А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 30 | ФЕВРАЛЬ, 1989 | ВЫПУСК 1

УДК: 524.4:521.19:517.537.6

ПРОБЛЕМА ДИРИХЛЕ В ЗВЕЗДНОЙ ДИНАМИКЕ. III. ДВИЖЕНИЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Б. П. КОНДРАТЬЕВ

Поступила 15 декабря 1987
Принята к печати 13 июля 1988

Сделан анализ некоторых принципиальных трудностей, возникающих в проблеме при переходе к стационарным состояниям. Группа из шести уравнений, определяющих зависимость от времени компонентов тензора дисперсии скоростей, объединена в одно линейное дифференциальное уравнение для матрицы этого тензора. С его помощью выведено специальное дифференциальное уравнение для определителя матрицы дисперсии скоростей. Доказано, что третий фазовый инвариант является интегралом только данного уравнения. В шестимерном фазовом пространстве рассматриваются тензорный эллипсоид матрицы моментов второго порядка и обратный ему, названный фазовым эллипсоидом модели. Фазовый эллипсоид стационарной модели имеет физический смысл только в вырожденном пятимерном состоянии. Указанное вырождение приводит к особой прямой и к сокращению у моделей числа свободных параметров с трех до двух.

1. *Введение.* Развитый в работах [1—3] новый подход к исследованию движения, равновесия и устойчивости однородного гравитирующего бесстолкновительного эллипсоида пока не привел к логически удовлетворительной теории равновесных конфигураций. Напомним, что в общем случае движение однородного нестационарного эллипсоида описывается замкнутой системой из пятнадцати временных автономных дифференциальных уравнений. Девять из них выводятся с помощью первого и второго моментных уравнений от кинетического уравнения Больцмана; эту группу можно представить здесь тремя уравнениями:

$$\ddot{a}_1 - a_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2) + 2(a_3\lambda_2\Omega_2 + a_2\lambda_3\Omega_3) + 2A_1a_1 - \frac{2\sigma_{11}^0}{a_1} = 0, \quad (1)$$

$$2\frac{d}{dt}(a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3) - a_1\dot{\lambda}_3 + a_2\dot{\Omega}_3 + a_1\lambda_1\lambda_2 + a_2\Omega_1\Omega_2 - 2a_2\lambda_1\Omega_2 - \frac{2\sigma_{12}^0}{a_2} = 0, \quad (2)$$

$$2\frac{d}{dt}(a_3\Omega_2 - a_1\lambda_2) - a_3\dot{\Omega}_2 + c_1\dot{\lambda}_2 + a_1\lambda_1\lambda_3 + a_3\Omega_1\Omega_3 - 2c_2\lambda_1\Omega_3 - \frac{2\sigma_{13}^0}{a_3} = 0, \quad (3)$$

так как остальные восстанавливаются из данных круговой перестановкой индексов. Вторая группа из шести уравнений описывает поведение компонентов дисперсии скоростей. Эти уравнения получены с помощью моментного уравнения третьего порядка при необходимом условии равенства нулю всех моментов третьего порядка от фазовой плотности. Всю группу здесь целесообразно выписать полностью:

$$
\begin{aligned}
&\dot\sigma^0_{11} + 2\left| \frac{\dot a_1}{a_1}\sigma^0_{11} + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - 2\Omega_3\right)\sigma^0_{12} + \left(-\frac{a_1}{a_3}\lambda_2 + 2\Omega_2\right)\sigma^0_{13}\right| = 0,\\
&\dot\sigma^0_{22} + 2\left| \frac{\dot a_2}{a_2}\sigma^0_{22} + \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda_3 + 2\Omega_3\right)\sigma^0_{12} + \left(\frac{a_2}{a_3}\lambda_1 - 2\Omega_1\right)\sigma^0_{23}\right| = 0,\\
&\dot\sigma^0_{33} + 2\left| \frac{\dot a_3}{a_3}\sigma^0_{33} + \left(-\frac{a_3}{a_2}\lambda_1 + 2\Omega_1\right)\sigma^0_{23} + \left(\frac{a_3}{a_1}\lambda_2 - 2\Omega_2\right)\sigma^0_{13}\right| = 0;
\end{aligned}
\tag{4}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\dot\sigma^0_{12} + \left(\frac{\dot a_1}{a_1} + \frac{\dot a_2}{a_2}\right)\sigma^0_{12} + \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda_3 + 2\Omega_3\right)\sigma^0_{11} + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - 2\Omega_3\right)\sigma^0_{22} + \\
&\qquad + \left(-\frac{a_1}{a_3}\lambda_2 + 2\Omega_2\right)\sigma^0_{23} + \left(\frac{a_2}{a_3}\lambda_1 - 2\Omega_1\right)\sigma^0_{13} = 0,\\
&\dot\sigma^0_{23} + \left(\frac{\dot a_2}{a_2} + \frac{\dot a_3}{a_3}\right)\sigma^0_{23} + \left(-\frac{a_3}{a_2}\lambda_1 + 2\Omega_1\right)\sigma^0_{22} + \left(\frac{a_2}{a_3}\lambda_1 - 2\Omega_1\right)\sigma^0_{33} + \\
&\qquad + \left(\frac{a_3}{a_1}\lambda_2 - 2\Omega_2\right)\sigma^0_{12} + \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda_3 + 2\Omega_3\right)\sigma^0_{13} = 0,\\
&\dot\sigma^0_{13} + \left(\frac{\dot a_1}{a_1} + \frac{\dot a_3}{a_3}\right)\sigma^0_{13} + \left(\frac{a_3}{a_1}\lambda_2 - 2\Omega_2\right)\sigma^0_{11} + \left(-\frac{a_1}{a_3}\lambda_2 + 2\Omega_2\right)\sigma^0_{33} + \\
&\qquad + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - 2\Omega_3\right)\sigma^0_{23} + \left(-\frac{a_3}{a_2}\lambda_1 + 2\Omega_1\right)\sigma^0_{12} = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

При переходе к стационарным моделям производные в (1)—(5) исчезают и векторы $\vec\Omega$ и $\vec\lambda$ могут протыкать фитуру эллипсоида только в тех геометрических местах, которые образованы главными сечениями. Поэтому у стационарного (как жидкого, так и бесстолкновительного!) эллипсоида с наклонным относительно главных осей положением вектора $\vec\Omega$ одна пара компонентов (Ω_i, λ_i) должна быть равна нулю. В случае эллипсоида, вращающегося вокруг оси симметрии, две пары данных компонентов равны нулю. От (1)—(5) остается семь (четыре) уравнений равновесия, соответственно для десяти (семи) неизвестных, так что эллипсоидальные модели, согласно этой логике, должны располагать тремя свободными параметрами.

Но, как известно из статей [4] и [5], при кинетическом методе построения аналогичных бесстолкновительных эллипсоидов модели имеют не три, а два свободных параметра. Этот факт указывает на необходимость серьезного анализа вопроса о числе свободных параметров.

При построении моделей кинетическим способом контроль физической разумности полученных решений прост: неотрицательность фазовой функции. Как установил Хантер [6], именно этот критерий накладывает на эллипсоид Фримана [4] дополнительное ограничение*

$$\Omega^2 = 2A_1 \tag{6}$$

(a_3—ось вращения, $a_1 \geqslant a_2$). В модели с условием (6) сила тяготения вдоль оси a_1 полностью уравновешена центробежной силой; в конечном итоге это и делает модель двухпараметрической. Подобные же проблемы пришлось решать автору этой статьи при создании весьма непростой модели эллипсоида с наклонным вращением [5]. Физическая разумность этой модели обеспечивалась введением в нее так называемой особой прямой. В каждой точке особой прямой существует строгий баланс между гравитационной и центробежной силами, для чего должно выполняться условие

$$\frac{\Omega_2^2}{2A_3} + \frac{\Omega_3^2}{2A_2} = 1. \tag{7}$$

Введение особой прямой также приводит к двухпараметрической модели.

Уменьшение числа параметров моделей с кинетической точки зрения напрямую связано с глубокими ограничениями на фазовую плотность**. Игнорирование этого условия и проявило себя в статье [2], где особая прямая была введена не согласно логике исходных уравнений (1)—(5), а только по аналогии, учитывая опыт введения этой прямой в статье [5]. Ясно, что полная гидродинамическая теория в подобных ad hoc подпорках не должна нуждаться.

В данной статье произведен строгий анализ уравнений (1)—(5) и логическая незавершенность теории в применении ее к стационарным фигурам устранена. В разделе 4 уравнения (4)—(5) представлены в предельно краткой изящной форме линейного дифференциального матричного уравнения, что позволит в разделе 5 доказать одно замечательное равенство для определителя матрицы тензора дисперсии скоростей. В результате выясняется, что из трех фазовых инвариантов бесстолкновительного эллипсоида один является особым, так как он оказывается интегралом не всей системы (1)—(5), а лишь шести уравнений (4)—(5). Именно осо-

* Сам Фриман никак не аргументировал введенного им условия (6).

** Это относится только к эллипсоидам. Двумерные модели в особой прямой не нуждаются.

бый характер третьего фазового инварианта позволяет, как мы увидим далее, обратиться ему в нуль без дополнительного требования уменьшения числа независимых уравнений равновесия. В разделе 6 нестационарная модель представлена эллипсоидом в шестимерном фазовом пространстве. В разделе 7 доказано, что при переходе к стационарным состояниям шестимерный фазовый эллипсоид вырождается в пятимерный, что и делает модели двухпараметрическими. Как и следовало ожидать, фазовое вырождение прямо связано с появлением в эллипсоидах особой прямой.

2. *О вырожденности тензора дисперсии скоростей в кинетических моделях с особой прямой.* Существование в бесстолкновительных эллипсоидах особой прямой сопряжено с вырождением матрицы тензора дисперсии скоростей: эллипсоид дисперсии скоростей вырождается в плоский эллипс. Эллипс этот расположен нормально к особой прямой. Это важное свойство доказано в статьях [4, 5]. Так, в модели [4] при условии (6) обращается в нуль компонент дисперсии σ_{11}^0, в модели с наклонным вращением [5] при условии (7) выполняется

$$\begin{vmatrix} \sigma_{22}^0 & \sigma_{23}^0 \\ \sigma_{23}^0 & \sigma_{33}^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

В последней статье также доказано, что одновременно с введением в модель особой прямой для частиц будет существовать линейный по скоростям и координатам интеграл движения,

$$x_1 + \frac{\Omega_3}{4A_2}\dot{x}_2 - \frac{\Omega_2}{4A_3}\dot{x}_3 = 0. \tag{9}$$

3. *Уравнение для матрицы тензора дисперсии скоростей.* Вернемся к нестационарным уравнениям (4)—(5) и запишем симметрическую матрицу тензора дисперсии скоростей

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^0 & \sigma_{12}^0 & \sigma_{13}^0 \\ \sigma_{12}^0 & \sigma_{22}^0 & \sigma_{23}^0 \\ \sigma_{13}^0 & \sigma_{23}^0 & \sigma_{33}^0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Вводим также вспомогательную матрицу вида

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{a}_1}{a_1} & \frac{a_2}{a_1}\lambda_3 - 2\Omega_3 & -\frac{a_3}{a_1}\lambda_2 + 2\Omega_2 \\ -\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 + 2\Omega_3 & -\frac{\dot{a}_2}{a_2} & \frac{a_3}{a_2}\lambda_1 - 2\Omega_1 \\ \frac{a_1}{a_3}\lambda_2 - 2\Omega_2 & -\frac{a_2}{a_3}\lambda_1 + 2\Omega_1 & -\frac{\dot{a}_3}{a_3} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Тогда все шесть довольно громоздких уравнений (4)—(5) можно представить в изящной форме линейного дифференциального уравнения для матрицы (10)

$$\frac{d\sigma^0}{dt} = \sigma^0 H + H'\sigma^0. \tag{12}$$

В правой части этого уравнения два произведения введенных матриц (произведения не коммутативны), где H' — транспонированная матрица H. Всегда, когда возможна матричная запись дифференциальных уравнений, это говорит о присущей им внутренней симметрии и позволяет элементарным способом получить важные выводы. Убедимся в этом.

4. *Интеграл матричного уравнения.*

Теорема 1. При условиях, когда матрица σ^0 удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (12), определитель этой матрицы $|\sigma^0|$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dt}|\sigma^0| = -2\left(\frac{\dot a_1}{a_1} + \frac{\dot a_2}{a_2} + \frac{\dot a_3}{a_3}\right)\cdot|\sigma^0|. \tag{13}$$

Доказательство. Очевидно,

$$\frac{d}{dt}|\sigma^0| = \begin{vmatrix} \dot\sigma^0_{11} & \dot\sigma^0_{12} & \dot\sigma^0_{13} \\ \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22} & \sigma^0_{23} \\ \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23} & \sigma^0_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma^0_{11} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{13} \\ \dot\sigma^0_{12} & \dot\sigma^0_{22} & \dot\sigma^0_{23} \\ \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23} & \sigma^0_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma^0_{11} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{13} \\ \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22} & \sigma^0_{23} \\ \dot\sigma^0_{13} & \dot\sigma^0_{23} & \dot\sigma^0_{33} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

В определители вместо производных $\dot\sigma^0_{ij}$ будем подставлять соответствующие им из (12) выражения. В силу того, что правая часть (12) состоит из суммы двух произведений матриц, нам будет удобно учитывать вклад каждого из них отдельно.

Сравнительно просто оценить вклад от произведения $H'\sigma^0$, где

$$c_{ij} = H'\sigma^0 = H'_{ik}\sigma^0_{kj} = H_{ki}\sigma^0_{kj}. \tag{15}$$

Подставляя выражения c_{ij} из (15) в первую строку определителя из (14) на место производных $\dot\sigma^0_{1j}$, находим

$$\begin{vmatrix} H_{11}\sigma^0_{11}+H_{21}\sigma^0_{12}+H_{31}\sigma^0_{13} & H_{11}\sigma^0_{12}+H_{21}\sigma^0_{22}+H_{31}\sigma^0_{23} & H_{11}\sigma^0_{13}+H_{21}\sigma^0_{23}+H_{31}\sigma^0_{33} \\ \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22} & \sigma^0_{23} \\ \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23} & \sigma^0_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= H_{11}\cdot\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11} & \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ \overset{0}{\sigma}_{13} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогично находим второй и третий определители в правой части (14). В итоге вклад члена $H'\sigma_0$ оказывается равным*

$$(H_{11}+H_{22}+H_{33})\cdot\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11} & \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ \overset{0}{\sigma}_{13} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix}. \qquad (16)$$

Сложнее найти вклад в производную (13) от другого члена $\sigma^0 H$. Рассмотрим вначале первый определитель в правой части [14]. Заменяя в нем производные $\overset{0}{\sigma}_{1j}$ членами первой строки произведения матриц $\sigma^0 H$, после транспонирования и элементарных преобразований имеем

$$\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{1k}H_{k1} & \overset{0}{\sigma}_{1k}H_{k2} & \overset{0}{\sigma}_{1k}H_{k3} \\ \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ \overset{0}{\sigma}_{13} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11}H_{11}+\overset{0}{\sigma}_{12}H_{21}+\overset{0}{\sigma}_{13}H_{31} & \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ \overset{0}{\sigma}_{11}H_{12}+\overset{0}{\sigma}_{12}H_{22}+\overset{0}{\sigma}_{13}H_{32} & \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ \overset{0}{\sigma}_{11}H_{13}+\overset{0}{\sigma}_{12}H_{23}+\overset{0}{\sigma}_{13}H_{33} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \overset{0}{\sigma}_{11}\begin{vmatrix} H_{11} & \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ H_{12} & \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ H_{13} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix} + \overset{0}{\sigma}_{12}\begin{vmatrix} H_{21} & \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ H_{22} & \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ H_{23} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix} + \overset{0}{\sigma}_{13}\begin{vmatrix} H_{31} & \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ H_{32} & \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ H_{33} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Аналогичные преобразования над другими определителями из (14) дают

$$\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11} & \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ \overset{0}{\sigma}_{2k}H_{k1} & \overset{0}{\sigma}_{2k}H_{k2} & \overset{0}{\sigma}_{2k}H_{k3} \\ \overset{0}{\sigma}_{13} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix} = \overset{0}{\sigma}_{12}\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11} & H_{11} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ \overset{0}{\sigma}_{12} & H_{12} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ \overset{0}{\sigma}_{13} & H_{13} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix} + \overset{0}{\sigma}_{22}\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11} & H_{21} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ \overset{0}{\sigma}_{12} & H_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ \overset{0}{\sigma}_{13} & H_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \overset{0}{\sigma}_{23}\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11} & H_{31} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ \overset{0}{\sigma}_{12} & H_{32} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ \overset{0}{\sigma}_{13} & H_{33} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix}; \qquad (18)$$

$$\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11} & \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ \overset{0}{\sigma}_{3k}H_{k1} & \overset{0}{\sigma}_{3k}H_{k2} & \overset{0}{\sigma}_{3k}H_{k3} \end{vmatrix} = \overset{0}{\sigma}_{13}\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11} & \overset{0}{\sigma}_{12} & H_{11} \\ \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{22} & H_{12} \\ \overset{0}{\sigma}_{13} & \overset{0}{\sigma}_{23} & H_{13} \end{vmatrix} +$$

* Доказано известное в теории матриц равенство Якоби.

$$+\sigma^0_{23}\begin{vmatrix}\sigma^0_{11} & \sigma^0_{12} & H_{21}\\ \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22} & H_{22}\\ \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23} & H_{23}\end{vmatrix}+\sigma^0_{33}\begin{vmatrix}\sigma^0_{11} & \sigma^0_{12} & H_{31}\\ \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22} & H_{32}\\ \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23} & H_{33}\end{vmatrix}. \tag{19}$$

Собирая в (17)—(19) тройки определителей с одинаковыми столбцами из коэффициентов матрицы H имеем, например:

$$\sigma^0_{11}\begin{vmatrix}H_{11} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{13}\\ H_{12} & \sigma^0_{22} & \sigma^0_{23}\\ H_{13} & \sigma^0_{23} & \sigma^0_{33}\end{vmatrix}-\sigma^0_{12}\begin{vmatrix}H_{11} & \sigma^0_{11} & \sigma^0_{13}\\ H_{12} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{23}\\ H_{13} & \sigma^0_{13} & \sigma^0_{33}\end{vmatrix}+\sigma^0_{13}\begin{vmatrix}H_{11} & \sigma^0_{11} & \sigma^0_{12}\\ H_{12} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22}\\ H_{13} & \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23}\end{vmatrix}=$$

$$=H_{11}\begin{vmatrix}\sigma^0_{11} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{13}\\ \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22} & \sigma^0_{23}\\ \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23} & \sigma^0_{33}\end{vmatrix}+\left\{\sigma^0_{11}\begin{vmatrix}0 & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{13}\\ H_{12} & \sigma^0_{22} & \sigma^0_{23}\\ H_{13} & \sigma^0_{23} & \sigma^0_{33}\end{vmatrix}+\sigma^0_{23}\begin{vmatrix}0 & \sigma^0_{11} & \sigma^0_{12}\\ H_{12} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22}\\ H_{13} & \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23}\end{vmatrix}-\sigma^0_{12}\begin{vmatrix}0 & \sigma^0_{11} & \sigma^0_{13}\\ H_{12} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{23}\\ H_{13} & \sigma^0_{13} & \sigma^0_{33}\end{vmatrix}\right\}. \tag{20}$$

Определители в фигурной скобке в сумме дают нуль, так что остается только первый член $H_{11}|\sigma^0|$. Аналогично, от следующей тройки определителей

$$\sigma^0_{12}\begin{vmatrix}H_{21} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{13}\\ H_{22} & \sigma^0_{22} & \sigma^0_{23}\\ H_{23} & \sigma^0_{23} & \sigma^0_{33}\end{vmatrix}-\sigma^0_{22}\begin{vmatrix}H_{21} & \sigma^0_{11} & \sigma^0_{13}\\ H_{22} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{23}\\ H_{23} & \sigma^0_{13} & \sigma^0_{33}\end{vmatrix}+\sigma^0_{23}\begin{vmatrix}H_{21} & \sigma^0_{11} & \sigma^0_{12}\\ H_{22} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22}\\ H_{23} & \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23}\end{vmatrix}=$$

$$=H_{22}\begin{vmatrix}\sigma^0_{11} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{13}\\ \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22} & \sigma^0_{23}\\ \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23} & \sigma^0_{33}\end{vmatrix}+\left\{\sigma^0_{12}\begin{vmatrix}H_{21} & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{13}\\ 0 & \sigma^0_{22} & \sigma^0_{23}\\ H_{23} & \sigma^0_{23} & \sigma^0_{33}\end{vmatrix}-\sigma^0_{22}\begin{vmatrix}H_{21} & \sigma^0_{11} & \sigma^0_{13}\\ 0 & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{23}\\ H_{23} & \sigma^0_{13} & \sigma^0_{33}\end{vmatrix}+\sigma^0_{23}\begin{vmatrix}H_{21} & \sigma^0_{11} & \sigma^0_{12}\\ 0 & \sigma^0_{12} & \sigma^0_{22}\\ H_{23} & \sigma^0_{13} & \sigma^0_{23}\end{vmatrix}\right\} \tag{21}$$

сохранится только член $H_{22}|\sigma^0|$. Нетрудно доказать, что три оставшихся в (17)—(19) определителя дают $H_{33}|\sigma^0|$. Следовательно, вклад в производную $\frac{d}{dt}|\sigma^0|$ от члена $\sigma^0 H$ оказывается равным уже известному нам выражению (16). В итоге, удваивая (16), получаем уравнение (13). Доказательство закончено.

Следствие. Уравнение (13) приводится к виду

$$\frac{d}{dt}\ln\left[(a_1a_2a_3)^2|\sigma^0|\right]=0 \tag{22}$$

и имеет решение

$$I_3 = 8a_1^2a_2^2a_3^2 \begin{vmatrix} \sigma_{11}^0 & \sigma_{12}^0 & \sigma_{13}^0 \\ \sigma_{12}^0 & \sigma_{22}^0 & \sigma_{23}^0 \\ \sigma_{13}^0 & \sigma_{23}^0 & \sigma_{33}^0 \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Таким образом, фазовый инвариант I_3 является особым среди пяти: он оказывается интегралом не всех пятнадцати уравнений движения эллипсоида, а лишь шести уравнений (4)—(5). Этот факт будет иметь принципиальное значение при переходе в разделе 6 к стационарным состояниям.

5. *Модель в фазовом пространстве.* Рассмотрим шестимерное декартово фазовое пространство обычных координат x_i ($i=1, 2, 3$) и соответствующих им скоростей $\dot{x}_i = x_{i+3}$, вектор в котором имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6). \tag{24}$$

Оно имеет кососимметрическую метрику

$$g = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Каждая звезда в этом пространстве представлена своей изображающей точкой, а модель в целом — объемным континуумом таких точек.

Форма и структура рассматриваемого ансамбля точек определяется фазовой функцией модели $f(t, \vec{x})$. В силу того, что у моделей рассматриваемого типа все моменты третьего порядка равны нулю, т. е.

$$\int \cdots \int f x_k x_l x_m d\Gamma = 0, \quad (k, l, m = 1,\dots, 6), \tag{26}$$

их фазовая функция будет зависеть только от вполне определенной квадратичной формы в фазовом пространстве (см. ниже). Коэффициенты в квадратичной форме оказываются связанными со вторыми моментами типа

$$F_{ij}(t) = \frac{5}{M} \int \cdots \int f x_i x_j d\Gamma, \tag{27}$$

где $M = \frac{4}{3}\pi a_1(t)\, a_2(t)\, a_3(t) \cdot \rho(t)$ — масса эллипсоидальной модели. Матрица (27) является симметрической вещественной матрицей шестого порядка, члены которой находим с учетом формул полной скорости частицы ($\vec{x}'$ — вектор остаточной скорости)

$$\dot{x}_1 = \ddot{x}_1 + \frac{\dot{a}_1}{a_1} x_1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - \Omega_3\right) x_2 + \left(\Omega_2 - \frac{a_1}{a_3}\lambda_2\right) x_3, \qquad (28)$$

причем остальные два компонента восстанавливаются из данной круговой перестановкой индексов. На главной диагонали расположены члены

$$F_{ii} = a_i^2, \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

$$F_{44} = 2\sigma^0_{11} + \dot{a}_1^2 + (a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3)^2 + (a_3\Omega_2 - a_1\lambda_2)^2, \qquad (29)$$

F_{55} и F_{66} — круговой перестановкой из F_{44}.

На диагоналях, параллельных главной, находятся члены:

$$F_{12} = F_{23} = 0, \quad F_{31} = a_3(a_3\Omega_2 - a_1\lambda_2),$$

$$F_{45} = 2\sigma^0_{12} + \dot{a}_1(a_1\Omega_3 - a_2\lambda_3) + \dot{a}_2(a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3) + (a_3\Omega_2 - a_1\lambda_2)(a_2\lambda_1 - a_3\Omega_1), \qquad (30)$$

F_{56} — круговой перестановкой из F_{45};

$$F_{13} = 0, \quad F_{24} = a_2(a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3), \quad F_{35} = a_3(a_2\lambda_1 - a_3\Omega_1),$$

$$F_{46} = 2\sigma^0_{13} + \dot{a}_1(a_3\lambda_2 - a_1\Omega_2) + \dot{a}_3(a_3\Omega_2 - a_1\lambda_2) + (a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3)(a_2\Omega_1 - a_3\lambda_1); \qquad (31)$$

$$F_{14} = a_1\dot{a}_1, \quad F_{25} = a_2\dot{a}_2, \quad F_{36} = a_3\dot{a}_3; \qquad (32)$$

$$F_{15} = a_1(a_1\Omega_3 - a_2\lambda_3), \quad F_{26} = a_2(a_2\Omega_1 - a_3\lambda_1); \qquad (33)$$

$$F_{16} = a_1(a_3\lambda_2 - a_1\Omega_2). \qquad (34)$$

Рассмотрим тензорный эллипсоид матрицы (27)

$$\sum_{i,j=1}^{6} F_{ij} x_i x_j = 1, \qquad (35)$$

уравнение которого можно также записать скалярным произведением

$$(\vec{x},\ F\vec{x}) = 1. \qquad (36)$$

Объем этого эллипсоида равен

$$V = \int\limits_{(\vec{x},\ F\vec{x})<1} \cdots \int dx_1 \ldots dx_6 = \frac{\pi^3}{3!\,|F|^{1/2}}, \qquad (37)$$

где $|F|$ — определитель матрицы (27). Легко находим, что

$$|F| = I_3. \qquad (38)$$

В общем нестационарном случае эллипсоид моментов (36) эволюционирует во времени, причем эволюция может быть представлена как результат линейных канонических преобразований в шестимерном фазовом пространстве. Такие преобразования называются симплектическими [7]. Характер движения зависит от собственных значений матрицы (27), знание которых необходимо также для нахождения фазовых инвариантов, сохраняющихся при симплектических преобразованиях над нашей динамической системой. Обобщенная задача на собственные значения заключается в вычислении определителя характеристической матрицы (см. также [8])

$$\det(F_{ij} - \beta g_{ij}) = 0, \tag{39}$$

где матрица g из (25).

Задача на собственные значения допускает и другую формулировку. Умножая характеристическую матрицу (39) на матрицу g^{-1} и учитывая, что

$$g^{-1} = -g, \tag{40}$$

приведем задачу к вычислению собственных значений новой матрицы

$$\Phi = g^{-1}F = -gF. \tag{41}$$

При этом собственные значения матрицы Φ находятся в пространстве с обычной евклидовой метрикой, т. е. из определителя

$$\det(\Phi - \beta E) = 0. \tag{42}$$

Используя выражения (29)—(34), уравнение (39) приводим к виду [1]

$$\beta^6 + I_1\beta^4 + I_2\beta^2 + I_3 = 0. \tag{43}$$

Коэффициенты этого бикубического уравнения и есть рациональные фазовые инварианты*

$$I_1 = \sum_1^3 (2a_i^2\sigma_{ii}^0 + c_i^2), \tag{44}$$

$$I_2 = \sum_{1,2,3}\left[4a_1^2a_2^2\begin{vmatrix}\sigma_{11}^0 & \sigma_{12}^0\\ \sigma_{12}^0 & \sigma_{22}^0\end{vmatrix} + a_1^2\sigma_{11}^0c_1^2 + 2a_1a_2\sigma_{12}^0c_1c_2\right], \tag{45}$$

а I_3 дано в (23). Величины β_i сами являются инвариантами, но иррациональными. Для них доказана следующая важная теорема.

* В статье [1] в выражении для I_2 (формула 51) по недоразумению выпал последний член.

Теорема 2. Собственные значения вещественной симметрической матрицы (27) в фазовом пространстве с кососимметрической метрикой (25) могут быть лишь чисто мнимыми величинами (в особых случаях — нулями).

Доказательство. Собственный вектор матрицы (27) должен удовлетворять уравнению

$$F\vec{x} = \beta \cdot g\vec{x}. \tag{46}$$

Допуская существование сопряженных величин и учитывая вещественность матриц (25) и (27), получим

$$F\tilde{\vec{x}} = \tilde{\beta} \cdot g\tilde{\vec{x}}. \tag{47}$$

В силу симметричности матрицы F имеет место

$$(\tilde{\vec{x}}, F\vec{x}) = (\vec{x}, F'\tilde{\vec{x}}) = (\vec{x}, F\tilde{\vec{x}}). \tag{48}$$

Составим скалярные произведения

$$\begin{aligned} (\tilde{\vec{x}}, F\vec{x}) &= (\tilde{\vec{x}}, \beta \cdot g\vec{x}), \\ (\vec{x}, F\tilde{\vec{x}}) &= (\vec{x}, \tilde{\beta} \cdot g\tilde{\vec{x}}) \end{aligned} \tag{49}$$

и вычтем их одно из другого; учитывая при этом (48) и косую симметрию матрицы (25), в итоге приходим к уравнению

$$(\tilde{\vec{x}}, g\vec{x})(\beta + \tilde{\beta}) = 0. \tag{50}$$

Следовательно,

$$\beta = -\tilde{\beta}, \tag{51}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Фазовые инварианты I_i не могут принимать отрицательных значений. По теореме Виета для корней уравнения (43) имеем

$$\begin{aligned} \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= -I_1, \\ \beta_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2\beta_3^2 + \beta_2^2\beta_3^2 &= I_2, \\ \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2 &= -I_3. \end{aligned} \tag{52}$$

Но в силу только что доказанного, среди величин β_i^2 нет положительных. так что

$$I_1 > 0, \quad I_2 \geqslant 0, \quad I_3 \geqslant 0. \tag{53}$$

У нестационарных эллипсоидов с отличной от нуля дисперсией скоростей ни один из трех инвариантов нулю не равен. Второй и третий инвариант оказываются равными нулю только в случаях стационарных и нестационарных эллипсоидов без дисперсии скоростей. Для этого две пары сопряженных величин β_i должны быть равны нулю. Исключительно важное значение имеет (см. следующий раздел) то, что для стационарных бесстолкновительных эллипсоидов даже с отличной от нуля дисперсией скоростей инвариант I_3 обращается в нуль.

Но, несмотря на всю важность эллипсоида моментов (35)—(36), уровенным будет не он и подобные ему, а семейство эллипсоидов, взаимных к ним. Уравнение эллипсоида, взаимного к (36), имеет вид

$$(\vec{x}, F^{-1}\vec{x}) = 1, \tag{54}$$

где F^{-1} есть матрица, обратная (27). Именно на семейстзе подобных (54) эллипсоидов фазовая плотность остается постоянной, и поэтому

$$f(t, \vec{x}) = f[(\vec{x}, F^{-1}_{(t)}\vec{x})]. \tag{55}$$

Объем, который занимает наша модель в шестимерном фазовом пространстве, будет равен

$$V^{-1} = \underset{(\vec{x},\ F^{-1}\vec{x})<1}{\int \cdots \int} dx_1 \dots dx_6 = \frac{3!\,|F|^{1/2}}{\pi^3}, \tag{56}$$

Как и следовало ожидать, этот объем обратен данному в (37).

Для вычисления уравнения фазового эллипсоида (54) требуется раскрыть окаймленный определитель

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} & x_1 \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} & x_2 \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} & x_3 \\ F_{14} & F_{24} & F_{34} & F_{44} & F_{45} & F_{46} & x_4 \\ F_{15} & F_{25} & F_{35} & F_{45} & F_{55} & F_{56} & x_5 \\ F_{16} & F_{26} & F_{36} & F_{46} & F_{56} & F_{66} & x_6 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{57}$$

6. *Переход к стационарным состояниям.* В стационарном случае в выражениях (29)—(34) исчезнут не только производные от величин, но надо также положить (см. Введение)

$$\Omega_1 = \lambda_1 = \overset{0}{\sigma}_{12} = \overset{0}{\sigma}_{13} = 0. \tag{58}$$

В этих условиях уравнение граничного фазового эллипсоида (57) будет следующим:

$$Q(\vec{x}) = F_{11}^{-1} x_1^2 + F_{22}^{-1} x_2^2 + F_{33}^{-1} x_3^2 + F_{44}^{-1} x_4^2 + F_{55}^{-1} x_5^2 + F_{66}^{-1} x_6^2 + \\ + 2F_{23}^{-1} x_2 x_3 + 2F_{15}^{-1} x_1 x_5 + 2F_{16}^{-1} x_1 x_6 + 2F_{24}^{-1} x_2 x_4 + 2F_{34}^{-1} x_3 x_4 + \\ + 2F_{56}^{-1} x_5 x_6 = 1. \tag{59}$$

Коэффициенты F_{ij}^{-1} в этом уравнении оказываются равными

$$F_{11}^{-1} = \frac{1}{a_1^2}\left(1 + \frac{\overset{0}{\sigma}_{22} r_2^2 + \overset{0}{\sigma}_{33} k_3^2 - 2\overset{0}{\sigma}_{23} r_2 k_3}{2\Delta}\right);$$

$$F_{22}^{-1} = \frac{1}{a_2^2}\left(1 + \frac{r_3^2}{2\overset{0}{\sigma}_{11}}\right); \quad F_{33}^{-1} = \frac{1}{a_3^2}\left(1 + \frac{k_2^2}{2\overset{0}{\sigma}_{11}}\right); \quad F_{44}^{-1} = \frac{1}{2\overset{0}{\sigma}_{11}};$$

$$F_{55}^{-1} = \frac{\overset{0}{\sigma}_{33}}{2\Delta}; \quad F_{66}^{-1} = \frac{\overset{0}{\sigma}_{22}}{2\Delta}; \quad F_{23}^{-1} = \frac{k_2 r_3}{2\overset{0}{\sigma}_{11} a_2 a_3}; \quad F_{24}^{-1} = -\frac{r_3}{2\overset{0}{\sigma}_{11} a_2}; \tag{60}$$

$$F_{34}^{-1} = -\frac{k_2}{2\overset{0}{\sigma}_{11} a_3}; \quad F_{15}^{-1} = \frac{\overset{0}{\sigma}_{23} r_2 - \overset{0}{\sigma}_{33} k_3}{2a_1\Delta}; \quad F_{16}^{-1} = -\frac{\overset{0}{\sigma}_{22} r_2 - \overset{0}{\sigma}_{23} k_3}{2a_1\Delta};$$

$$F_{56}^{-1} = -\frac{\overset{0}{\sigma}_{23}}{2\Delta},$$

где для краткости обозначено

$$\begin{matrix} k_2 = a_3\Omega_2 - a_1\lambda_2, & k_3 = a_1\Omega_3 - a_2\lambda_3, \\ r_2 = a_3\lambda_2 - a_1\Omega_2, & r_3 = a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3, \end{matrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix}. \tag{61}$$

Наша задача заключается теперь в том, чтобы представить уравнение (59) суммой квадратов. Для начала выделим трехчлен

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}$$

и преобразуем оставшиеся в (59) члены к сумме квадратов: имеем

$$Q(\vec{x}) = (\vec{x}, F^{-1}\vec{x}) = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + \frac{[\dot{x}_1 - (r_3/a_2)\, x_2 - (k_2/a_3)\, x_3]^2}{2\overset{0}{\sigma}_{11}} + \\ + \frac{[\dot{x}_3 - (r_2/a_1)\, x_1]^2}{2\overset{0}{\sigma}_{33}} + \frac{\overset{0}{\sigma}_{33}}{2\Delta}\left[\left(\dot{x}_2 - \frac{k_3}{a_1} x_1\right) - \frac{\overset{0}{\sigma}_{23}}{\overset{0}{\sigma}_{33}}\left(\dot{x}_3 - \frac{r_2}{a_1} x_1\right)\right]^2 = 1. \tag{62}$$

Однако последний и предпоследний члены нарушают, вообще говоря, требуемую гармонию выражения (62), так как в сумме эти члены дают

$$\frac{1}{2\Delta}\left\{\overset{0}{\sigma}_{33}\left(\dot{x}_2-\frac{k_3}{a_1}x_1\right)^2+\overset{0}{\sigma}_{22}\left(\dot{x}_3-\frac{r_2}{a_1}x_1\right)^2-\right.$$

$$\left.-2\overset{0}{\sigma}_{23}\left(\dot{x}_2-\frac{k_3}{a_1}x_1\right)\left(\dot{x}_3-\frac{r_2}{a_1}x_1\right)\right\}, \qquad (63)$$

и мы не получаем здесь в общем случае суммы квадратов. Важно подчеркнуть, что никакими поворотами выбранной системы координат нельзя добиться исчезновения смешанных членов (или одного члена в (59). В самом деле, если пытаться поворотом осей $O\dot{x}_2'\dot{x}_3'$, где

$$\dot{x}_2'=\dot{x}_2-\frac{k_3}{a_1}x_1,\quad \dot{x}_3'=\dot{x}_3-\frac{r_2}{a_1}x_1 \qquad (64)$$

— компоненты остаточной скорости звезды, избавиться в (63) от смешанного члена, это будет связано и с поворотом координатных осей Ox_2x_3, а значит приведет к появлению столь нежелательных смешанных членов в гирационном эллипсоиде нашей модели. Поэтому более обещающей является попытка представить (63) в виде произведения двух линейных множителей

$$(\sqrt{\pm\mu_2}\,\dot{x}_2'+\sqrt{\mp\mu_3}\,\dot{x}_3')(\sqrt{\pm\mu_2}\,\dot{x}_2'-\sqrt{\mp\mu_3}\,\dot{x}_3'). \qquad (65)$$

Здесь μ_2 и μ_3 — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}\overset{0}{\sigma}_{22}-\mu & \overset{0}{\sigma}_{23}\\ \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33}-\mu\end{vmatrix}=0. \qquad (66)$$

Так как $I_3\geqslant 0$ (см. формулу 53), то и $\Delta\geqslant 0$; следовательно,

$$\mu_2>\mu_3\geqslant 0. \qquad (67)$$

При положительных μ_2 и μ_3 сомножители в (65) суть комплексные величины, не имеющие поэтому физического смысла. Остается единственная возможность придать разложению (65) физический смысл — положить

$$\Delta=\begin{vmatrix}\overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23}\\ \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33}\end{vmatrix}=0. \qquad (68)$$

При выполнении условия (68) $\mu_3=0$, и мнимости в (65) исчезают.

Но вернемся к выражению фазового эллипсоида модели (62). В этой формуле при выполнении необходимого условия (68) нужно положить

$$\frac{\overset{0}{\sigma}_{33}}{\overset{0}{\sigma}_{23}}\left(\dot{x}_2-\frac{k_3}{a_1}x_1\right)-\left(\dot{x}_3-\frac{r_2}{a_1}x_1\right)=0. \qquad (69)$$

Дифференцируя по времени это выражение и заменив вторые производные с помощью соответствующих уравнений движения частицы (см. [5], формула 4), мы приходим к замечательным равенствам

$$\operatorname{tg}\varkappa = \frac{\overset{0}{\sigma}_{33}}{\overset{0}{\sigma}_{23}} = \frac{\sigma_{23}}{\sigma_{22}} = \frac{\Omega_2\Omega_3}{2A_2-\Omega_3^2} = \frac{2A_3-\Omega_2^2}{\Omega_2\Omega_3} = \frac{\Omega_3 A_3}{\Omega_2 A_2}, \tag{70}$$

и

$$\operatorname{tg}\varkappa = \frac{\dfrac{r_2}{a_1} - 2\Omega_2}{\dfrac{k_3}{a_1} + 2\Omega_3}. \tag{71}$$

Соотношения из (70) исчерпывающе характеризуют угол наклона ($\equiv \varkappa$) особой прямой в главной плоскости Ox_2x_3. Эти же соотношения были получены в [5] другим способом.

Переходя к вращающейся системе координат, во всех коэффициентах из (61) следует положить $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$. Исключив $\operatorname{tg}\varkappa$ из (70) и (71), в частности получим

$$\frac{\Omega_3^2}{2A_2-\Omega_3^2} = \frac{pa_3-2a_1}{2a_1-qa_2}; \text{ где } p = \frac{\lambda_2}{\Omega_2}, \quad q = \frac{\lambda_3}{\Omega_3}. \tag{72}$$

Отсюда следует еще одно соотношение

$$\eta = \frac{\Omega_3^2}{2A_2} = (2a_1 - pa_3)/(qa_2 - pa_3), \tag{73}$$

также известное для модели [5].

Итак, доказав необходимость вырождения (68) эллипсоида дисперсии скоростей в плоский эллипс, мы сразу же приходим к особой прямой. Выражение (69) есть не что иное, как линейный интеграл (9), полученный в [5] из кинетических соображений. Метод фазового эллипсоида позволяет найти все характеристики равновесных бесстолкновительных эллипсоидов. Здесь достаточно привести лишь функцию распределения. Как известно из (55), эта функция зависит только от уравнения фазового эллипсоида (62). С учетом вырождения (68) фазовый эллипсоид становится пятимерным и функция имеет вид:

$$f[Q(\vec{x})] = \frac{2\sqrt{2}\rho}{\pi\sqrt{\overset{0}{\sigma}_{11}\overset{0}{\sigma}_{33}}}\,\delta\left[\dot{x}_3 - \dot{x}_2\operatorname{tg}\varkappa - \frac{4A_3}{\Omega_2}x_1\right]\times$$

$$\times\,\delta\left[\frac{\left(\dot{x}_1 - \dfrac{a_1}{a_2}\lambda_3 x_2 + \dfrac{a_1}{a_3}\lambda_2 x_3\right)^2}{2\overset{0}{\sigma}_{11}} + \frac{\left(\dot{x}_2 + \dfrac{a_2}{a_1}\lambda_3\right)^2}{2\overset{0}{\sigma}_{22}} + \right.$$

$$+\frac{\left(\dot{x}_3-\frac{a_3}{a_1}\lambda_2 x_1\right)^2}{2\sigma_{33}^0}+\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}-1\Bigg]. \quad (74)$$

Именно такая функция приводится и в [5].

7. *Заключение.* Один из главных результатов этой статьи — доказательство необходимости фазового вырождения в стационарных бесстолкновительных эллипсоидах с нулевыми моментами третьего порядка от функции распределения. Объектом доказательства стала модель эллипсоида с наклонным вращением, которая содержит модель Фримана (с фиксированным отношением полуосей, см. [5]) в качестве частного случая. Именно поэтому проведенное здесь доказательство касается более общего случая, чем случай, исследованный в [6]. Так, условие существования особой прямой (6) в модели Фримана следует из условия (7) при обращении в нуль одного из компонентов вектора угловой скорости, т. е. когда эллипсоид с наклонным вращением переходит в режим вращения вокруг одной из главных осей симметрии. По своей сути наш метод гидродинамический и поэтому принципиально отличен от метода Хантера.

Данная статья дополняет работы [1—3] и делает развитую в них теорию логически полной. С удовлетворением надо отметить, что одновременно устранена брешь в статье [5], где не было дано доказательства необходимости особой прямой.

Педагогический институт
г. Глазов

DIRICHLET'S PROBLEM IN STELLAR DYNAMICS. III. MOTION OF THE COLLISIONLESS ELLIPSOIDS IN PHASE SPACE

B. P. KONDRAT'EV

In the frame of the problem we have discussed some basic details of the transition to stationary configurations. Six equations for the components of the velocity dispersion tensor (equations of micromotion) to the linear matrix equation are reduced. Owing to the time derivative for the determinant of the velocity dispersion matrix is derived. It has been proved that the third phase invariant is the integral of only that. In six-dimentional phase space our collisionless model represents an ellipsoid. The phase ellipsoid of stationary model to five-dimentional figure has been degenerated. As a result of this

degeneration the family of the equilibrium models has some special line in each point of that balance between centrifugal and gravitational forces the existing. Therefore, the stationary collisionless models have only two parameters.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. П. Кондратьев, Е. А. Малков*, Астрофизика, 25, 587, 1986.
2. *Б. П. Кондратьев, Е. А. Малков*, Астрофизика, 26, 511, 1987.
3. *Б. П. Кондратьев, Е. А. Малков*, Астрофизика, 27, 311, 1987.
4. *K. C. Freeman*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 134, 1, 1966.
5. *Б. П. Кондратьев*, Астрофизика, 21, 499, 1984.
6. *C. Hunter*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 166, 633, 1974.
7. *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко*, Современная геометрия, Наука, М., 1986, стр. 321.
8. *В. А. Антонов*, Вестн. ЛГУ, № 13, 136, 1965.