

ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

К. АВЕТИСЯН

Ереванский государственный университет¹

E-mail: *avetkaren@ysu.am*

Аннотация. В статье изучается действие оператора дробного интегрирования в весовых лебеговых классах и пространствах со смешанной нормой в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$. Мы уточняем и обобщаем некоторые результаты Харди, Литтлвуда и Флетта.

MSC2010 number: 26A33; 26D10.

Ключевые слова: дробное интегрирование; дробное дифференцирование; весовые пространства Лебега; пространства со смешанной нормой.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Первые результаты о действии операторов дробного интегрирования в лебеговых классах восходят к Харди и Литтлвуду [1], [2], [3]. В частности, они показали насколько дробный интеграл $D^{-\alpha}f$ "лучше" самой функции $f \in L^p$, именно, оператор дробного интегрирования $D^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) ограниченно действует из пространства L^p ($1 < p < 1/\alpha$) в пространство L^q ($q = \frac{p}{1-\alpha p}$). Харди и Литтлвуд [1], [2], [3] установили также разнообразные весовые аналоги, в том числе для голоморфных функций. Различные обобщения можно найти в работах Флетта [4], [5], Карапетянца и Рубина [6]. В настоящей статье мы намерены выяснить действие операторов дробного интегрирования на весовых пространствах Лебега со смешанной нормой $L(p, q, \alpha)$.

Пусть $B = B_n$ — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) и $S = \partial B$ — его граница, единичная сфера. Интегральные средние порядка p функции $f(x) = f(r\zeta)$ на сфере $|x| = r$ обозначаются через

$$M_p(f; r) := \|f(r\cdot)\|_{L^p(S; d\sigma)}, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < p \leq \infty,$$

¹Настоящее исследование выполнено при поддержке Центра Математических Исследований Ереванского Государственного Университета

где $d\sigma$ — $(n-1)$ -мерная поверхностная мера Лебега на S , нормированная так, что $\sigma(S) = 1$.

По определению пространство со смешанной нормой $L(p, q, \alpha)$ ($0 < p, q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}$) есть множество тех функций f , измеримых в единичном шаре B , для которых конечна норма (квазинорма)

$$\|f\|_{L(p,q,\alpha)} := \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(f; r) dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq r < 1} (1-r)^\alpha M_p(f; r), & q = \infty. \end{cases}$$

Иногда будем обращаться к чуть более общей версии смешанной нормы при $q < \infty$ и $\gamma \in \mathbb{R}$

$$\|f\|_{L(p,q,\alpha; r^\gamma dr)} := \left[\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(f; r) r^\gamma dr \right]^{1/q} = \|r^{\gamma/q} f\|_{L(p,q,\alpha)}.$$

Точки в $\mathbb{R}^n$ будем представлять в виде $x = r\zeta$, где $\zeta \in S$, $|x| = r$. Символы $C(\alpha, \beta, \dots)$, C_α и т.п. будут обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от указанных параметров. Условимся через $\mathbb{N}$ обозначать множество положительных целых чисел, а через $[\alpha]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $\alpha \in \mathbb{R}$, т.е. целую часть числа α . Для вещественных выражений A и B , символ $A \approx B$ означает двустороннее неравенство $c_1|A| \leq |B| \leq c_2|A|$ с некоторыми несущественными положительными постоянными c_1 и c_2 , независимыми от участвующих переменных.

Определение 1.1. (Дробный интеграл и производная Римана-Лиувилля)

Для функции $f(r)$ одной переменной $r \in [0, 1)$, определим

$$\begin{aligned} D^{-\alpha} f(r) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tr) dt, \\ D^m f(r) &:= \left(\frac{d}{dr} \right)^m f(r), \quad D^\alpha f(r) := D^{-(m-\alpha)} D^m f(r), \quad D^0 f := f, \end{aligned}$$

где $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$.

Определение 1.2. (Дробный интеграл и производная Римана-Лиувилля на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) Для заданной функции $f(x)$ в единичном шаре B определим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-\alpha} f(x) &\equiv \mathcal{D}_n^{-\alpha} f(x) := r^{-(\alpha+n/2-1)} D^{-\alpha} \left\{ r^{n/2-1} f(x) \right\} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tx) t^{n/2-1} dt, \\ \mathcal{D}^\alpha f(x) &\equiv \mathcal{D}_n^\alpha f(x) := r^{-(n/2-1)} D^\alpha \left\{ r^{n/2-1} f(x) \right\}, \quad r = |x|, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Последняя версия радиальной дробной производной на $\mathbb{R}^n$ была введена в [7] и позволяет упростить ее применение в весовых пространствах. Определим также чуть более общий дробный интеграл на $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.3. Для $\alpha > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, определим

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_{n,\gamma}^{-\alpha} f(x) &:= r^{-(\alpha+\gamma+n/2-1)} D^{-\alpha} \left\{ r^{\gamma+n/2-1} f(x) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tx) t^{\gamma+n/2-1} dt. \end{aligned}$$

Как видим, $\tilde{\mathcal{D}}_{n,\gamma}^{-\alpha}$ отличается от $\mathcal{D}^{-\alpha}$ лишь несущественным множителем t^γ в подынтегральном выражении. Можно положить $\gamma + n/2 > 0$. Очевидно, что $\tilde{\mathcal{D}}_{n,0}^{-\alpha} = \mathcal{D}^{-\alpha}$ и $|\tilde{\mathcal{D}}_{n,\gamma}^{-\alpha} f(x)| \leq \mathcal{D}^{-\alpha} |f(x)|$, если $\gamma \geq 0$. Из общей формулы

$$\mathcal{D}^m f(x) = r^{-(n/2-1)} \frac{\partial^m}{\partial r^m} \left[r^{m-1+n/2} f(x) \right], \quad m \in \mathbb{N},$$

полезно явно выразить дробные производные первого и второго порядков

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}^1 f(x) &= \frac{n}{2} f + r \frac{\partial f}{\partial r}, \\ \mathcal{D}^2 f(x) &= \left(1 + \frac{n}{2}\right) \frac{n}{2} f(x) + 2 \left(1 + \frac{n}{2}\right) r \frac{\partial f}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Хорошо известно, насколько совершенно действует дробное интегродифференцирование в весовых пространствах Бергмана в единичном круге $\mathbb{D} = B_2$, т.е. весовых классах голоморфных (или гармонических) функций, интегрируемых по площади. В частности,

$$(1.3) \quad \|\mathcal{D}_2^{-\beta} f\|_{L(p,p,\alpha-\beta)} \leq C(p,\alpha) \|f\|_{L(p,p,\alpha)}, \quad \alpha > \beta > 0, \quad 0 < p < \infty,$$

для всех голоморфных функций в круге (см., например, [2, Теор.8], [5, Теор.6]). Обратное неравенство также верно. Поэтому может показаться несколько странным, что неравенство (1.3) при $p = 1$ нарушается для общих измеримых функций. Действительно, выберем функцию $h_0(x) = h_0(r) := r^{-1} (\log \frac{2}{r})^{-2}$, $0 < r < 1$, посчитаем и оценим нормы

$$\begin{aligned} \|h_0\|_{L(1,1,\alpha)} &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} h_0(r) dr = \int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha-1}}{r (\log \frac{2}{r})^2} dr < +\infty, \text{ т.е. } h_0 \in L(1,1,\alpha), \\ \|\mathcal{D}_2^{-\beta} h_0\|_{L(1,1,\alpha-\beta)} &\geq C \int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha-\beta-1}}{r \log \frac{4}{r}} dr = +\infty, \text{ т.е. } \mathcal{D}_2^{-\beta} h_0 \notin L(1,1,\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Этот же контрпример h_0 применим, когда рассматриваются пространства со смешанной нормой $L(p,1,\alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$, вместо $L(p,p,\alpha)$ в (1.3).

Цель настоящей статьи — получить неравенства типа (1.3) с дробным интегрированием на пространствах Лебега со смешанной нормой $L(p, q, \alpha)$. Различные дробные операторы, весовые функции и индексы возможно приведут к разным результатам.

2. НЕРАВЕНСТВА ФЛЕТТА И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Приведем некоторые неравенства типа Харди, полученные Флеттом [4, р. 490-491], [5, р. 758].

Лемма А. ([4], [5]) Для $1 \leq q < \infty$, $\alpha > \beta > 0$, $\lambda < 1 - \frac{1}{q}$, и измеримой функции $h(r) \geq 0$, имеет место неравенство

$$(2.1) \quad \int_0^1 (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1} r^{q(\lambda-\beta)} \left(D^{-\beta} h(r) \right)^q dr \leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} r^{q\lambda} h^q(r) dr,$$

где $C = C(q, \alpha, \beta, \lambda)$, и более простое неравенство

$$(2.2) \quad \int_0^1 (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1} \left(D^{-\beta} h(r) \right)^q dr \leq C(q, \alpha, \beta) \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} h^q(r) dr.$$

Замечание 2.1. Неравенства (2.1), (2.2) можно считать обобщениями известных неравенств Харди (см., например, [3]) на случай дробных интегралов произвольного порядка. При $\beta = 1$ неравенство (2.2) как раз сводится к одному из классических неравенств Харди. Тем не менее, неравенства (2.1), (2.2) вполне могут быть уточнены и улучшены по нескольким направлениям. Например, для более общих весовых функций (так называемых нормальных функций) неравенства типа (2.1), (2.2) были получены в [8], [9].

С другой стороны, неравенство (2.2) при $q = 1$ можно обобщить до тождества. Кроме того, нас интересует возможность замены оператора дробного интегрирования $D^{-\beta}$ на другой. Эти и некоторые другие уточнения содержатся в нижеследующей лемме.

Лемма 2.1. (i) При $q = 1$, $\alpha > \beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, справедливы тождества

$$(2.3) \quad \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\beta-1} D^{-\beta} h(r) dr = \frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} h(r) dr,$$

$$(2.4) \quad \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\beta-1} r^{\beta+\gamma+n/2-1} \tilde{\mathcal{D}}_{n,\gamma}^{-\beta} h(r) dr = \frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{\gamma+n/2-1} h(r) dr,$$

(ii) Если $1 \leq q < \infty$, $\alpha > \beta > 0$, $\lambda < 1 - 1/q$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, $h(r) \geq 0$, то

$$(2.5) \quad \int_0^1 (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1} r^{q(\lambda+\gamma+n/2-1)} \left(\tilde{\mathcal{D}}_{n,\gamma}^{-\beta} h(r) \right)^q dr \leq \\ \leq C(q, \alpha, \beta, \lambda) \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} r^{q(\lambda+\gamma+n/2-1)} h^q(r) dr,$$

$$(2.6) \quad \int_0^1 (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1} r^{q(\beta+\gamma+n/2-1)} \left(\tilde{\mathcal{D}}_{n,\gamma}^{-\beta} h(r) \right)^q dr \leq \\ \leq C(q, \alpha, \beta) \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} r^{q(\gamma+n/2-1)} h^q(r) dr.$$

В частности, если $1 < q < \infty$ либо $1 \leq q < \infty$, $n \geq 3$, то

$$(2.7) \quad \int_0^1 (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1} (\mathcal{D}^{-\beta} h(r))^q dr \leq C(q, \alpha, \beta) \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} h^q(r) dr.$$

Доказательство. (i) Теорема Фубини и замена переменных $r-t = \xi(1-t)$, $1-r = (1-t)(1-\xi)$ приводят к

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\beta-1} D^{-\beta} h(r) dr &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\beta-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^r (r-t)^{\beta-1} h(t) dt \right] dr = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \left[\int_t^1 (r-t)^{\beta-1} (1-r)^{\alpha-\beta-1} dr \right] h(t) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 \xi^{\beta-1} (1-\xi)^{\alpha-\beta-1} d\xi \right] h(t) dt = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} h(t) dt. \end{aligned}$$

Тождество (2.3) доказано. Далее заменим $h(r)$ на $r^{\gamma+n/2-1} h(r)$ в (2.3) и получим тождество (2.4),

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{\gamma+n/2-1} h(r) dr &= \\ &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\beta-1} r^{\beta+\gamma+n/2-1} r^{-(\beta+\gamma+n/2-1)} D^{-\beta} \{ r^{\gamma+n/2-1} h(r) \} dr = \\ &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\beta-1} r^{\beta+\gamma+n/2-1} \tilde{\mathcal{D}}_{n,\gamma}^{-\beta} h(r) dr. \end{aligned}$$

(ii) Для доказательства (2.5) и (2.6) достаточно заменить $h(r)$ на $r^{\gamma+n/2-1} h(r)$ в (2.1) и (2.2), соответственно.

В частном случае $1 < q < \infty$ либо $1 \leq q < \infty$, $n \geq 3$, можно выбрать $\gamma = 0$, $\lambda = -(n/2 - 1) \leq 0$ и получить (2.7). $\square$

Замечание 2.2. Можно допустить упрощающее обозначение $s := q(\lambda + \gamma + n/2 - 1)$ и переписать (2.5) в эквивалентном виде

$$(2.8) \quad \int_0^1 (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1} r^s \left(\tilde{\mathcal{D}}_{n,\gamma}^{-\beta} h(r) \right)^q dr \leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} r^s h^q(r) dr,$$

если только $s < q(\gamma + n/2) - 1$ или $\gamma > \frac{s+1}{q} - \frac{n}{2}$. При этом постоянная $C = C(q, \alpha, \beta, \gamma, s, n)$ зависит только от указанных параметров.

3. ПОЛУГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{D}^{\pm\alpha}$ И $\tilde{\mathcal{D}}_{n,\gamma}^{-\alpha}$

В этом разделе мы выведем несколько вспомогательных формул типа полугрупповых или коммутационных для дробных операторов $\mathcal{D}^{\pm\alpha}$ и $\tilde{\mathcal{D}}_{n,\gamma}^{-\alpha}$. Некоторые тождества такого типа уже были нами установлены в [10] при $n = 2$.

Лемма 3.1. Для $m \in \mathbb{N}$ и достаточно гладкой функции $f(x)$ в единичном шаре B имеют место следующие "полугрупповые" формулы:

$$(3.1) \quad \mathcal{D}^{-\alpha-\beta} f = r^{-\beta} \mathcal{D}^{-\alpha} \{ r^{\beta} \mathcal{D}^{-\beta} f \} = \tilde{\mathcal{D}}_{n,\beta}^{-\alpha} \mathcal{D}^{-\beta} f, \quad \alpha, \beta > 0,$$

$$(3.2) \quad \mathcal{D}^{-\alpha} \mathcal{D}^{\beta} f = r^{-\beta} \mathcal{D}^{-(\alpha-\beta)} \{ r^{\beta} f \} = \tilde{\mathcal{D}}_{n,\beta}^{-(\alpha-\beta)} f, \quad \alpha > \beta > 0,$$

$$(3.3) \quad r^{-\beta} \mathcal{D}^{-\alpha} \{ r^{\beta} f \} = \tilde{\mathcal{D}}_{n,\beta}^{-\alpha} f, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R},$$

$$(3.4) \quad \mathcal{D}^{-\alpha} \mathcal{D}^{\beta} f = r^{-\alpha} \mathcal{D}^{\beta-\alpha} \{ r^{\alpha} f \}, \quad \beta > \alpha > 0,$$

$$(3.5) \quad \mathcal{D}^{\delta} f = r^{m-\delta} \mathcal{D}^{-(m-\delta)} \mathcal{D}^m \{ r^{-(m-\delta)} f \}, \quad 0 < \delta \leq m,$$

$$(3.6) \quad \mathcal{D}^{\delta} f = \tilde{\mathcal{D}}_{n,\delta-1}^{-(1-\delta)} \left[(\delta-1)f + \mathcal{D}^1 f \right], \quad 0 < \delta \leq 1,$$

$$(3.7) \quad \mathcal{D}^{-\alpha} \mathcal{D}^m f = \mathcal{D}^m \mathcal{D}^{-\alpha} f, \quad \alpha > 0.$$

Доказательство. Поочередно докажем все семь тождеств, сохраняя их нумерацию.

(3.1) Согласно Определениям 1.1–1.3 операторов $\mathcal{D}^{\pm\alpha}$, $\mathcal{D}^{\pm\alpha}$, $\tilde{\mathcal{D}}^{\pm\alpha}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-\alpha-\beta} f &= r^{-(\alpha+\beta+n/2-1)} \mathcal{D}^{-\alpha-\beta} \{ r^{n/2-1} f(x) \} = \\ &= r^{-(\alpha+\beta+n/2-1)} \mathcal{D}^{-\alpha} \left[r^{\beta+n/2-1} r^{-(\beta+n/2-1)} \mathcal{D}^{-\beta} \{ r^{n/2-1} f(x) \} \right] = \\ &= r^{-\beta} \mathcal{D}^{-\alpha} \left[r^{\beta} \mathcal{D}^{-\beta} f(x) \right] = \\ &= r^{-\beta} r^{\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \mathcal{D}^{-\beta} f(tx) t^{\beta+n/2-1} dt = \tilde{\mathcal{D}}_{n,\beta}^{-\alpha} \mathcal{D}^{-\beta} f(x). \end{aligned}$$

(3.2) Используя формулы обращения для $\mathcal{D}^{\pm\alpha}$, а также (1.1) и (3.1), получаем для $\alpha > \beta > 0$

$$\mathcal{D}^{-\alpha} \mathcal{D}^{\beta} f = \mathcal{D}^{-(\alpha-\beta)-\beta} \mathcal{D}^{\beta} f = r^{-\beta} \mathcal{D}^{-(\alpha-\beta)} \{ r^{\beta} \mathcal{D}^{-\beta} \mathcal{D}^{\beta} f \} =$$

$$= r^{-\beta} \mathcal{D}^{-(\alpha-\beta)} \{r^\beta f\} = \tilde{\mathcal{D}}_{n,\beta}^{-(\alpha-\beta)} f.$$

(3.3) Аналогичным образом,

$$r^{-\beta} \mathcal{D}^{-\alpha} \{r^\beta f(x)\} = r^{-\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} (tr)^\beta f(tx) t^{n/2-1} dt = \tilde{\mathcal{D}}_{n,\beta}^{-\alpha} f(x).$$

(3.4) Применяя формулы обращения и Определения 1.1–1.3 с $\beta > \alpha > 0$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-\alpha} \mathcal{D}^\beta f &= r^{-(\alpha+n/2-1)} D^{-\alpha} \{r^{n/2-1} \mathcal{D}^\beta f\} = \\ &= r^{-(\alpha+n/2-1)} D^{\beta-\alpha} D^{-\beta} \{r^{n/2-1} \mathcal{D}^\beta f\} = \\ &= r^{-(\alpha+n/2-1)} D^{\beta-\alpha} r^{\beta+n/2-1} \mathcal{D}^{-\beta} \{r^{-(n/2-1)} r^{n/2-1} \mathcal{D}^\beta f\} = \\ &= r^{-(\alpha+n/2-1)} D^{\beta-\alpha} \{r^{\beta+n/2-1} f\} = r^{-\alpha} \mathcal{D}^{\beta-\alpha} \{r^\alpha f\}, \end{aligned}$$

что доказывает тождество (3.4).

(3.5) Для доказательства тождества (3.5) достаточно в (3.4) заменить β на m , также α на $m - \delta$, а затем функцию $r^{m-\delta} f(x)$ на $f(x)$.

(3.6) Преобразуем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^1 \{r^{-(1-\delta)} f\} &= \frac{n}{2} r^{-(1-\delta)} f + r D^1 \{r^{-(1-\delta)} f\} = \\ &= \frac{n}{2} r^{-(1-\delta)} f + r \left[-(1-\delta) r^{-(2-\delta)} f + r^{-(1-\delta)} D^1 f \right] = \\ &= r^{-(1-\delta)} \left[\left(\delta + \frac{n}{2} - 1 \right) f + r D^1 f \right] = r^{-(1-\delta)} \left[(\delta - 1) f + \mathcal{D}^1 f \right]. \end{aligned}$$

Отсюда посредством уже доказанных тождеств (3.5) и (3.3) приходим к

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\delta f &= r^{1-\delta} \mathcal{D}^{-(1-\delta)} \mathcal{D}^1 \{r^{-(1-\delta)} f\} = \\ &= r^{1-\delta} \mathcal{D}^{-(1-\delta)} r^{-(1-\delta)} \left[(\delta - 1) f + \mathcal{D}^1 f \right] = \tilde{\mathcal{D}}_{n,\delta-1}^{-(1-\delta)} \left[(\delta - 1) f + \mathcal{D}^1 f \right], \end{aligned}$$

что и требовалось.

(3.7) Вначале докажем более простую формулу коммутации

$$(3.8) \quad r^m D^m \mathcal{D}^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}^{-\alpha} \{r^m D^m f(x)\}, \quad x = r\zeta.$$

Для этого раскроем ее, пользуясь очевидной формулой $\frac{\partial^m}{\partial r^m} f(tr\zeta) = t^m \frac{\partial^m}{\partial (tr)^m} f(tr\zeta)$,

$$\begin{aligned} r^m D^m \mathcal{D}^{-\alpha} f(x) &= r^m \frac{\partial^m}{\partial r^m} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tx) t^{n/2-1} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \left[(tr)^m \frac{\partial^m}{\partial (tr)^m} f(tx) \right] t^{n/2-1} dt = \mathcal{D}^{-\alpha} \{r^m D^m f(x)\}, \end{aligned}$$

что совпадает (3.8).

Аналогично формулам (1.2) для $m = 1, 2$, теперь для произвольного $m \in \mathbb{N}$ найдутся постоянные $c_k = c_k(n) > 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$), зависящие только от n такие, что

$$(3.9) \quad \mathcal{D}^m f(x) = r^{-(n/2-1)} D^m \{r^{m+n/2-1} f(x)\} = \sum_{k=0}^n c_k r^k D^k f(x).$$

Тогда посредством (3.8) и (3.9) получаем

$$\mathcal{D}^m \mathcal{D}^{-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^n c_k r^k D^k \mathcal{D}^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^n c_k r^k D^k f(x) \right\} = \mathcal{D}^{-\alpha} \mathcal{D}^m f(x).$$

Лемма 3.1 полностью доказана. $\square$

4. ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В ШАРЕ

Поскольку мы заинтересованы в вопросах дробного интегрирования на функциях, интегрируемых с весом в шаре, то нам необходимы точные оценки некоторых эталонных интегралов. Интеграл в нижеследующей лемме хорошо известен, в частности из теории гипергеометрической функции Гаусса, и мы нуждаемся в двусторонней оценке этого интеграла. Подобные оценки можно найти в [11, Лем.3.1], [12, Лем.6.1,6.3], [13]. Здесь мы дадим иное прямое и самодостаточное доказательство неравенств, основанное лишь на интегральных оценках без привлечения теории специальных функций.

Лемма 4.1. *При $\alpha, \lambda > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ имеют место двусторонние оценки*

$$(4.1) \quad \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt \approx \begin{cases} \frac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}, & \beta > \alpha, \\ 1, & \beta < \alpha, \\ \log \frac{2}{1-r}, & \beta = \alpha, \end{cases} \quad 0 \leq r < 1,$$

где участвующие (но явно не указанные) постоянные зависят лишь от α, β, λ .

Доказательство. Все неравенства в (4.1) тривиальны, если $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$. Поэтому достаточно доказать (4.1) только при $\frac{1}{2} \leq r < 1$ или $r \rightarrow 1^-$. Вначале, полагая $\beta > \alpha > 0$, оценим интеграл (4.1) сверху

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt &= \int_0^r \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt + \int_r^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt \leq \\ &\leq \int_0^r \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-t)^\beta} dt + \frac{1}{(1-r)^\beta} \int_r^1 t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^r \frac{t^{\lambda-1}}{(1-t)^{1+\beta-\alpha}} dt + \frac{1}{(1-r)^\beta} \int_r^1 t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1} dt.$$

Ввиду двух асимптотических соотношений при $r \rightarrow 1^-$

$$\int_0^r \frac{t^{\lambda-1}}{(1-t)^{1+\beta-\alpha}} dt \sim \frac{1}{(\beta-\alpha)(1-r)^{\beta-\alpha}}, \quad \int_r^1 t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1} dt \sim \frac{1}{\alpha} (1-r)^\alpha,$$

закключаем, что

$$\int_0^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt \leq C(\alpha, \beta, \lambda) \frac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}, \quad \frac{1}{2} \leq r < 1.$$

Обратно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt &\geq \int_r^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt \geq \frac{C_\lambda}{(1-r^2)^\beta} \int_r^1 (1-t)^{\alpha-1} dt = \\ &= \frac{C_\lambda}{\alpha(1-r^2)^\beta} (1-r)^\alpha \geq \frac{C_\lambda}{\alpha 2^\beta} \frac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}. \end{aligned}$$

Случай $\beta > \alpha > 0$ доказан. Переходя теперь к случаю $\beta < \alpha$, положим $0 < \beta < \alpha$ и оценим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt &\leq \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-t)^\beta} dt = B(\lambda, \alpha - \beta), \\ \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt &\geq \int_0^1 t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = B(\lambda, \alpha), \end{aligned}$$

где $B(\cdot, \cdot)$ — бета-функция Эйлера. В случае $\beta < 0$ доказательство аналогично.

Наконец в третьем случае $\beta = \alpha$ заметим, что $\frac{1-t}{1-rt} < 1$ и заменим переменную в интеграле

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\alpha} dt &= \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1-rt} \left(\frac{1-t}{1-rt} \right)^\alpha dt \leq \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1-rt} dt = \\ &= \frac{1}{r^\alpha} \int_0^r \frac{\eta^{\alpha-1}}{1-\eta} d\eta \sim \log \frac{1}{1-r} \quad \text{при } r \rightarrow 1^-. \end{aligned}$$

Этим доказана верхняя оценка. Для доказательства нижней оценки воспользуемся монотонным убыванием функции $\frac{1-t}{1-rt}$ по t ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1} (1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\alpha} dt &= \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1-rt} \left(\frac{1-t}{1-rt} \right)^\alpha dt \geq \int_0^r \frac{t^{\lambda-1}}{1-rt} \left(\frac{1-t}{1-rt} \right)^\alpha dt \geq \\ &\geq \int_0^r \frac{t^{\lambda-1}}{1-rt} \left(\frac{1-r}{1-r^2} \right)^\alpha dt \geq \frac{1}{2^\alpha} \int_0^r \frac{t^{\lambda-1}}{1-rt} dt \sim \frac{1}{2^\alpha} \log \frac{1}{1-r} \end{aligned}$$

при $r \rightarrow 1^-$. Этим Лемма 4.1 доказана. $\square$

Далее, нам потребуются точные оценки интегралов, схожих с (4.1). В следующей лемме мы уточняем оценки некоторых интегралов, рассмотренных Флеттом [4, (15.3), (15.4)].

Лемма 4.2. При $a \in \mathbb{R}$, $b, c > 0$, справедливы двусторонние оценки
(4.2)

$$J_1 = J_1(r) := \int_0^r \frac{(r-t)^{b-1} t^{c-1}}{(1-t)^a} dt \approx \begin{cases} \frac{r^{b+c-1}}{(1-r)^{a-b}}, & a > b, \\ r^{b+c-1}, & a < b, \\ r^{b+c-1} \log \frac{2}{1-r}, & a = b, \end{cases} \quad (0 < r < 1),$$

(4.3)

$$J_2 = J_2(\rho) := \int_\rho^1 \frac{(t-\rho)^{b-1} (1-t)^{c-1}}{t^a} dt \approx \begin{cases} \frac{(1-\rho)^{b+c-1}}{\rho^{a-b}}, & a > b, \\ (1-\rho)^{b+c-1}, & a < b, \\ (1-\rho)^{b+c-1} \log \frac{2}{\rho}, & a = b, \end{cases} \quad (0 < \rho < 1),$$

где неявно вовлеченные постоянные зависят лишь от a, b, c .

Доказательство. Первый интеграл J_1 немедленно оценивается заменой переменного $t = r\eta$,

$$J_1 = \int_0^r \frac{(r-t)^{b-1} t^{c-1}}{(1-t)^a} dt = r^{b+c-1} \int_0^1 \frac{(1-\eta)^{b-1} \eta^{c-1}}{(1-r\eta)^a} d\eta,$$

с дальнейшим применением Леммы 4.1. Второй интеграл J_2 сводится к J_1 заменой переменных $1-t = \eta(1-\rho)$ и $r = 1-\rho$. $\square$

На основе доказанных Лемм 4.1 и 4.2 мы дадим точные оценки интегралов (2.1) и (2.2) при $q = 1$, и тем самым уточним Лемму А Флетта.

Лемма 4.3. (i) При $\lambda < 0 < \beta < \alpha$, справедлива двусторонняя оценка

$$(4.4) \quad \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\beta-1} r^{\lambda-\beta} D^{-\beta} h(r) dr \approx \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^\lambda h(r) dr.$$

(ii) В предельном случае $\lambda = 0 < \beta < \alpha$, имеем

$$(4.5) \quad \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\beta-1} \mathcal{D}_2^{-\beta} h(r) dr \approx \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} h(r) \log \frac{2}{r} dr.$$

Доказательство. Из двух похожих оценок (4.4)-(4.5) докажем только вторую (4.5). При $\lambda = 0$ по теореме Фубини и (4.3) для оператора $\mathcal{D}_2^{-\beta} = r^{-\beta} D^{-\beta}$ выводим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\beta-1} r^{-\beta} D^{-\beta} h(r) dr \\ &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha-\beta-1} r^{-\beta} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^r (r-t)^{\beta-1} h(t) dt \right] dr = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \left[\int_t^1 \frac{(r-t)^{\beta-1} (1-r)^{\alpha-\beta-1}}{r^\beta} dr \right] h(t) dt \approx \\
 &\approx \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \log \frac{2}{t} h(t) dt,
 \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Перейдем к формулировке и доказательству основного результата настоящей статьи.

Теорема 4.1. *При $1 \leq p, q \leq \infty$ справедливы следующие пять утверждений, причем в каждом из них предполагается, что норма в правых частях неравенств (4.6)–(4.11) конечна.*

(i) *Для всех $\alpha > \beta > 0$ справедливо неравенство*

$$(4.6) \quad \|\mathcal{D}^{-\beta} f\|_{L(p,q,\alpha-\beta)} \leq C(q, \alpha, \beta) \|f\|_{L(p,q,\alpha)},$$

за исключением случая $q = 1$, $n = 2$, когда неравенство (4.6) нарушается.

(ii) *Для всех $1 \leq q < \infty$, $\alpha > \beta > 0$, $\gamma < \frac{qn}{2} - 1$ справедливо неравенство*

$$(4.7) \quad \|\mathcal{D}^{-\beta} f\|_{L(p,q,\alpha-\beta;r^\gamma dr)} \leq C(q, \alpha, \beta, \gamma) \|f\|_{L(p,q,\alpha;r^\gamma dr)}.$$

В частности, при $q = 1$, $n = 2$, имеем

$$(4.8) \quad \|\mathcal{D}_2^{-\beta} f\|_{L(p,1,\alpha-\beta;r^\gamma dr)} \leq C(\alpha, \beta, \gamma) \|f\|_{L(p,1,\alpha;r^\gamma dr)}, \quad \gamma < 0 < \alpha < \beta.$$

(iii) *При любых $\alpha > \beta > 0$, $\ell > \frac{1}{q} - \frac{n}{2}$ справедливо*

$$(4.9) \quad \|\tilde{\mathcal{D}}_{n,\ell}^{-\beta} f\|_{L(p,q,\alpha-\beta)} \leq C(q, \alpha, \beta, \ell) \|f\|_{L(p,q,\alpha)}.$$

(iv) *Если $0 < \alpha < \delta \leq k$, $j \leq \delta$ ($j, k \in \mathbb{N}$), то*

$$(4.10) \quad \|\mathcal{D}^j f\|_{L(p,q,\delta-\alpha)} \leq C(q, \alpha, \delta, j, k) \|\mathcal{D}^k f\|_{L(p,q,k-\alpha)}$$

для всех достаточно гладких функций f в B .

(v) *Если $0 < \alpha < \delta \leq [\alpha] + 1 < \delta + \frac{n}{2} - \frac{1}{q}$, то*

$$(4.11) \quad \|\mathcal{D}^\delta f\|_{L(p,q,\delta-\alpha)} \leq C(q, \alpha, \delta) \|\mathcal{D}^{[\alpha]+1} f\|_{L(p,q,[\alpha]+1-\alpha)}$$

для всех достаточно гладких функций f в B .

Доказательство. (i) **Случай $q = \infty$.** Полагая, что $f(x) \in L(p, \infty, \alpha)$, по определению имеем

$$(4.12) \quad (1-r)^\alpha M_p(f; r) \leq \|f\|_{L(p,\infty,\alpha)}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Последовательно применяя неравенство Минковского и (4.12), получаем

$$\begin{aligned} M_p(\mathcal{D}^{-\beta} f; r) &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} M_p(f; tr) dt \leq \\ &\leq \|f\|_{L(p, \infty, \alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\beta-1}}{(1-rt)^\alpha} dt \leq C(\alpha, \beta) \frac{\|f\|_{L(p, \infty, \alpha)}}{(1-r)^{\alpha-\beta}}. \end{aligned}$$

Следовательно $\|\mathcal{D}^{-\beta} f\|_{L(p, \infty, \alpha-\beta)} \leq C\|f\|_{L(p, \infty, \alpha)}$, как и требовалось.

Случай $1 \leq q < \infty$. Для $1 < q < \infty$, либо $1 \leq q < \infty$, $n \geq 3$, по неравенству Минковского и (2.7) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^{-\beta} f\|_{L(p, q, \alpha-\beta)}^q &= \\ &= \int_0^1 (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1} \left\| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} f(tr\zeta) t^{n/2-1} dt \right\|_{L^p(S; d\sigma)}^q dr \leq \\ &\leq \int_0^1 (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} \|f(tr\zeta)\|_{L^p(S; d\sigma)} t^{n/2-1} dt \right)^q dr = \\ &= \int_0^1 (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1} (\mathcal{D}^{-\beta} \|f\|_{L^p(S)})^q dr \leq \\ &\leq C(\alpha, \beta, q, n) \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \|f\|_{L^p(S)}^q dr = C\|f\|_{L(p, q, \alpha)}^q. \end{aligned}$$

Нарушение (4.6) при $q = 1$, $n = 2$ следует из (4.5), или же в этом можно убедиться применив контрпример h_0 из Введения.

(ii) Теперь применим более общее неравенство (2.8) с $\gamma = 0$, а также неравенство Минковского и оценим аналогично предыдущему утверждению (i). В результате получим

$$\|\mathcal{D}^{-\beta} f\|_{L(p, q, \alpha-\beta; r^\gamma dr)}^q \leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \|f\|_{L^p(S)}^q r^\gamma dr = C\|f\|_{L(p, q, \alpha; r^\gamma dr)}^q.$$

В частности, при $q = 1$, $n = 2$, имеем $\gamma < 0$.

(iii) **Случай** $1 \leq q < \infty$. Вновь по неравенству Минковского и (2.8), учитывая $\ell > \frac{1}{q} - \frac{n}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{D}}_{n, \ell}^{-\beta} f\|_{L(p, q, \alpha-\beta)}^q &\leq \int_0^1 (1-r)^{(\alpha-\beta)q-1} \left(\tilde{\mathcal{D}}_{n, \ell}^{-\beta} \|f\|_{L^p(S)} \right)^q dr \leq \\ &\leq C(\alpha, \beta, q, \ell, n) \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \|f\|_{L^p(S)}^q dr = C\|f\|_{L(p, q, \alpha)}^q. \end{aligned}$$

В частности, при $q = 1$, $n = 2$, получаем $\|\tilde{\mathcal{D}}_{2, \ell}^{-\beta} f\|_{L(p, 1, \alpha-\beta)} \leq C\|f\|_{L(p, 1, \alpha)}$, $\ell > 0$.

Случай $q = \infty$. По определению имеем $(1-r)^\alpha M_p(f; r) \leq \|f\|_{L(p, \infty, \alpha)}$ при $0 \leq r < 1$, предполагая что $f(x) \in L(p, \infty, \alpha)$. Для оценки применяем Лемму 4.1,

$$\begin{aligned} M_p(\tilde{\mathcal{D}}_{n, \ell}^{-\beta} f; r) &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} M_p(f; tr) t^{\ell+n/2-1} dt \leq \\ &\leq \|f\|_{L(p, \infty, \alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\beta-1}}{(1-rt)^\alpha} t^{\ell+n/2-1} dt \leq \\ &\leq C(\alpha, \beta, \ell, n) \frac{\|f\|_{L(p, \infty, \alpha)}}{(1-r)^{\alpha-\beta}}, \quad \alpha > \beta > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|\tilde{\mathcal{D}}_{n, \ell}^{-\beta} f\|_{L(p, \infty, \alpha-\beta)} \leq C(\alpha, \beta, \ell, n) \|f\|_{L(p, \infty, \alpha)}$, что и требовалось.

(iv) Для достаточно гладких функций и любых $0 < \alpha < \delta$, $1 \leq j \leq \delta \leq k$ ($j, k \in \mathbb{N}$), оцениваем, следуя формуле обращения $f = \mathcal{D}^{-k} \mathcal{D}^k f$ и формулам (3.7), (3.2), (4.9),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^j f\|_{L(p, q, \delta-\alpha)} &= \|\mathcal{D}^j \mathcal{D}^{-k} \mathcal{D}^k f\|_{L(p, q, \delta-\alpha)} = \|\mathcal{D}^{-k} \mathcal{D}^j \mathcal{D}^k f\|_{L(p, q, \delta-\alpha)} = \\ &= \|\tilde{\mathcal{D}}_{n, j}^{-(k-j)} \mathcal{D}^k f\|_{L(p, q, \delta-\alpha)} \leq C \|\mathcal{D}^k f\|_{L(p, q, \delta-\alpha+k-j)} \leq C \|\mathcal{D}^k f\|_{L(p, q, k-\alpha)}. \end{aligned}$$

(v) **Случай** $1 \leq q < \infty$. Обозначим $m := [\alpha] + 1$, так что $0 < \alpha < \delta \leq m = [\alpha] + 1 < \delta + \frac{n}{2} - \frac{1}{q}$. Преобразуем m -ую производную в (3.5) с использованием разложения (3.9) и правила дифференцирования Лейбница,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^m \{r^{-(m-\delta)} f(x)\} &= r^{-(n/2-1)} D^m \left[r^{\delta+n/2-1} f(x) \right] = \\ &= r^{-(n/2-1)} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left[D^{m-j} r^{\delta+n/2-1} \right] D^j f = \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} C(\delta, n, j) r^{\delta-m+j} D^j f = \\ &= r^{-(m-\delta)} \left[\sum_{j=0}^{m-1} C(\delta, m, n, j) r^j D^j f + r^m D^m f \right], \end{aligned}$$

или же в более точной форме в терминах $\mathcal{D}^k$,

$$(4.13) \quad r^{m-\delta} \mathcal{D}^m \{r^{-(m-\delta)} f(x)\} = \sum_{j=0}^{m-1} C_j(\delta, m) \mathcal{D}^j f + \mathcal{D}^m f.$$

Теперь преобразуем производную $\mathcal{D}^\delta f$ с помощью (3.5), (4.13), (3.3),

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\delta f(x) &= r^{m-\delta} \mathcal{D}^{-(m-\delta)} \left[\mathcal{D}^m \{r^{-(m-\delta)} f(x)\} \right] = \\ &= r^{m-\delta} \mathcal{D}^{-(m-\delta)} r^{-(m-\delta)} \left[\sum_{j=0}^{m-1} C_j(\delta, m) \mathcal{D}^j f + \mathcal{D}^m f \right] = \end{aligned}$$

$$(4.14) \quad = \tilde{\mathcal{D}}_{n,\delta-m}^{-(m-\delta)} \left[\sum_{j=0}^{m-1} C_j(\delta, m) \mathcal{D}^j f + \mathcal{D}^m f \right], \quad 0 < \delta \leq m < \delta + 1.$$

Перейдем к смешанным нормам, которые оценим используя (4.14), (4.9), (4.10) и условие $\delta - m > \frac{1}{q} - \frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\delta f\|_{L(p,q,\delta-\alpha)} &= \left\| \tilde{\mathcal{D}}_{n,\delta-m}^{-(m-\delta)} \left[\sum_{j=0}^{m-1} C_j(\delta, m) \mathcal{D}^j f + \mathcal{D}^m f \right] \right\|_{L(p,q,\delta-\alpha)} \\ &\leq C \left\| \sum_{j=0}^{m-1} C_j(\delta, m) \mathcal{D}^j f + \mathcal{D}^m f \right\|_{L(p,q,m-\alpha)} \\ &\leq C \sum_{j=0}^{m-1} C_j(\delta, m) \|\mathcal{D}^j f\|_{L(p,q,m-\alpha)} + \|\mathcal{D}^m f\|_{L(p,q,m-\alpha)} \\ &\leq C \|\mathcal{D}^m f\|_{L(p,q,m-\alpha)}, \end{aligned}$$

где последняя постоянная $C = C(q, \alpha, \delta, m, n)$ зависит от указанных параметров. Доказан случай $1 \leq q < \infty$ неравенства (4.11).

Случай $q = \infty$ аналогичен, детали доказательства опускаем. Теорема 4.1 полностью доказана. $\square$

Abstract. The paper studies the action of a fractional integration operator in weighted Lebesgue classes and mixed norm spaces on the unit ball of $\mathbb{R}^n$. We sharpen and generalize some results of Hardy, Littlewood and Flett.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, “Some properties of fractional integrals”, (I) Math. Z., **27**, 565 – 606 (1928); (II) Math. Z., **34**, 403 – 439 (1932).
- [2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, “Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions”, Quart. J. Math. (Oxford), **12**, 221 – 256 (1941).
- [3] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, Неравенства, Иностр.Лит., М. (1948). Translation: G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, Cambridge Univ. Press (1934).
- [4] T. M. Flett, Mean values of power series, Pacific J. Math., **25**, 463 – 494 (1968).
- [5] T. M. Flett, “The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities”, J. Math. Anal. Appl., **38**, 746 – 765 (1972).
- [6] Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин, “Об операторах дробного интегрирования в пространствах с весом”, Известия Акад. Наук Арм. ССР, Математика, **19**, no. 1, 31 – 43 (1984) (in Russian).
- [7] К. Аветисян, Е. Тоноян, “Об операторе дробного интегродифференцирования в $\mathbb{R}^n$ ”, Известия НАН Армении, Математика, **50**, no. 5, 3–16 (2015). Translation: K. Avetisyan and Y. Tonoyan, “On the fractional integro-differentiation operator in $\mathbb{R}^n$ ”, J. Contemp. Math. Anal., **50**, no. 5, 236 – 245 (2015).
- [8] К. Аветисян, Н. Гапоян, “Операторы типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой в шаре из $\mathbb{C}^n$ ”, Известия НАН Армении, Математика, **51**, no. 5, 3 – 12 (2016).

- Translation: K. Avetisyan and N. Gapoyan, “Bergman type operators on mixed norm spaces over the ball in $\mathbb{C}^n$ ”, J. Contemp. Math. Anal., **51**, no. 5, 215 – 221 (2016).
- [9] K. L. Avetisyan and A. I. Petrosyan, “Normal weighted Bergman type operators on mixed norm spaces over the ball in $\mathbb{C}^n$ ”, J. Korean Math. Soc., **55**, no. 2, 313 – 326 (2018).
 - [10] K. Avetisyan, “Weighted integrals and Bloch spaces of n -harmonic functions on the polydisc”, Potential Analysis, **29**, 49 – 63 (2008).
 - [11] B. R. Choe, H. Koo and K. Nam, Optimal norm estimate of operators related to the harmonic Bergman projection on the ball, Tohoku Math. J., **62**, 357 – 374 (2010).
 - [12] S. Gergün, H. T. Kaptanoğlu and A. E. Üreyen, Harmonic Besov Spaces on the Ball, Int. J. Math., **27**, no. 9, 1650070, 59 p (2016).
 - [13] B. Lin, C. Liu and J. Wang, “A sharp version of the Forelli–Rudin type estimates on the unit real ball”, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **41**, 243 – 252 (2016).

Поступила 20 апреля 2020

После доработки 14 сентября 2020

Принята к публикации 25 октября 2020