А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 30 АПРЕЛЬ, 1989 ВЫПУСК 2

УДК: 524.354.6:531.51

О ДЕЙСТВИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Л. Ш. ГРИГОРЯН

Поступила 23 марта 1988

Принята к печати 2 сентября 1988

С применением решения уравнений Эйнштейна вычислено суммарное действие $S_g + S_m$ гравитационного поля и материи для невращающейся сферически-симметричной нейтронной звезды. Рассмотрены три известных выражения для S_g в общей теории относительности (ОТО), отличающиеся друг от друга интегралом от дивергенции некоторой величины. Показано, что только при полевой формулировке ОТО, в основе которой лежит биметрический формализм, независимо от выбора системы координат, $S_g + S_m = -Mc^2\Delta\tau$ и функционал действия переходит в аналогичное выражение ньютоновской теории для слабого поля тяготения. M — масса звезды; $\Delta\tau$ — промежуток времени в удаленной системе отсчета, относительно которой звезда покоится.

1. *Введение.* В общей теории относительности используются следующие выражения для действия гравитационного поля:

$$S_\alpha = -\frac{c^3}{16\pi G}\begin{cases}\int R\sqrt{-g}\,d\Omega, & \alpha = 1,\\ \int g^{ik}\left(\Gamma^l_{in}\Gamma^n_{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^n_{ln}\right)\sqrt{-g}\,d\Omega, & \alpha = 2,\\ \int g^{ik}\left(\overline{\Gamma}^l_{in}\overline{\Gamma}^n_{kl} - \overline{\Gamma}^l_{ik}\overline{\Gamma}^n_{ln}\right)\sqrt{-g}\,d\Omega, & \alpha = 3,\end{cases} \tag{1}$$

R — скалярная кривизна пространства-времени, g_{ik} — его метрический тензор, а Γ^l_{ik} — символы Кристоффеля. В S_3 рассматривается также плоское пространство-время с квадратом интервала $ds_0^2 = \gamma_{ik}\,dx^i dx^k$ и символами Кристоффеля $\check{\Gamma}^l_{ik}$,

$$\overline{\Gamma}^l_{ik} = \frac{1}{2}g^{ln}\left(g_{nl|k} + g_{nk|l} - g_{ik|n}\right) = \Gamma^l_{ik} - \check{\Gamma}^l_{ik}, \tag{2}$$

вертикальная черта — операция ковариантного дифференцирования в плоском пространстве — времени. В [1—4] теория тяготения излагается с помощью S_1, S_2, а в [5—8] — с помощью S_3. Действия S_1, S_2, S_3 отличаются друг от друга интегралом от дивергенции некоторой функции, поэтому вариация $S_\sigma + S_m$ по g_{ik} приводит к уравнениям Эйнштейна независимо от вариантов $\sigma = 1, 2, 3$ (S_m — действие материи). Наиболее простым с математической точки зрения следует признать скаляр S_1, но он содержит вторые производные g_{ik}. Требованию, чтобы действие не содержало производных от g_{ik} выше первого порядка [2], удовлетворяет S_2, но оно не является скаляром. S_3 — скаляр и содержит производные не выше первого порядка, но S_3 строится с помощью двух метрических тензоров g_{ik} и γ_{ik}. Априори не ясно, какому из этих вариантов отдать предпочтение. В данной работе произвол устраняется условием (7).

2. *Действие гравитационного поля.* В специальной теории относительности в отсутствие полей действие частицы равно

$$S_m = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt, \tag{3}$$

m — масса частицы, а v — ее скорость. В общей теории относительности действие макроскопического протяженного тела получается из (3) ковариантным обобщением:

$$S_m = -\int \rho c \sqrt{-g}\, d\Omega, \tag{4}$$

ρc^2 — плотность энергии в собственной системе отсчета. Для частицы, движущейся в пустом пространстве, $\rho = m\delta(\vec{x})$, где $x^0 = c\tau$, $\vec{x}$ — декартовые координаты в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета, поэтому из (4) следует

$$S_m = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{x})\, dV = -mc^2(\tau_2 - \tau_1) = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

(τ — собственное время частицы). Укажем также, что в случае сплошной среды, варьируя (4) по метрике, приходим [1, 4] к результату

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega, \tag{5}$$

где

$$T_{ik} = (\rho c^2 + P) u_i u_k - P g_{ik}, \tag{6}$$

P — давление, а u_i — 4-скорость вещества.

Теперь рассмотрим статическое сферически-симметрическое распределение гравитирующих масс. Для определенности будем иметь в виду нейтронную звезду. Неоднозначность в выборе действия можно устранить накладывая дополнительное условие. Так, для бесконечно удаленного наблюдателя в инерциальной системе отсчета звезда представляет собой пробное тело, поэтому естественно потребовать, чтобы полное действие, как и в (3), равнялось

$$S_g + S_m = -M_i c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t.$$

Здесь v — скорость звезды относительно наблюдателя, а M_i — инертная масса. Принцип эквивалентности утверждает, что M_i совпадает с тяготеющей массой M, поэтому

$$S_g + S_m = -Mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t = -Mc^2 \Delta\tau, \qquad (7)$$

где $\Delta\tau$ — промежуток времени в удаленной системе отсчета, относительно которой звезда покоится. Используя уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \qquad (8)$$

вычислим $S_g + S_m$ по формулам (1), (4) и сравним результат с (7).

В статическом сферически-симметрическом случае квадрат интервала можно представить в виде

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = e^\nu c^2 d\tau^2 - e^\lambda dr^2 - e^\mu r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (9)$$

(начало сферической системы координат расположено в центре небесного тела). Две из трех функций $\nu(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$ определяются уравнениями (8), тогда как третья — остается произвольной. Она фиксируется выбором (арифметизацией) радиальной координаты r. Внутри распределения масс (8) решается численно [3, 4, 9, 10], а при $r > r_1$ (r_1 — радиус звезды) имеем [1—4]

$$e^\nu = 1 - \frac{r_g}{\eta(r)}, \qquad e^\lambda = \frac{(d\eta/dr)^2}{1 - r_g/\eta}, \qquad e^\mu = \frac{\eta^2}{r^2}, \qquad (10)$$

$r_g = 2GM/c^2$, а $\eta(r)$ — некоторая функция, определяемая выбором радиальной координаты ($\eta/r \to 1$, когда $r \to \infty$). При $\eta = r$ (10) переходит в решение Шварцшильда. Используя (1), (4), (6), (8), а также формулу

$$Mc^2 = \int (\rho c^2 + 3P) \sqrt{-g} d^3\Omega,$$

справедливую для постоянного гравитационного поля [2], простыми преобразованиями находим

$$S_1 + S_m = -\frac{1}{2} Mc^2\Delta\tau \tag{11}$$

(см. [11, 12]), что не согласуется с (7).

Перейдем к вычислению $S_2 + S_m$. Имея в виду (11) и соотношение

$$\begin{gathered} R\sqrt{-g} = g^{ik}(\Gamma^l_{in}\Gamma^n_{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^n_{ln})\sqrt{-g} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\omega^l)}{\partial x^l}, \\ \omega^l = g^{ik}\Gamma^l_{ik} - g^{il}\Gamma^k_{ik}, \end{gathered} \tag{12}$$

находим

$$S_2 + S_m = -\frac{1}{2} Mc^2\Delta\tau + \frac{c^3}{16\pi G}\int \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\omega^l)}{\partial x^l}\, d\Omega. \tag{13}$$

Сначала рассмотрим «декартовую» систему координат $c\tau$, x, y, z:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta. \tag{14}$$

Соответствующий квадрат интервала

$$ds^2 = e^{\nu}c^2d\tau^2 - (e^{\lambda} - e^{\mu})\frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{x^2 + y^2 + z^2} - e^{\mu}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{15}$$

получается подстановкой (14) в (9). Для метрики, определяемой (15), имеем

$$\sqrt{-g}\,\omega^l = \left[\nu' + 2\mu' + \frac{2}{r}(1 - e^{\lambda-\mu})\right] e^{(\nu-\lambda+2\mu)/2}\, n^l, \tag{16}$$

где штрих — производная по r, а $rn^l = (0, x, y, z)$. Теперь подставим (16) в (13) и выполним интегрирование с учетом (10). В результате придем к равенству

$$S_2[x, y, z] + S_m = -Mc^2\Delta\tau \tag{17}$$

(для случая $\lambda=\mu$ оно доказано в [12]), которое совпадает с (7). В сферической же системе координат с квадратом интервала (9) имеем

$$\sqrt{-g}\,\omega^l = (0,\ h^{(1)},\ h^{(2)},\ 0), \tag{18}$$

где

$$h^{(1)} = [(\nu' + 2\mu')\, r^2 + 4r]\, e^{(\nu-\lambda+2\mu)/2}\sin\theta, \qquad h^{(2)} = 2e^{(\nu+\lambda)/2}\cos\theta.$$

Подставляя это выражение в (13) и вновь интегрируя с учетом (10), получаем

$$S_2[r, \theta, \varphi] + S_m = \left|(a-2)Mc^2 + A + \frac{c^4}{2G}\lim_{r\to\infty} r\right|\Delta\tau = \infty, \tag{19}$$

где a — постоянная, фигурирующая в разложении

$$\eta(r) = r + \frac{1}{2}ar_g + b\frac{r_g^2}{r} + \cdots, \tag{20}$$

справедливом на больших расстояниях от небесного тела,

$$A = \frac{c^4}{2G}\int_0^\infty [1 - e^{(\nu+\lambda)/2}]\,dr$$

— конечная величина. Как видим, в произвольной (не декартовой) системе координат S_2+S_m не совпадает с (7). Это связано с тем, что S_2+S_m не является скаляром.

Обратимся к S_3+S_m. Здесь также удобно начать с рассмотрения декартовой системы координат (14). При этом квадрату интервала

$$ds_0^2 = \gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k = c^2d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{21}$$

для плоского пространства — времени соответствует (15), а $\overset{\vee}{\Gamma}{}^l_{ik} = 0$, поэтому из (1), (2), (17) находим

$$S_3 + S_m = S_2[x, y, z] + S_m = -Mc^2\Delta\tau. \tag{22}$$

(S_3+S_m) — скаляр, следовательно и в произвольной системе координат $S_3+S_m = -Mc^2\Delta\tau$. В этом можно убедиться непосредственным расчетом, например, в сферической системе координат. Заметим, что на больших расстояниях от небесного тела $ds \approx ds_0$.

Таким образом, из трех выражений для действия гравитационного поля условию (7) удовлетворяет только S_3. Ниже будем полагать

$$S_3 \equiv S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\int g^{ik}(\overline{\Gamma}{}^l_{in}\overline{\Gamma}{}^n_{kl} - \overline{\Gamma}{}^l_{ik}\overline{\Gamma}{}^n_{ln})\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{23}$$

3. *О связи между двумя метриками.* Квадрату интервала

$$ds_0^2 = c^2d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{24}$$

соответствует (9) для искривленного пространства — времени. Как уже отмечалось, вне небесного тела ν, λ, μ определяются выражениями (10), где функция $\eta(r)$ не определена (в (20) коэффициенты a, b ... не известны). Это обусловлено тем, что γ_{ik} не входит в уравнения Эйнштейна. Покажем, что постоянную a в (20) можно определить из требования соответствия с ньютоновской теорией тяготения.

Для метрик, определяемых выражениями (9) и (24), находим

$$g^{ik}(\overline{\Gamma}^l_{in}\overline{\Gamma}^n_{kl}-\overline{\Gamma}^l_{ik}\overline{\Gamma}^n_{ln})=\frac{1}{r}(\nu'+\lambda')(e^{-\mu}-e^{-\lambda})-\mu'\left(\nu'+\frac{1}{2}\mu'\right)e^{-\lambda}. \quad (25)$$

Из (10) и (20) следует, что для слабого гравитационного поля

$$\nu\approx-\lambda\approx\frac{2\psi}{c^2},\quad \mu=-\frac{2a\psi}{c^2} \quad (26)$$

(ψ — ньютоновский потенциал). Подставив (25), (26) в (23), получаем

$$S_g\approx-a(2-a)\frac{\Delta\tau}{8\pi G}\int\psi'^2\,dV,\qquad dV=4\pi r^2dr. \quad (27)$$

В (26) $|\psi|\ll c^2$, поэтому слабое гравитационное поле можно рассматривать как возмущение метрики плоского пространства — времени: $g^{ik}=\gamma^{ik}+\delta g^{ik}$. Подставив сюда g^{ik} и γ^{ik}, определяемые интервалами (9) и (24), в первом порядке по малым функциям ν, λ и μ получаем

$$\gamma_{00}\delta g^{00}=-\nu,\quad \gamma_{11}\delta g^{11}=-\lambda,\quad \gamma_{22}\delta g^{22}=\gamma_{33}\delta g^{33}=-\mu.$$

Теперь с помощью (5) и (6) находим

$$S_m(\psi)+M_0c^2\Delta\tau\approx\frac{1}{2c}\int[-\nu\rho c^2+(\lambda+2\mu)P]\sqrt{-\gamma}\,d\Omega\approx-\Delta\tau\int\rho\psi\,dV,$$

откуда

$$S_m\approx-\left(M_0c^2+\int\rho\psi\,dV\right)\Delta\tau, \quad (28)$$

где $M_0=\int\rho\,dV$ — масса тяготеющего тела. Как видим, полное действие S_g+S_m переходит в соответствующее выражение ньютоновской теории (статическое сферически-симметрическое поле тяготения) только при $a=1$. С учетом (26) для (9) приходим к результату

$$ds^2\approx\left(1+\frac{2\psi}{c^2}\right)c^2d\tau^2-\left(1-\frac{2\psi}{c^2}\right)[dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (29)$$

Что касается параметра b в разложении (20), в принципе, его можно определить из анализа пост-ньютоновских эффектов теории гравитации. Подставив (10) и (20) в (9), получим

$$ds^2\approx\left(1-\frac{r_g}{r}+\frac{r_g^2}{2r^2}\right)c^2d\tau^2-\left(1+\frac{r_g}{r}+\omega_1\frac{r_g^2}{r^2}\right)dr^2-$$

$$-\left(1+\frac{r_g}{r}+\omega_2\frac{r_g^2}{r^2}\right)r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \quad (30)$$

на больших расстояниях от небесного тела, $\omega_1=(1-4b)/2$, $\omega_2=(1+8b)/4$. Это выражение согласуется с имеющимися данными [3] о пост-ньютоновских эффектах в окрестности солнечной системы. Однако на сегодня нет данных, необходимых для вычисления b. В [6] приведены аргументы, согласно которым связь ds с ds_0 определяется уравнением

$$\left(\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, g^{ik}\right)_{;k} = 0. \tag{31}$$

(см. также [1]). Вне небесного тела решение (31) известно [1, 6]:

$$\eta + \sigma\left[1 + \left(\frac{\eta}{r_g} - \frac{1}{2}\right)\ln\left|1 - \frac{r_g}{\eta}\right|\right] = r + \frac{1}{2} r_g, \tag{32}$$

где σ, в конечном счете, определяется давлением в центре нейтронной звезды [13]. Из сравнения (32) с (20) следует $a=1$, $b=0$.

В заключение вернемся к (29). В декартовой системе координат

$$ds^2 \approx \left(1 + \frac{2\psi}{c^2}\right) c^2 d\tau^2 - \left(1 - \frac{2\psi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{33}$$

Как уже отмечалось, $S_2\,[x,\ y,\ z] = S_g$, поэтому для интервала (33) S_2 также согласуется с действием ньютоновской теории. В [2] задача о предельном переходе решена именно в такой системе координат в предположении, что действие гравитационного поля равно S_2. Однако в сферической системе координат S_2 расходится (см. (19)).

Автор признателен академику АН Арм.ССР Г. С. Саакяну, а также участникам семинаров ИППФ АН Арм.ССР и кафедры теоретической физики ЕГУ за ценные обсуждения работы.

Институт прикладных проблем
физики АН Арм.ССР

ON GRAVITATIONAL FIELD ACTION

L. Sh. GRIGORIAN

Solutions of the Einstein equations are used to calculate the sum of actions $S_g + S_m$ of the gravitational field and the matter for a nonrotating spherically symmetric neutron star. Three expressions for S_g, well known in the theory of general relativity (GR) and differing from each other in the integral with respect to the divergence of a certain value are considered. Independently of the selected system of axes it is shown that $S_g + S_m = -Mc^2\Delta\tau$ and that the action functional is

transformed into a similar expression of the Newton theory for a weak gravitational field only in case of the field-theoretical formulation of GR based on the bimetric approach. M is the star mass and $\Delta\tau$ is the time interval in the remote system of reference relative to which the star is at rest.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Фок*, Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, М., 1961.
2. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1973.
3. *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер*, Гравитация, Мир, М., 1977.
4. *Г. С. Саакян*, Пространство — время и гравитация, Изд. Ереванского ун-та, Ереван, 1985.
5. *N. Rosen*, The III International School of Cosmology and Gravitation, Erice, 8–20 May, 1974, p. 2—40.
6. *А. А. Логунов*, Лекции по теории относительности и гравитации, Наука, М., 1987.
7. *Я. Б. Зельдович, Л. П. Грищук*, Успехи физ. наук, 149, 695, 1986.
8. *Н. А. Черников*, Вариационный метод Гильберта и тензор Папапетру, Препр. ОИЯИ, Р2-87-683, 1987.
9. *Г. С. Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
10. *L. Sh. Grigorian, G. S. Sahakian*, Astrophys. and Space Sci., 95, 305, 1983.
11. *Н. В. Мицкевич*, Физические поля в общей теории относительности, Наука, М., 1969.
12. *М. Е. Герценштейн, А. Г. Соловей*, Изв. вузов, Физика, 30, № 9, 74, 1987.
13. *Р. М. Авакян*, Тезисы докл. II Всесоюзн. научн. семинара, Изд. Тартуского ун-та, Тарту, 1988, стр. 22.