{\nabla A_t}{\psi} - \omega\frac{\psi}{\rho^2}(\nabla A_\varphi + \omega\nabla A_t)\right] = 0.$$

Полная система полевых уравнений для величин $(y,\ \psi,\ \omega,\ \Phi^2/\psi)$ в стационарном вакуумном случае $(\omega \neq 0,\ A_t = A_\varphi = 0)$ и для величин $(\sqrt{y},\ \sqrt{\psi},\ iA_\varphi,\ (\Phi^2/\psi)^{1/4})$ в магнитостатическом случае $(\omega = A_t = 0,\ A_\varphi \neq 0)$ имеет один и тот же вид (подробности см. в [1]).

Замечание 2.3 служит основанием для того, чтобы было сформулировано

Предложение 2.2. Если найдено решение стационарной вакуумной задачи $(y,\ \psi,\ \omega,\ \Phi^2/\psi)$, то получено также решение магнитостатической задачи $(\sqrt{y},\ \sqrt{\psi},\ iA_\varphi,\ (\Phi^2/\psi)^{1/4})$.

3. *Статическое решение ОТТ.* В предлагаемой схеме решения достаточно обширного класса задач ОТТ независимому от остальных уравнению (17) отводится важная роль. Подстановкой $\sigma = \ln y$ оно сводится к двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta\sigma = 0. \tag{17б}$$

Симметрия задачи обуславливает выбор координат, в которых переменные разделяются. В рассматриваемом случае удобно пользоваться вытянутыми сфероидальными координатами [8, 9], которые связаны с каноническими z, ρ посредством

$$\binom{u}{v} = \frac{1}{2k}(r_+ \pm r_-),\quad r_\pm^2 = (z \pm k)^2 + \rho^2,$$

$$z = kuv,\quad \rho^2 = k^2(u^2 - 1)(1 - v^2),\quad k = \text{const},$$

$$\nabla = \frac{1}{k\,(u^2 - v^2)^{1/2}} \left| \hat{u}\,(u^2 - 1)^{1/2} \frac{\partial}{\partial u} + \hat{v}\,(1 - v^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial v} \right|,$$

$$\Delta = \frac{1}{k^2 (u^2 - v^2)} \left[\frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} (1 - v^2) \frac{\partial}{\partial v} \right]. \qquad (28)$$

Регулярное на оса $v = \pm 1$ решение уравнения (17б), с граничным условием $\sigma\,(u \to \infty,\, v) = 0$ есть

$$\sigma\,(u,\ v) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l Q_l\,(u)\, P_l\,(v), \qquad (29)$$

где P_l и Q_l — полиномы Лежандра 1-го и 2-го родов, $|u| > 1$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$.

Недавно авторами [10] было найдено решение статической задачи ОТТ с зарядом e ($\omega = A_\varphi = 0,\ A_t \neq 0$), которое можно записать в виде

$$ds^2 = g_{00}\, dt^2 - g_{11}\,(dx^1)^2 - g_{22}\,(dx^2)^2 - g_{33}\, d\varphi^2,$$

$$y = f_{x^1}^{-a/2\eta}, \quad g_{00} = f_{x^1}^{1/\eta}/F^2, \qquad (30)$$

$$g_{11} = \frac{f_{x^1}^{a/\eta}}{g_{00}} \left[\delta_{x^1 \bar{r}} + \delta_{x^1 x} + \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right) \delta_{x^1 R} + 4 r_0^2\, \delta_{x^1 u} \right], \qquad (31)$$

$$g_{22} = g_{11} \left\{ \left[\left(\bar{r} - \frac{a r_0}{\eta} \right)^2 - 4 r_0^2 \right] \delta_{x^1 \bar{r}} + x^2 f_x\, \delta_{x^1 x} + R^2\, \delta_{x^1 R} + \frac{u^2 - 1}{1 - v^2}\, \delta_{x^1 u} \right\}, \qquad (32)$$

$$g_{33} = g_{22} \sin^2 \theta\, [\delta_{x^1 \bar{r}} + \delta_{x^1 x} + \delta_{x^1 R} + (1 - v^2)\, \delta_{x^1 u}]. \qquad (33)$$

Здесь δ — символ Кронекера, $2r_0 = \eta \sqrt{m^2 - e^2}$,

$$2F = q + (2 - q)\, f_{x^1}^{(2-a)/2\eta}, \qquad (34)$$

$$q = 1 + \sqrt{1 + \eta^2 e^2/(2 - a)^2\, r_0^2}.$$

Значения f_{x^1} приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Координаты	Гармонические	Модифицированные кривизн	Однородные	Вытянутые сфероидальные
	$x_1 = \bar{r}$ $x^2 = \theta$	$x^1 = x =$ $= \bar{r} - \frac{a r_0}{\eta} + 2r_0$	$x^1 = R$ $x^2 = \theta$	$x^1 = u$ $x^2 = v = \cos\theta$
f_{x^1}	$\dfrac{\bar{r} - \frac{a r_0}{\eta} - 2r_0}{\bar{r} - \frac{a r_0}{\eta} + 2r_0}$	$1 - \dfrac{4r_0}{x}$	$\left(\dfrac{R - r_0}{R + r_0}\right)^2$	$\dfrac{u - 1}{u + 1}$

В координатах z, ρ

$$ds^2 = \frac{f_{\overline{R}}^{1/\eta}}{F^2}dt^2 - F^2 f_{\overline{R}}^{(a-1)/\eta}\left[\frac{\overline{R}^2 - 4r_0^2}{r_+ r_-}(dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\varphi^2\right],$$

$$y = f_{\overline{R}}^{-a/2\eta}, \quad f_{\overline{R}} = \frac{\overline{R} - 2r_0}{\overline{R} + 2r_0}, \tag{35}$$

$$\overline{R} = \frac{1}{2}(r_+ + r_-), \quad r_\pm^2 = (z \pm 2r_0)^2 + \rho^2.$$

Единственный неисчезающий компонент тензора электромагнитного поля

$$F_{(01)} = \frac{e}{x^2 F^2} f_x^{(1-a-\eta)/\eta}. \tag{36}$$

Координата x названа модифицированной координатой кривизн, так как в пределе $a \to 0$, $\eta \to 1$, т. е. в рамках ОТО, в отсутствие заряда ($2r_0 = m$) совпадает с координатой кривизн r.

Приведем также соотношения, связывающие «радиальные» части использованных координат,

$$\bar{r} = x + \frac{ar_0}{\eta} - 2r_0 = R\left(1 + \frac{ar_0}{\eta R} + r_0^2/R^2\right) = 2r_0\left(u + \frac{a}{2\eta}\right) = \overline{R} + \frac{ar_0}{\eta}. \tag{37}$$

Замечание 3.1. Покажем, как получить решение уравнения (16а). В сфероидальных координатах (28) переменные разделяются, если в (29) положить $a_{l>1} = 0$. Тогда (16а) сводится к двум уравнениям-гипергеометрическому, в точности совпадающему с уравнением (16а) работы [11], и уравнению Лежандра. Удовлетворяющее требованиям рабочего определения, данного в разделе 2, решение (16а) есть

$$x^1 = 2r_0\left(u + \frac{a}{2\eta}\right), \quad x^2 = v = \cos\theta.$$

Замечание 3.2. Выражение для действия ОТТ содержит по сравнению с действием ОТО лишь одну дополнительную константу ζ. Тогда как в решениях уравнений ОТТ (в частности в (30)) фигурируют постоянные a и η, связанные друг с другом и ζ посредством (см., например, [12])

$$\eta^2 = (a-1)^2 + a - \frac{1}{2}a^2\zeta.$$

Аналогичных констант нет в решениях ОТО. Ясно, поэтому, что должно существовать еще одно соотношение, связывающее ζ, a и η. С целью найти эту связь сравним, следуя Йордану [12], вытекающее из (30) на больших расстояниях

$$y \approx 1 + am/R$$

с решением уравнения для y в случае самогравитирующей пыли в том же приближении слабого поля, которое имеет вид

$$y \approx 1 + 2m/R\,(3-2\zeta),$$

что дает

$$a = 2/(3-2\zeta).$$

Таким образом, предельный переход от ОТТ к ОТО осуществляется $\zeta \to \infty$, что эквивалентно $a \to 0$ и одновременно $\eta \to 1$.

4. *Решение ОТО с зарядом.* Используя теорему 2.1, получим статическое аксисимметричное решение с зарядом в ОТО. В качестве исходного решения ОТТ возьмем (35). В соответствии с (27) определим предварительно Φ_y из уравнений (22) и (23). Нетрудно убедиться, что в данном случае

$$\Phi_y^{2(3-2\zeta)} = \left(\frac{\bar{R}^2 - k^2}{r_+ r_-}\right)^{1-n^2},$$

здесь вместо констант ОТТ $2r_0$ и $\dfrac{2-a}{2\eta}$ введены новые — k и n, соответственно. Тогда, согласно (27), решение ОТО можно записать в виде

$$g_{00}^{\text{ото}} = \frac{k^2 f_{\bar{R}}^n}{F^2} = \frac{\rho^2}{g_{33}^{\text{ото}}},\quad g_{11}^{\text{ото}} = g_{22}^{\text{ото}} = \frac{1}{g_{00}^{\text{ото}}}\left(\frac{\bar{R}^2 - k^2}{r_+ r_-}\right)^{n^2}, \tag{38}$$

где

$$f_{\bar{R}} = \frac{\bar{R} - k}{\bar{R} + k},\quad F = \frac{2r_0 + m}{2n}\left[1 + \frac{2r_0 - m}{2r_0 + m}\left(\frac{\bar{R} - k}{\bar{R} + k}\right)^n\right],$$

$$\bar{R} = \frac{1}{2}(r_+ + r_-),\quad r_\pm^2 = (z \pm k)^2 + \rho^2,\quad k = \frac{2r_0}{n} = \frac{\sqrt{m^2 - e^2}}{n}.$$

Электрическое поле

$$F_{(01)} = \frac{ek^2}{F^2(\bar{R}^2 - k^2)}\left(\frac{\bar{R} - k}{\bar{R} + k}\right)^n\left(\frac{\bar{R}^2 - k^2}{r_+ r_-}\right)^{(1-n^2)/2}. \tag{39}$$

В соответствующих аксисимметричному случаю $n \neq 1$ вытянутых сфероидальных координатах (28)

$$ds^2 = \frac{k^2}{F^2}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n dt^2 - F^2\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n \left[\left(\frac{u^2-1}{u^2-v^2}\right)^{n^2}(u^2-v^2)\left(\frac{du^2}{u^2-1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{dv^2}{1-v^2}\right)+(u^2-1)(1-v^2)\,d\varphi^2\right], \qquad (40)$$

$$F = \frac{2r_0+m}{2n}\left[1+\frac{2r_0-m}{2r_0+m}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n\right],$$

$$F_{(01)} = \frac{e}{F^2(u^2-1)}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n\left(\frac{u^2-1}{u^2-v^2}\right)^{(1-n^2)/2}.$$

При $n = 1$ решение совпадает с известным решением Райснера-Нордстрема, если иметь в виду, что $u(n=1) = u_0 = (r-m)/2r_0$, $v(n=1) = \cos\theta$. В отсутствие заряда ($e = 0$) решение совпадает с решением, найденным в [8, 9].

Для того, чтобы получить асимптотическое (на больших расстояниях) поведение найденной метрики, воспользуемся вытекающей из (28) связью

$$(2r_0)^2(u_0^2-1)\sin^2\theta = k^2(u^2-1)(1-v^2),$$

$$2r_0u_0\cos\theta = kuv.$$

Следовательно

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2k}\{(r-m)^2+k^2-4r_0^2\sin^2\theta\pm$$

$$\pm\sqrt{[(r-m)^2+k^2-4r_0^2\sin^2\theta]^2-4k^2(r-m)^2\cos^2\theta}\}^{1/2}.$$

Разложив g_{00} в ряд Тейлора, имеем

$$g_{00}\approx 1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}+\frac{Q}{r^3}P_2(\cos\theta)+0(1/r^4), \qquad (41)$$

где квадрупольный момент

$$Q = \frac{2}{3}\frac{(n^2-1)}{n^2}m(m^2-e^2)$$

Как и должно было быть, при $n = 1$ $Q = 0$.

Замечание 4.1. Покажем, как, пользуясь методом Эрнста [13, 14], в рассматриваемом электростатическом случае $\omega = A_\varphi = 0$ получить решение замкнутой системы полевых уравнений

$$\psi\Delta\psi = \nabla\psi\nabla\psi + 2\psi\nabla A_t\nabla A_t,$$

$$\psi\Delta A_t = \nabla\psi\nabla A_t.$$

Согласно Эрнсту

$$\psi = \frac{\xi_0^2 - 1}{(\xi_0 + 1/\sqrt{1-D^2})^2}, \quad A_t = \frac{D}{\sqrt{1-D^2}\,\xi_0 + 1},$$

D — константа, ξ_0 — решение уравнения Эрнста

$$(\xi_0^2 - 1)\,\Delta\xi_0 = 2\xi_0 \nabla\xi_0 \nabla\xi_0.$$

Легко убедиться, что потенциал

$$\xi_0 = \frac{(u+1)^n + (u-1)^n}{(u+1)^n - (u-1)^n}$$

удовлетворяет этому уравнению, поэтому

$$\psi = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n / F^2, \quad A_t = \frac{D(q-1)}{2F}\left[1 - \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n\right],$$

$$2F = q - (q-2)\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n, \quad q = 1 + 1/\sqrt{1-D^2}.$$

Константа D определяется асимптотикой ψ и оказывается равной $\frac{e}{m}$. Отметим, что $\xi_0 = u_0$ также удовлетворяет уравнению Эрнста и приводит к решению Райснер-Норстрема (u_0 — вытянутая сфероидальная координата, соответствующая сферически-симметричному случаю).

Мы благодарны участникам семинара кафедры теоретической физики Ереванского университета за полезные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

THE CHARGED AXISYMMETRIC SOLUTION IN GENERAL RELATIVITY

G. H. HA OUTYUNIAN, V. V. PAPOYAN

The possibility of the generation of GR's solutions from the known solutions of Generalized Theory of Gravitation and vice versa is proved. The electrovac solution of Einstein's equations for static axisymmetric gravitation field is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Г. Арутюнян, В. В. Папоян*, Астрофизика, 25, 217, 1986.
2. *С. Чандрасекар*, Математическая теория черных дыр, Мир, М., 1986.
3. *А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили*, ЭЧАЯ, 17, 5, 1986.
4. *Н. А. Черников*, ЭЧАЯ, 18, 1000, 1987.
5. *Н. А. Черников*, Сообщ. ОИЯИ Р2-86-207, Р2-86-478, 1986.
6. *В. А. Фок*, Теория пространства времени и тяготения, ГИТТЛ, М., 1955.
7. *А. Б. Борисов, В. И. Огиевецкий*, Препр. ОИЯИ, Е2-7864, Дубна, 1974.
8. *D. M. Zipoy*, J. Math. Phys., 7, 1137, 1966.
9. *B. H. Voorhees*, Phys. Rev., D2, 2119, 1970.
10. *Г. Г. Арутюнян, В. В. Папоян*, Астрофизика, 21, 587, 1984.
11. *Г. Г. Арутюнян, В. В. Папоян*, Астрофизика, 21, 175, 1984.
12. *P. Jordan*, Schwerkraft und Weltall, Braunschweig, 1955.
13. *F. J. Ernst*, Phys. Rev., 167, 1175, 1968.
14. *F. J. Ernst*, Phys. Rev., 168, 1415, 1968.