Известия НАН Армении, Математика, том 56, н. 2, 2021, стр. 58 – 70

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ АРТИНА

Ю. М. МОВСИСЯН, М. А. ЁЛЧЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *movsisyan@ysu.am*, *marlen.yolchyan94@gmail.com*

Аннотация. Известна следующяя теорема Артина об альтернативных линейных алгебр определённых на коммутативном, ассоциативном кольце с единицей: в алтернативной линейной алгебре, если $(a, b, c) = 0$, то подалгебра порождённая элементами a, b, c – ассоциативна. В данной статье мы предлагаем широкое обобщение этого классического результата, используя концепции сверхтождества и котождества. Соответствующие универсальные алгебры мы называем g-алгебрами.

MSC2010 number: 03C05; 03C85; 16D10; 17A01; 17A30.

Ключевые слова: сверхтождество; котождество; альтернативность; сверхассоциативность; сверхальтернативность; g-алгебра.

1. g-алгебры. Введение

Вводится многообразие g-алгебр, являюшийся многообразием мултиоператорных Ω-групп специального типа [1, 2, 3, 19].

Хорошо известна следующяя теорема Артина об альтернативных линейных алгебрах определённых на коммутативном, ассоциативном кольце с единицей: в алтернативной линейной алгебре, если $(a, b, c) = 0$, то подалгебра порождённая элементами a, b, c – ассоциативна [2, 4]. В данной статье мы предлагаем широкое обобщение этого классического результата, используя понятия сверхтождества и котождества. Соответствующие универсальные алгебры мы называем g-алгебрами.

Определение 1.1. *Пусть Φ – ассоциативное, коммутативное кольцо с единичным элементом 1. Множество A называется g-алгеброй над кольцом Φ, если существует структура унитарного Φ-модуля определённого на A и существует множество бинарных операций Σ определённых на A, связанных с*

[1]Настоящее исследование частично поддержано Государственным Комитетом Науки Республики Армения, гранты: 10-3/1-41, 18T-1A306.

модульными операциями следующими равенствами:

$$X(a+b,c) = X(a,c) + X(b,c), \tag{1.1}$$

$$X(a,b+c) = X(a,b) + X(a,c), \tag{1.2}$$

$$\alpha(X(a,b)) = X(\alpha a,b) = X(a,\alpha b), \tag{1.3}$$

для всех $a, b, c \in A$ и для всех $\alpha \in \Phi, X \in \Sigma$. Мы обозначим g-алгебру A над кольцом Φ через $A(+,\Sigma,\Phi)$ или, кратко, A.

Пример 1.1. Приведём пример g-алгебры. Пусть Z – кольцо целых чисел, X, Y – произвольные абелевы группы и $M = Hom(X,Y)$ – соответсвующая абелева группа. Для каждого элемента γ из $Hom(Y,X)$ мы определяем на M следующую бинарную операцию:

$$\overline{\gamma}(a,b) \stackrel{def}{=} a \circ \gamma \circ b - b \circ \gamma \circ a,$$

где $a, b \in M$ и $\circ$ - обычная суперпозиция отображений. Обозначая через $\Sigma = \{\overline{\gamma} | \gamma \in Hom(Y,X)\}$, мы получаем g-алгебру $M(+,\Sigma,Z)$.

Пример 1.2. Пусть P – поле, n – натуральное число, $P^{n\times n}$ – множество всех квадратных матриц с размерностью n и с элементами из P, $+$ и $\cdot$ есть сложение и умнажение матриц. Определим новую бинарную операцию на $P^{n\times n}$ следующим образом:

$$A \circ B \stackrel{def}{=} A^T \cdot B,$$

где $A, B \in P^{n\times n}$. Тогда $P^{n\times n}(+,\{\cdot,\circ\},P)$ - g-алгебра.

Аналогично, определяя операцию $\circ$ как

$$A \circ B \stackrel{def}{=} B^T \cdot A,$$

мы опять получим g-алгебру.

Известны приложения таких операций в теоретической астрономии.

Определение 1.2. *Пусть $A(+,\Sigma,\Phi)$ – g-алгебра, $B \subseteq A$. Подмножество B называется подалгеброй g-алгебры $A(+,\Sigma,\Phi)$ если оно замкнуто относительно модульных операций и бинарных операций из Σ.*

Нам необходимы понятия сверхтождества и котождества. Для формул первой и второй ступени (и языков первой и второй ступени) смотрите [5] - [9]. Напомним, что сверхтождество [10] - [17] (или $\forall(\forall)$-тождество) – формула второй ступени следующего вида:

$$(*) \qquad \forall X_1, \ldots, X_m \forall x_1, \ldots, x_n(\omega_1 = \omega_2),$$

где ω_1, ω_2 - слова (термы) в алфавите функциональных переменных $X_1, \ldots, X_m$ и предметных переменных $x_1, \ldots, x_n$. Сверхтождества обычно записываются без универсальных кванторов: $\omega_1 = \omega_2$. Скажем, что сверхтождество $\omega_1 = \omega_2$ выполняется в алгебре $(Q; \Sigma)$ если это равенство имеет место при замене предметных переменных $x_1, \ldots, x_n$ любыми элементами из Q и функциональных переменных $X_1, \ldots, X_m$ любыми операциями из Σ соответствующих арностей. Возможность такой замены предполагается, то есть:

$$\{|X_1|, \ldots, |X_m|\} \subseteq \{|A| \mid A \in \Sigma\} = T_{(Q;\Sigma)} = T_{(\Sigma)},$$

где $|S|$ арность S, и $T_{(Q;\Sigma)}$ называется арифметическим типом $(Q; \Sigma)$. T-алгебра - алгебра с арифметическим типом $T \subseteq N$. Класс алгебр называется классом T-алгебр, если каждая алгебра из этого класса - T-алгебра.

Котождество (или $(\exists)\forall$-тождество, см. [11] - [18]) – формула второй ступени следующего вида:

$$\exists x_1, \ldots, x_n \forall X_1, \ldots, X_m(\omega_1 = \omega_2).$$

Котождества обычно записываются без кванторов: $\omega_1 = \omega_2$. Скажем, что котождество $\omega_1 = \omega_2$ выполняется в алгебре $(Q; \Sigma)$, если существуют значения предметных переменых $x_1, \ldots, x_n$ из множества Q такие, что равенство $\omega_1 = \omega_2$ имеет место при замене функциональных переменных $X_1, \ldots, X_m$ любыми операциями из Σ соответствующих арностей (возможность такой замены также предполагается). Обычно, в записи котождества $\omega_1 = \omega_2$, предметные переменные заменяются соответствующими фиксированными значениями из Q.

Котождества могут быть определены также, как формулы второй ступени следующего вида:

$$\forall X_1, \ldots, X_m(\omega_1 = \omega_2).$$

Пример 1.3. В каждой мультиоператорной Ω-группе выполняется следующее котождество:

$$X(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}) = 0,$$

для всех $n \in T_{(\Omega)}$, где все предметные переменные заменены нулевым элементом Ω-группы [1, 2, 3, 19].

Пример 1.4. (J. von Neumann) Пусть $L(+,\cdot)$ модулярная решетка, a, b, $c \in L$. Подрешетка решетки L, порожденная элементами a, b, c, дистрибутивна тогда и только тогда, когда следующее котождество левой дистрибутивности выполняется в решетке $L(+,\cdot)$:

$$X\left(a,\, Y(b,\, c)\right) = Y\left(X(a,\, b),\, X(a,\, c)\right).$$

Сверхтождество $(*)$ назовём нетривиальным, если $m > 1$, и тривиальным, если $m = 1$. Число m называется функциональным рангом данного сверхтождества.

Алгебра $(Q;\Sigma)$ с бинарными операциями называется бинарной алгеброй. Алгебра (Q,Σ) называется q-алгеброй (e-алгеброй) если существует операция $A \in \Sigma$ такая что $Q(A)$ – квазигруппа (группоид с единицей). Бинарная алгебра (Q,Σ) называется функционально нетривиальной, если $|\Sigma| > 1$. Известно (см. [11, 12], а также [13, 20]) что если ассоциативное нетривиальное сверхтождество выполяется в функционально нетривиальной q-алгебре (e-алгебре) тогда функниональный ранг этого сверхтождества может быть равен только двум и это сверхтождество имеет одну из следующих видов:

$(ass)_1$ $$X(x,Y(y,z)) = Y(X(x,y),z),$$

$(ass)_2$ $$X(x,Y(y,z)) = X(Y(x,y),z),$$

$(ass)_3$ $$Y(x,Y(y,z)) = X(X(x,y),z).$$

Более того, в классе q-алгебр (e-алгебр) сверхтождество $(ass)_3$ влечёт сверхтождество $(ass)_2$, которое влечёт сверхтождество $(ass)_1$.

Определение 1.3. *Бинарная алгебра $(Q;\Sigma)$ называется сверхассоциативной если в ней выполняется первое сверхтождество ассоциативности $(ass)_1$.*

Следовательно, сверхассоциативные алгебры – это алгебры с полугрупповыми операциями. Сверхассоциативные алгебры под названием Г-полугрупп (гамма-полугрупп) или доппельполугрупп рассматриваются в работах разных авторов [21]-[32].

Пример 1.5. Пусть A, B непустые множества, Σ множество всех отображений из B в A и Q множество всех отображений из A в B. Тогда каждый элемент $\alpha \in \Sigma$ мы можем рассмотреть как бинарную операцию на Q:

$$\alpha(a,b) = a\cdot\alpha\cdot b,$$

где $a, b \in Q$ и $a \cdot \alpha \cdot b$ обычная суперпозиция отображений. В результате, мы получаем сверхассоциативную алгебру $(Q; \Sigma)$. Более того, если $A = B$, мы получаем алгебру второй степени (второго порядка) $(Q; \Sigma; \cdot)$ в смысле [33].

Определение 1.4. *Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется левой сверхальтернативной, если в ней выполняется следующее сверхтождество левой альтернативности:*

$$(alt)_l \qquad X(x, Y(x, y)) = Y(X(x, x), y).$$

Определение 1.5. *Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется правой сверхальтернативной, если в ней выполняется следующее сверхтождество правой альтернативности:*

$$(alt)_r \qquad X(x, Y(y, y)) = Y(X(x, y), y).$$

Определение 1.6. *Бинарная алгебра $(Q; \Sigma)$ называется сверхальтернативной, если она является правой и левой сверхальтернативной.*

Определение 1.7. *g-алгебра $A(+, \Sigma, \Phi)$ называется сверхальтернативной, если бинарная алгебра(редукт) $(A; \Sigma)$ – сверхальтернативна.*

Пример 1.6. Пусть $A(+, \cdot, P)$ альтернативная алгебра и c элемент из ядра алгебры A ([34, 35, 4]), то есть:

$$(x \cdot c) \cdot y = x \cdot (c \cdot y),$$

для всех $x, y \in A$. Определим новую бинарную операцию над A:

$$x \circ y \stackrel{def}{=} x \cdot c \cdot y.$$

Тогда $A(+, \{\cdot, \circ\}, P)$ будет сверхальтернативной g-алгеброй.

Определение 1.8. *g-алгебра $A(+, \Sigma, \Phi)$ называется сверхассоциативной, если бинарная алгебра $(A; \Sigma)$ – сверхассоциативна.*

Если в примере 1.6 мы возьмём ассоциативную алгебру $A(+, \cdot, P)$, тогда полученная g-алгебра $A(+, \{\cdot, \circ\}, P)$ будет сверхассоциативной для каждого элемента $c \in A$.

Пусть $A(+, \Sigma, \Phi)$ – g-алгебра. Обозначим $(x, y, z)_{X,Y} := X(x, Y(y, z)) - Y(X(x, y), z)$, где $x, y, z \in A$, и $X, Y \in \Sigma$. Тогда условия $(alt)_l, (alt)_r$ для $(A; \Sigma)$ могут быть записаны следующим образом

$$(1.4) \qquad (x, x, y)_{X,Y} = 0; \forall x, y \in A, \forall X, Y \in \Sigma,$$

$$(x,y,y)_{X,Y}=0;\forall x,y\in A,\forall X,Y\in\Sigma. \tag{1.5}$$

Отметим также, что g-алгебра $A(+,\Sigma,\Phi)$ сверхассоциативна тогда и только тогда, когда выполяется следующее условие:

$$(x,y,z)_{X,Y}=0,\forall x,y,z\in A,\forall X,Y\in\Sigma.$$

Лемма 1.1. *Пусть $A(+,\Sigma,\Phi)$ – g-алгебра. Тогда:*

$$\begin{gathered}(\alpha_1a+\alpha_2b,\beta_1c+\beta_2d,\gamma_1e+\gamma_2f)_{X,Y}=\\(\alpha_1\beta_1\gamma_1)(a,c,e)_{X,Y}+(\alpha_1\beta_1\gamma_2)(a,c,f)_{X,Y}+(\alpha_1\beta_2\gamma_1)(a,d,e)_{X,Y}+\\(\alpha_1\beta_2\gamma_2)(a,d,f)_{X,Y}+(\alpha_2\beta_1\gamma_1)(b,c,e)_{X,Y}+(\alpha_2\beta_1\gamma_2)(b,c,f)_{X,Y}+\\(\alpha_2\beta_2\gamma_1)(b,d,e)_{X,Y}+(\alpha_2\beta_2\gamma_2)(b,d,f)_{X,Y},\end{gathered}$$

$\forall a,b,c,d,e,f\in A,\forall\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2\in\Phi,\forall X,Y\in\Sigma.$

Доказательство.

$$\begin{gathered}(\alpha_1a+\alpha_2b,\beta_1c+\beta_2d,\gamma_1e+\gamma_2f)_{X,Y}=\\X(\alpha_1a+\alpha_2b,Y(\beta_1c+\beta_2d,\gamma_1e+\gamma_2f))-Y(X(\alpha_1a+\alpha_2b,\beta_1c+\beta_2d),\gamma_1e+\gamma_2f)\overset{(1.1)-(1.3)}{=}\\(\alpha_1\beta_1\gamma_1)(X(a,Y(c,e))-Y(X(a,c),e))+(\alpha_1\beta_1\gamma_2)(X(a,Y(c,f))-Y(X(a,c),f))+\\(\alpha_1\beta_2\gamma_1)(X(a,Y(d,e))-Y(X(a,d),e))+(\alpha_1\beta_2\gamma_2)(X(a,Y(d,f))-Y(X(a,d),f))+\\(\alpha_2\beta_1\gamma_1)(X(b,Y(c,e))-Y(X(b,c),e))+(\alpha_2\beta_1\gamma_2)(X(b,Y(c,f))-Y(X(b,c),f)+\\(\alpha_2\beta_2\gamma_1)(X(b,Y(d,e))-Y(X(b,d),e))+(\alpha_2\beta_2\gamma_2)(X(b,Y(d,f))-Y(X(b,d),f))=\\(\alpha_1\beta_1\gamma_1)(a,c,e)_{X,Y}+(\alpha_1\beta_1\gamma_2)(a,c,f)_{X,Y}+(\alpha_1\beta_2\gamma_1)(a,d,e)_{X,Y}+\\(\alpha_1\beta_2\gamma_2)(a,d,f)_{X,Y}+(\alpha_2\beta_1\gamma_1)(b,c,e)_{X,Y}+(\alpha_2\beta_1\gamma_2)(b,c,f)_{X,Y}+\\(\alpha_2\beta_2\gamma_1)(b,d,e)_{X,Y}+(\alpha_2\beta_2\gamma_2)(b,d,f)_{X,Y}.\end{gathered}$$

□

Лемма 1.2. *Пусть $A(+,\Sigma,\Phi)$ – сверхальтернативная g-алгебра. Тогда выполяются следующие условия:*

$$(x,y,x)_{X,Y}=0, \tag{1.6}$$

$$(x,y,z)_{X,Y}=-(y,x,z)_{X,Y}, \tag{1.7}$$

$$(x,y,z)_{X,Y}=-(z,y,x)_{X,Y}, \tag{1.8}$$

$$(x,y,z)_{X,Y}=-(x,z,y)_{X,Y}, \tag{1.9}$$

для всех $x,y,z\in A$ и для всех $X,Y\in\Sigma$.

Лемма 1.3. *Пусть $A(+,\Sigma,\Phi)$ – g-алгебра. Тогда выполяется следующее условие:*

$$(Z(x,y),z,t)_{X,Y} - (x,X(y,z),t)_{Z,Y} + (x,y,Y(z,t))_{Z,X} =$$
$$Z(x,(y,z,t)_{X,Y}) + Y((x,y,z)_{Z,X},t),$$

для всех $x,y,z,t \in A$ и для всех $X,Y,Z \in \Sigma$.

Пусть $R(+,\Sigma,\Phi)$ – g-алгебра и $A,B,C \subseteq R$ и $X,Y \in \Sigma$. Обозначая $(A,B,C)_{X,Y} = 0$ будем иметь ввиду $(a,b,c)_{X,Y} = 0, \forall a \in A, \forall b \in B, \forall c \in C$. Скажем подмножество $A \subseteq R$ $*$-множество, если для любых $a_1,a_2 \in A$ и $r \in R$ выполяется следующее котождество: $X(a_1,Y(a_2,r)) = Y(X(a_1,a_2),r)$, т.е.

$$(A,A,R)_{X,Y} = 0, \forall X,Y \in \Sigma. \tag{1.10}$$

Очевидно, что если некое $*$-подмножество g-алгебры R также подалгебра g-алгебры R, тогда эта подалгебра сверхассоциативна. Если R – сверхальтернативная g-алгебра и $A \subseteq R$ – $*$-множество, тогда из условий (1.7) – (1.9) вытекают следующие котождества для любых $a_1,a_2 \in A$ и $r \in R$:

$$X(a_1,Y(r,a_2)) = Y(X(a_1,r),a_2), \qquad X(r,Y(a_1,a_2)) = Y(X(r,a_1),a_2),$$

т.е.

$$(A,R,A)_{X,Y} = 0; \forall X,Y \in \Sigma, \tag{1.11}$$

$$(R,A,A)_{X,Y} = 0; \forall X,Y \in \Sigma. \tag{1.12}$$

Лемма 1.4. *Пусть $R(+,\Sigma,\Phi)$ – сверхальтернативная g-алгебра и $A \subseteq R$ является $*$-подмножеством. Тогда подалгебра g-алгебры R, порождённая подмножеством A, также будет $*$-множеством.*

2. Основной результат

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2.1. *Пусть $R(+,\Sigma,\Phi)$ – сверхальтернативная g-алгебра, а $A,B,C \subseteq R$ – подалгебры и $*$-множества данной g-алгебры R. Если для любых $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ выполняется следующее котождество в $(R;\Sigma)$:*

$$X(a,Y(b,c)) = Y(X(a,b),c),$$

т.е. $(A,B,C)_{X,Y} = 0$, для всех $X,Y \in \Sigma$, тогда подалгебра g-алгебры R порождённая A, B и C – сверхассоциативна.

Доказательство. Рассмотрим следующее подмножество g-алгебры R:

$$D = \{d \in R | (A, B, d)_{X,Y} = (B, C, d)_{X,Y} = (C, A, d)_{X,Y} = 0, \forall X, Y \in \Sigma\}.$$

Очевидно, что D – непустое множество, так как:

$$A \cup B \cup C \subseteq D. \tag{2.1}$$

Согласно условиям $(1.1) - (1.3)$, множество D замкнуто относительно модульных операций, т.е. для всех $d_1, d_2 \in D$ и $\beta, \gamma \in \Phi$ имеем $\beta d_1 + \gamma d_2 \in D$.

Покажем следующие включения:

$$X(a', d), X(d, a'), X(b', d), X(d, b'), X(c', d), X(d, c') \in D, \tag{2.2}$$

для всех $d \in D, a' \in A, b' \in B, c' \in C, X \in \Sigma$.

Возьмём $a \in A, b \in B$ и $c \in C$, получим:

$$(Z(a, a'), d, b)_{X,Y} - (a, X(a', d), b)_{Z,Y} + (a, a', Y(d, b))_{Z,X} \overset{Lemma 1.3}{=}$$
$$Z(a, (a', d, b)_{X,Y}) + Y((a, a', d)_{Z,X}, b) \overset{(1.9)-(1.10)}{\Rightarrow}$$
$$(a, b, X(a', d))_{Z,Y} = 0; \forall a \in A, b \in B, Y, Z \in \Sigma,$$
$$(Z(a, a'), d, c)_{X,Y} - (a, X(a', d), c)_{Z,Y} + (a, a', Y(d, c))_{Z,X} \overset{Lemma 1.3}{=}$$
$$Z(a, (a', d, c)_{X,Y}) + Y((a, a', d)_{Z,X}, c) \overset{(1.9)-(1.10)}{\Rightarrow}$$
$$(a, c, X(a', d))_{Z,Y} = 0; \forall a \in A, c \in C, Y, Z \in \Sigma,$$
$$(Z(b, a'), d, c)_{X,Y} - (b, X(a', d), c)_{Z,Y} + (b, a', Y(d, c))_{Z,X} \overset{Lemma 1.3}{=}$$
$$Z(b, (a', d, c)_{X,Y}) + Y((b, a', d)_{Z,X}, c) \overset{(1.9)-(1.10)}{\Rightarrow}$$
$$(b, c, X(a', d))_{Z,Y} = 0; \forall b \in B, c \in C, Y, Z \in \Sigma.$$

Следовательно, $X(a', d) \in D$.

Далее, имеем:

$$(Z(b, d), a', a)_{X,Y} - (b, X(d, a'), a)_{Z,Y} + (b, d, Y(a', a))_{Z,X} \overset{Lemma 1.3}{=}$$
$$Z(b, (d, a', a)_{X,Y}) + Y((b, d, a')_{Z,X}, a) \overset{(1.8),(1.9),(1.12)}{\Rightarrow}$$
$$(a, b, X(d, a'))_{Z,Y} = 0; \forall a \in A, b \in B, Y, Z \in \Sigma,$$
$$(Z(c, d), a', a)_{X,Y} - (c, X(d, a'), a)_{Z,Y} + (c, d, Y(a', a))_{Z,X} \overset{Lemma 1.3}{=}$$
$$Z(c, (d, a', a)_{X,Y}) + Y((c, d, a')_{Z,X}, a) \overset{(1.8),(1.9),(1.12)}{\Rightarrow}$$
$$(a, c, X(d, a'))_{Z,Y} = 0; \forall a \in A, c \in C, Y, Z \in \Sigma,$$
$$(Z(b, d), a', c)_{X,Y} - (b, X(d, a'), c)_{Z,Y} + (b, d, Y(a', c))_{Z,X} \overset{Lemma 1.3}{=}$$
$$Z(b, (d, a', c)_{X,Y}) + Y((b, d, a')_{Z,X}, c) \overset{(1.8),(1.9),(1.12)}{\Rightarrow}$$

$$(b, c, X(d, a'))_{Z,Y} = 0; \forall b \in B, c \in C, Y, Z \in \Sigma.$$

Таким образом, $X(d, a') \in D$. Остальные случаи доказываются аналогично.

Обозначим через (A, B, C) подалгебру R, порождённую подалгебрами A, B и C, т.е (A, B, C) есть наименьшая подалгебра g-алгебры R, содержащая подалгебры A, B, C.

Пусть $(A; \Sigma)$ – бинарная алгебра, $a_1, ..., a_n \in A$ и $X_1, ..., X_{n-1} \in \Sigma$. Терм $a_1 a_2 ... a_n$, где скобки и операции $X_1, ..., X_{n-1}$ распределены неким образом, называется произведением или n-произведением элементов $a_1, ..., a_n$ в отношении операций $X_1, ..., X_{n-1}$(или просто n-произведением).

Рассмотрим теперь следующее подмножество g-алгебры R: $P = \{\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_n w_n | n \in N, \beta_i \in \Phi, w_i$ есть k_i-произведение ($k_i \in N$) элементов из $A \cup B \cup C, i \in \{1, 2, ..., n\}\}$. Очевидно, что P содержит A, B, C и $P \subseteq (A, B, C)$. С другой стороны, P замкнут относительно модульных операций и бинарных операций из Σ, т.е. P – подалгебра g-алгебры R содержащая A, B и C, следовательно, $P = (A, B, C)$.

Пусть w есть n-произведение элементов из $A \cup B \cup C$. Скажем, что w – нормальное произведение, если $n = 1$ или для всех k ($n \geq k \geq 2$) каждое k-произведение, которое есть часть произведения w, представляет из себя произведение элемента из $A \cup B \cup C$ и некоторого $(k-1)$-произведения.

Согласно условиям $(2.1), (2.2)$, каждое нормальное произведение w принадлежит D, т.е.

$$(A, B, w)_{X,Y} = 0, \tag{2.3}$$

$$(A, C, w)_{X,Y} = 0, \tag{2.4}$$

$$(C, B, w)_{X,Y} = 0, \tag{2.5}$$

для всех $X, Y \in \Sigma$.

Покажем, что произведение нормальных произведений представима в виде суммы нормальных произведений. Достаточно показать, что произведение двух нормальных произведений представима в виде суммы нормальных произведений. Докажем это через индукцию.

Пусть n-произведение v и k-произведение w – нормальные произведения.

(1) Пусть $n = 1$, то есть $v \in A \cup B \cup C$ и следовательно, $X(v, w)$ – нормальное произведение для любого $X \in \Sigma$;

(2) Пусть $X(v_1, w_1)$ есть сумма нормальных произведений для каждого n'-произведения v_1 и k'-произведения w_1, где $n > n'$;

(a) $v = X(v', a)$, где $a \in A$. Имеем:

$$Y(v, w) = Y(X(v', a), w) = X(v', Y(a, w)) - (v', a, w)_{X,Y} \overset{(1.9)}{=}$$

$$X(v', Y(a, w)) + (v', w, a)_{X,Y} =$$

$$X(v', Y(a, w)) + X(v', Y(w, a)) - Y(X(v', w), a)$$

(b) $v = X(a, v')$, где $a \in A$. Имеем:

$$Y(v, w) = Y(X(a, v'), w) = X(a, Y(v', w)) - (a, v', w)_{X,Y} \overset{(1.7)}{=}$$

$$X(a, Y(v', w)) + (v', a, w)_{X,Y} =$$

$$X(a, Y(v', w)) + X(v', Y(a, w)) - Y(X(v', a), w)$$

Случаи $v = X(v', b)$ и $v = X(b, v')$, $v = X(v', c)$ и $v = X(c, v')$, где $b \in B, c \in C$, доказываются аналогично.

Каждое n-произведение элеметнов из $A \cup B \cup C$ – нормальное произведение или есть произведение нормальных произведений элементов из $A \cup B \cup C$, следовательно, элементы подалгебры (A, B, C) представимы как сумма нормальных произведений. Справедливы следующие условия:

$$(a, v, w)_{X,Y} = 0, \tag{2.6}$$

$$(b, v, w)_{X,Y} = 0, \tag{2.7}$$

$$(c, v, w)_{X,Y} = 0, \tag{2.8}$$

где n-произведение v и k-произведение w – нормальные произведения и $a \in A, b \in B, c \in C$ и $X, Y \in \Sigma$.

Покажем, что

$$(u, v, w)_{X,Y} = 0, \tag{2.9}$$

где $X, Y \in \Sigma$ и n-произведение u, m-произведение v, k-произведение w – нормальные произведения.

Докажем условие (2.9) индукцией по n. При $n = 1$ доказательство следует из условий (2.6), (2.7), (2.8);

Пусть $(u', v', w')_{X,Y} = 0$ для любого n'-произведения u', m'-произведения v' и k'-произведения w', где $n > n'$;

(1) $u = Z(u', a)$, где $a \in A$. Имеем:

$$(Z(u', a), v, w)_{X,Y} - (u', X(a, v), w)_{Z,Y} + (u', a, Y(v, w))_{Z,X} =$$

$$Z(u', (a, v, w)_{X,Y}) + Y((u', a, v)_{Z,X}, w) \overset{(1.7),(1.9),(2.6)}{\Rightarrow}$$

$$(u, v, w)_{X,Y} = 0.$$

(2) $u = Z(a, u')$, где $a \in A$. Имеем:

$$(Z(a, u'), v, w)_{X,Y} - (a, X(u', v), w)_{Z,Y} + (a, u', Y(v, w))_{Z,X} =$$

$$Z(a, (u', v, w)_{X,Y}) + Y((a, u', v)_{Z,X}, w) \overset{(1.7),(1.9),(2.6)}{\Rightarrow}$$

$$(u, v, w)_{X,Y} = 0.$$

Случаи $u = Z(u', b)$, $u = Z(b, u')$, $u = Z(u', c)$ и $u = Z(c, u')$, где $b \in B, c \in C$, доказываются аналогично.

Итак, каждый элемент из (A, B, C) представим в виде суммы нормальных произведений, следовательно, согласно условию (2.9), получим, что подалгебра (A, B, C) – сверхассоциативна.

□

3. Следствия

Следствие 3.1. *Пусть $R(+, \Sigma, \Phi)$ – сверхальтернативная g-алгебра и $A, B \subseteq R$ подалгебры и $*$-подмножества. Тогда подалгебра (A, B) данной g-алгебры R порождённой подалгебрами A и B – сверхассоциативна.*

Следствие 3.2. *Пусть $R(+, \Sigma, \Phi)$ – сверхальтернативная g-алгебра и для некоторых элементов $a, b, c \in R$ выполняется следующее котождество в $(R; \Sigma)$:*

$$X(a, Y(b, c)) = Y(X(a, b), c),$$

т.е. $(a, b, c)_{X,Y} = 0$ для всех $X, Y \in \Sigma$. Тогда подалгебра g-алгебры R, порождённая элементами a, b, c – сверхассоциативна.

Следствие 3.3. *Пусть $R(+, \Sigma, \Phi)$ – сверхальтернативная g-алгебра и $a, b \in R$. Тогда подалгебра g-алгебры R, порождённая элементами a, b – сверхассоциативна.*

Открытая проблема

Доказать теорему типа Келли для сверхассоциативных(сверхальтернативных) g-алгебр.

Abstract. The following Artin theorem for linear algebras defined on commutative and associative ring with unit is well known: In the alternative linear algebra any two its elements generate an associative subalgebra; moreover if $(a, b, c) = 0$ then the subalgebra generated by the elements a, b, c is associative. In this paper we suggest a larger generalization of this classical result, using the concepts of hyperidentity and coidentity. The corresponding structures we call g-algebras.

Список литературы

[1] P. J. Higgins, "Groups with multiple operators", Proc. London Math. Soc. , **6**, 366 -– 416 (1956) (Русский перевод в сб. Математика 3, но. 4, 55–106. (1959)).
[2] A. G. Kurosh, Lectures on General Algebra, Chelsea, New York, (1963).
[3] A. G. Kurosh, "Multioperator rings and algebras", Uspekhi Mat. Nauk, **24**:1(145), 3 – 15 (1969); Russian Math. Surveys, **24**:1, 1 – 13 (1969).
[4] K. A. Zhevlakov, A. M. Slinko, I. P. Shestakov and A. I. Shirshov, Rings that are Nearly Associative, Pure and Applied Mathematics, 104, Academic Press, Inc., New York-London (1982).
[5] S. Burris and H. P. Sankappanavar, A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag (1981).
[6] C. C. Chang and H. J. Keisler, Model Theory, Nort-Holland, Amsterdam (1973).
[7] A. Church, Introduction to Mathematical Logic, Princeton University Press, **1** (1956).
[8] A. I. Mal'tsev, "Some questions of the theory of classes of models" [in Russian], Proceedings of the IVth All-Union Mathematical Congress **1**, 169 – 198 (1963).
[9] A. I. Mal'tsev, Algebraic Systems, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag (1973).
[10] K. Denecke and J. Koppitz, M-Solid Varieties of Algebras, Springer (2006).
[11] Yu. M. Movsisyan, Introduction to the Theory of Algebras With Hyperidentities [in Russian], Yerevan State University Press (1986).
[12] Yu. M. Movsisyan, Hyperidentities and Hypervarieties in Algebras [in Russian], Yerevan State University Press (1990).
[13] Yu. M. Movsisyan, "Hyperidentities in algebras and varieties", Russian Math. Surveys, **53**(1), 57 – 108 (1998).
[14] Yu. M. Movsisyan, Hyperidentities and Related Concepts, I, Armen. J. Math., **2**, 146 – 222 (2017).
[15] Yu. M. Movsisyan, Hyperidentities and Related Concepts, II, Armen. J. Math. **4**, 1 – 85 (2018).
[16] Yu. M. Movsisyan, A. B. Romanowska and J. D. H. Smith, "Superproducts, hyperidentities, and algebraic structures of logic programming", J. Combin. Math. Combin. Comput., **58**, 101 – 111 (2006).
[17] L. A. Skornyakov(ed.), General Algebra 2 [in Russian], M., Nauka (1991).
[18] Yu. M. Movsisyan, "Coidentities in algebras", Reports of NAS RA, **2**(77), 51 – 54 (1983).
[19] B. I. Plotkin, Automorphisms Groups of Algebraic Systems [in Russian], Moscow, Nauka (1966).
[20] Yu. M. Movsisyan, "Hyperidentities and hypervarieties", Scientiae Mathematicae Japonicae, **54**, 595 – 640 (2001).
[21] W. E. Barnes, "On Γ-rings of Nobusawa", Pacific J. Math., **3**, 411 – 422 (1966).
[22] V. D. Belousov, "Systems of quasigroups with generalized identities", Russian Math. Surveys, **20**, 73 – 143 (1965).
[23] N. Kehayopulu, "On regular duo po-Γ-semigroups", Math. Slovaca, **6**(61), 871 – 884 (2011).
[24] J. Luh, "On the theory of simple Γ-rings", Michigan Math. J., **16**, 65 – 75 (1969).

[25] N. Nobusawa, “On a generalization of the ring theory”, Osaka J. Math., **1**, 81 – 89 (1964).
[26] S. K. Sardar, S. Gupta and K. P. Shum, “Γ-semigroups with unities and Morita equivalence for monoids”, European Journal of Pure and Applied Mathematics, **6**(1), 1 – 10 (2013).
[27] M. K. Sen, “On Γ-semigroup”, In: Algebra and Its Applications (New Delhi, 1981), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **91**, 301 – 308 (1984).
[28] M. K. Sen and N. K. Saha, “On Γ-semigroup”, I. Bull. Calcutta Math. Soc., **78**, 180 – 186 (1986).
[29] M. K. Sen and S. Chattopadhyay, Γ-Semigroups, A Survey, In Book: Algebra and Its Applications (2016).
[30] A. Seth, “Γ-group congruences on regular Γ-semigroups”, Int. J. Math. Math. Sci., **15**(1), 103 – 106 (1992).
[31] A. V. Zuchok, Relatively Free Doppelsemigroups, Potsdam University Press (2018).
[32] A. V. Zuchok, Y. V. Zhuchok and J. Koppitz, Free Rectangular Doppelsemigroups, J. Algebra Appl. (2019).
[33] Yu. M. Movsisyan, “Biprimitive classes of algebras of second degree” [in Russian], Matematicheskie Issledovaniya, **9**, 70 – 84 (1974).
[34] R. H. Bruck and E. Kleinfeld, “The structure of alternative division rings”, Proceedings of the American Mathematical Society, **2**, 878 – 890 (1951).
[35] I. R. Hentzel and L. A. Peresi, “The Nucleus of the free alternative algebra”, Experimental Mathematics **15**(4), 445 – 470 (2006).

Поступила 19 мая 2020

После доработки 21 июля 2020

Принята к публикации 16 сентября 2020