

УДК: 52.530.145:531.51

О КВАНТОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОРБИТ В СИЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ КОМПАКТНЫХ ОБЪЕКТОВ

А. Б. ГАИНА

Поступила 24 февраля 1987

Принята к печати 4 сентября 1987

Дано квантовомеханическое описание связанных орбит пробных частиц с ненулевой массой покоя, близких к центру сильного гравитационного поля Шварцшильда. Рассчитан энергетический спектр и затухание соответствующих квазиуровней на основе обобщенного релятивистского уравнения Клейна—Гордона. Сравнение минимального времени затухания с орбитальным периодом показывает, что ближайшая к центру круговая орбита, устойчивая в смысле классической механики, устойчива и в смысле квантовой механики для массивных компактных объектов звездного происхождения и всех известных элементарных частиц, ядер и атомов. Для мини-черных дыр с массами $M <$

$< 10^{5-6} \frac{M_{PL}^2}{m}$, где m — масса пробного тела, эта орбита оказывается неустойчивой

к туннельному распаду.

1. Анализ классического движения в центральном гравитационном поле Шварцшильда показывает, что устойчивые круговые орбиты для пробных частиц с ненулевой массой покоя возможны лишь для значений параметров движения, больших некоторых критических (см., например, [1]):

$$L \geq L_{mB} = 2\sqrt{3} \frac{G\mu M}{c}, \quad E \geq E_{mB} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \mu c^2, \quad r \geq r_{mB} = \frac{6GM}{c^2} \quad (1)$$

(μ , E , L — масса, энергия и орбитальный момент количества движения частицы, M — масса центра). Случай выполнения равенства в (1) соответствует ближайшей к центру устойчивой круговой орбите, когда эффективный потенциал радиального движения частицы обладает точкой перегиба при $r = r_{mB}$ (см. ниже). Квантовомеханический анализ этого вопроса значительно сложнее и до сих пор не проводился. В работах [2, 3] было показано, что для микроскопического центрального тела ($R_G = 2GM/c^2 \ll \ll \lambda_c = h/\mu c$) и больших орбитальных квантовых чисел ($l \gg 1$) частица, описываемая уравнением Клейна—Гордона, имеет квазисвязанные уровни

с водородоподобным спектром и с малым затуханием через барьер на центр, сильно убывающим с ростом l . Впоследствии оказалось [4], что в указанной существенно квантовой области параметров задачи имеется также и квазисвязанное s -состояние ($l = 0$) с малым затуханием, что само по себе не имеет классического аналога — устойчивой круговой или эллиптической орбиты, а квазиуровни могут существовать в значительно более широкой области:

$$R_G/2\lambda_c = G\mu M/hc \ll \left(l + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\pi \quad (2)$$

при произвольном $l \geq 0$. В этом случае (см. также [5]):

$$\frac{E_{nl}}{\mu c^2} = 1 - \frac{\pi^2 R_G^2}{2n^2 \lambda_c^2} - \frac{1}{2} i\gamma_{nl}, \quad n = 1 + l + n_r = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

причем по порядку величины $\gamma_{nl} \sim (R_G/\lambda_c)^{4l+5}$.

Однако очевидно, что если орбитальный момент l , энергия частицы E_{nl} и область ее локализации близки к соответствующим параметрам ближайшей к центру макроскопического тела устойчивой круговой орбиты, спектр квазисвязанных уровней существенно отличается от водородоподобного, а методы, использованные в [2—4], становятся неадекватными. В настоящей работе проводится квантовомеханическое исследование устойчивости орбит, близких к центру Шварцшильда, на основе квазиклассического приближения уравнения Клейна—Гордона. Область применимости этого приближения определяется требованиями:

$$R_G \gg \lambda_c, \quad L \equiv l + \frac{1}{2} \gg 1, \quad (4)$$

а основные результаты, по-видимому, применимы и для более сложных объектов, нежели элементарные частицы (ядра, атомы и т. д. См. заключение).

2. Запишем уравнение Клейна—Гордона в геометрии Шварцшильда, которые имеют вид:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right) + \mu^2 \Phi = 0, \quad (5)$$

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(e^\nu, e^\lambda, r^2, r^2 \sin^2 \theta); \quad e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - 2M/r. \quad (6)$$

(Здесь и далее, с целью сокращения записи формул используем систему единиц $c = \hbar = G = 1$).

Проводим стандартным образом разделение переменных и получаем волновую функцию частицы с энергией ω , орбитальным моментом l и проекцией момента (m) на ось z ($\theta = 0$):

$$\Phi_{\omega, l, m} = \frac{1}{r} R_{\omega, l}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (7)$$

где Y_l^m — сферические гармоники. Радиальная часть удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 R}{dr^{*2}} + \mathcal{W}_l(r^*) R = 0, \quad \text{где} \quad \frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (8)$$

причем квадрат эффективного радиального импульса имеет вид:

$$\mathcal{W}_l(r) = \omega^2 - U^2 = \omega^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\mu^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right). \quad (9)$$

Если

$$\begin{aligned} & (\mu M)^2 > (\mu M_c)_{(l)}^2 = \\ & = \frac{1}{8} \left\{ \sqrt{\frac{(K^2 - 1)^2 (K^2 + 1)^4}{16} + \frac{K^2 [(K^2 + 1)^2 - 4K^2/9]}{3}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{(K^2 - 1)(K^2 + 1)}{4} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $K = \sqrt{l(l+1)}$ — квантованный момент частицы, функция U^2 всюду растет при $r \rightarrow \infty$. При $\mu M < (\mu M_c)_{(l)}$ она обладает максимумом и минимумом ($r_{\max} \leq r_{\min}$), а в случае равенства имеется точка перегиба. В области применимости квазиклассического приближения будем заменять $K = \sqrt{l(l+1)} \rightarrow L = l + 1/2$, а функция U^2 переходит в квадрат классической эффективной потенциальной энергии [1], если $r > 2M$:

$$U^2 \Rightarrow U_{cl}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\mu^2 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (11)$$

Условие (10) приводит к численным значениям: $(\mu M_c)_{(0)} = 0.25$; $(\mu M_c)_{(1)} = 0.46$, $(\mu M_c)_{(2)} = 0.74$, и т. д. $(\mu M_c)_{(l)} = \sqrt{3} L/6$ при $l \gg 1$. В последнем случае положения максимума и минимума (11) определяются формулой:

$$\frac{r_{1,2}}{2M} = \frac{3L^2}{L_{\text{мв}}^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{L_{\text{мв}}^2}{L^2}}\right), \quad (12)$$

причем верхний знак относится к координате минимума потенциала:

$$r_1(\min) > r_2(\max).$$

Если

$$0 < \Delta L \equiv L - L_{mB} \ll L_{mB}, \quad 0 < \Delta \omega \equiv \omega - E_{mB} \ll E_{mB}, \quad (13)$$

то можно аппроксимировать квадрат импульса в окрестности минимума полиномом III степени.

$$P_L^2(\xi) = \omega^2 - 8\mu^2/9 - a_2\xi^2 - a_3\xi^3, \quad (14)$$

где

$$a_2 = - \frac{1}{2} \frac{d^2 P^2}{dr^{*2}} \Big|_{r^* = r_{\min}} = - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r_1} \right)^{-2} \frac{d^2 P^2}{dr^2} \Big|_{r=r_{\min}} = \\ = \frac{\mu^2}{48 M^2} \sqrt{\frac{2\Delta L}{L_{mB}}}, \quad (15)$$

$$a_3 = \frac{1}{6} \frac{d^3 P^2}{dr^{*3}} \Big|_{r^* = r_{\min}} = \frac{\mu^3}{6 \cdot 96 \cdot M^3}, \quad (16)$$

$$\xi = r^* - r_1^*. \quad (17)$$

Для нахождения спектра и затухания глубоких квазиуровней в поле с кубическим потенциалом можно использовать известную методику (см., например, [6] и рис. 1). В окрестности минимума ограничиваемся квадратичным членом и записываем волновую функцию осцилляторного типа:

$$R_I(\xi) = C_I \left(\frac{\mu\omega_0}{\pi} \right)^{1/4} \frac{\exp(-\mu\omega_0\xi^2/2)}{\sqrt{2^N \cdot N!}} H_N(\xi\sqrt{\mu\omega_0}), \quad (18)$$

причем

$$\omega^2 - \frac{8\mu^2}{9} \Rightarrow 2\mu E = 2\mu\omega_0 \left(N + \frac{1}{2} \right), \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

а классическая частота осциллятора равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_2}{\mu^2}} = \frac{1}{4\sqrt{3}M} \left(\frac{2\Delta L}{L_{mB}} \right)^{1/4}. \quad (20)$$

Отсюда энергия нижних квазиуровней, соответствующих ближайшим к центру классическим орбитам, равна:

$$\begin{aligned} \omega_{L, N} &= E_{mB} \left[1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{\omega_0}{\mu} \left(N + \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \mu \left[1 + \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{N + 1/2}{L_{mB}} \sqrt[4]{\frac{2\Delta L}{L_{mB}}} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

В областях II и III (рис. 1) решение будем записывать в квазиклассическом приближении:

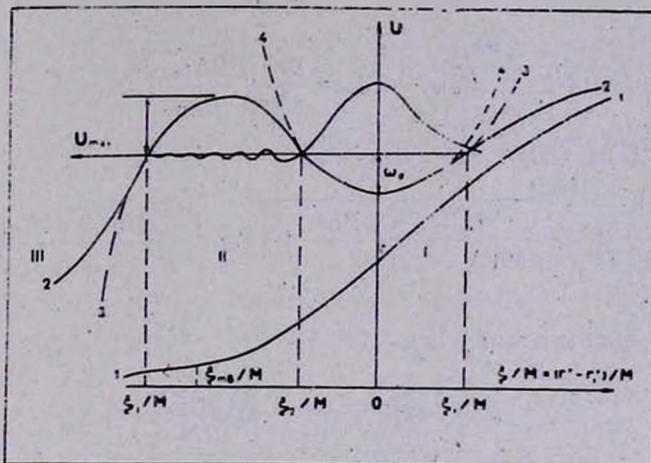


Рис. 1. Зависимость эффективного потенциала (11) от радиальной координаты и профиль волновой функции частицы, локализованной вблизи «ближайшей к центру устойчивой круговой орбиты». Кривая 1 — профиль потенциала для частицы со значением орбитального момента, равным критическому: $l = l_{mB} = \frac{2\sqrt{3} \mu M}{M_{PL}^2}$. Кривая 2 — то же при $l = l_{mB} + 2\pi\hbar^{-1} \cdot \Delta L$ ($\Delta L \ll \frac{\hbar}{2\pi} \cdot l_{mB}$). Кривая 3 (штрих-пунктирная) — аппроксимация потенциала кубическим трехчленом (14). Кривая 4 (штриховая) — осцилляторный потенциал с центром в минимуме эффективного потенциала.

Кривая 1 — профиль потенциала для частицы со значением орбитального момента, равным критическому: $l = l_{mB} = \frac{2\sqrt{3} \mu M}{M_{PL}^2}$. Кривая 2 — то же при $l = l_{mB} + 2\pi\hbar^{-1} \cdot \Delta L$ ($\Delta L \ll \frac{\hbar}{2\pi} \cdot l_{mB}$). Кривая 3 (штрих-пунктирная) — аппроксимация потенциала кубическим трехчленом (14). Кривая 4 (штриховая) — осцилляторный потенциал с центром в минимуме эффективного потенциала.

$$R_{II}(\xi) = C_{II} | -P(\xi) |^{-1/2} \exp \left\{ - \int_0^\xi | -P_L(\xi) | d\xi \right\}, \quad (22)$$

$$R_{III}(\xi) = C_{III} | P(\xi) |^{-1/2} \exp \left\{ i \int_0^\xi P_L(\xi) d\xi \right\}, \quad (22a)$$

проводя дальше шивание с решением R_I . Так как вероятность нахождения частицы в области I пропорциональна $|C_I|^2$, а поток вероятности в

области III пропорционален $|C_{III}|^2$, то нетрудно найти закон распада состояния

$$\omega = \omega_0 \exp(-\gamma t), \quad (23)$$

где

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2^{N+1} N!} \sqrt{\frac{216 \cdot U_{\max}^2}{\pi \mu \omega_0 (N+1/2)}} \exp\left[-\frac{18}{5} \frac{U_{\max}^2}{\mu \omega_0 (N+1/2)}\right], \quad (24)$$

где

$$U_{\max}^2 = P_{\min}^2 - P_{\max}^2 = \frac{4\mu^3}{9} \left(\frac{2\Delta L}{L_{mB}}\right)^{3/2}. \quad (25)$$

Подставляя (25) и (20) в (24), получим:

$$\gamma_{L, N} = \frac{\mu}{2^N \cdot N!} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi \mu M (N+1/2)} \left(\frac{2\Delta L}{L_{mB}}\right)^{7/4}} \exp\left\{-\frac{16\sqrt{3} \mu M (2\Delta L)^{5/4}}{5 \left(\frac{2\Delta L}{L_{mB}}\right)^{5/4}}\right\} \quad (26)$$

или, с учетом приближения (13),

$$\gamma_{L, N} \approx \frac{\mu (\Delta L)^{7/8} \exp\left\{-\frac{5.58 \cdot (\Delta L)^{5/4}}{(\mu M)^{1/4} (2N+1)}\right\}}{2^N \cdot N! \sqrt{2N+1} (\mu M)^{11/8}}. \quad (27)$$

Как видно, затухание уровней сильно убывает с ростом (ΔL) . Как функция M (при фиксированных ΔL и N) затухание имеет максимум при $\mu M_0 \approx \frac{(\Delta L)^5}{(2N+1)^4}$. Например, при $\mu M_0 = 1$ критическое значение орбитального числа $l_{mB} = 3$ ($L_c = 3.5$) имеется один квазисвязанный уровень с $l = 4$ ($N = 0$) с затуханием $\gamma_{4,0} = 3.8 \cdot 10^{-3} \mu$. При этом энергия квазиуровня, в соответствии с (21), составляет: $\omega_{4,0} = 0.9845 \mu$, а центр локализации частицы: $r_1 \approx 6.3 R_G$.

3. Рассмотрим предел применимости метода и полученных результатов. Необходимое условие существования хотя бы одного осцилляторного уровня состоит в том, чтобы $U_{\max}^2 > \mu \omega_0$. Принимая во внимание ограничение (13), получаем:

$$0.7 (\mu M)^{1.5} < \Delta L \ll 2\sqrt{3} \mu M. \quad (28)$$

Таким образом, рассмотренный выше численный пример лежит на пределе применимости используемого приближения и может рассматриваться

лишь в качестве иллюстрации. Если (28) выполняется слева с большим запасом, то, тем не менее, осцилляторное приближение справедливо лишь для низших радиальных квантовых чисел ($N \ll L_{mB}$). Формула (27) позволяет оценить наименьшее время жизни частицы на самой внутренней круговой орбите, обусловленное ее туннельным переходом к центру. Так как для основного радиального уровня:

$$\Delta\omega_{L,0} = \omega_{L,0} - E_{mB} = \frac{\mu}{4L_{mB}} \left(\frac{2\Delta L}{L_{mB}} \right)^{1/4}, \quad (29)$$

$$\gamma_{L,0} \approx \frac{\mu (\Delta L)^{7/8}}{(\mu M)^{11/8}} \exp \left[- \frac{5.58 (\Delta L)^{5/4}}{(\mu M)^{1/4}} \right], \quad (30)$$

то время жизни частицы на «ближайшей» к центру устойчивой орбите составляет:

$$\tau_{\min} \sim 10 \mu^{-1} (\mu M)^{6/5}. \quad (31)$$

Сравнивая это время с орбитальным периодом частицы $T_0 = 2\pi c^{3/2} M$ (см., например, [7], стр. 362), находим

$$\frac{\tau_{\min}}{T_0} \sim 0.11 (\mu M)^{1/5} \sim \left(\frac{R_G}{10^6 \cdot \lambda_c} \right)^{1/5} \sim \left(\frac{G\mu M}{10^6 hc} \right)^{1/5}. \quad (32)$$

Например, для черной дыры звездного происхождения с массой $M = 5 \cdot M_{\odot} = 10^{34}$ г период обращения электрона составляет $2.3 \cdot 10^{-3}$ с, тогда как время затухания соответствующего квантового состояния порядка 1 с, т. е. электрон может совершить $\sim 10^3$ оборотов, прежде чем протуннелировать на центр. В этом случае, очевидно, можно утверждать, что квантовое туннелирование мало и ближайшая к центру круговая орбита, устойчивая в смысле классической механики, является устойчивой и в смысле квантовой механики. Это справедливо для всех известных элементарных частиц с ненулевой массой покоя, а также ядер и атомов, если учесть, что приливное гравитационное взаимодействие на этой орбите значительно уступает внутренним силам — ядерной и, соответственно, электрической (см. [7], стр. 390). Время излучения одного фотона, характерное для радиационных процессов, на этой орбите порядка периода обращения и тоже значительно меньше времени туннельного распада.

Формулы (30) и (31) могут служить также для количественной оценки влияния гравитации на поведение нейтральных частиц (нейтронов) вблизи поверхности нейтронных звезд, для которых $R \approx 3R_G$. В этом случае, как известно, гравитация может давать эффекты, сравнимые с эффектами сильного магнитного поля.

Что касается малых черных дыр ($\mu M \lesssim 10^{5+6} M_{PL}^2$), отметим, что для них «ближайшая к центру устойчивая круговая орбита» оказывается неустойчивой к квантовому распаду. В этом случае, как следует из (32), время затухания меньше орбитального периода.

Автор благодарит участников Всесоюзного семинара «Современные проблемы гравитации» и К. К. Лихарева за обсуждение некоторых технических аспектов работы.

Кишиневский политехнический
институт

ON QUANTUM STABILITY OF ORBITS IN A STRONG GRAVITATIONAL FIELD OF COMPACT OBJECTS

A. B. GAINA

A quantum-mechanical description for massive test particle bound orbits, close to the center of strong Schwarzschild gravitational field, is given. Energetical spectrum and time decay of respective quasilevels are computed by means of Klein-Gordon equation. A comparison of minimal time decay with orbit period shows that the marginally orbit, stable in the sense of classical mechanics, is also stable in the sense of quantum mechanics for massive compact objects of stellar origin and for all known elementary particles, nuclei and atoms. For mini-black holes of masses $M < 10^{5+6} \frac{M_{PL}^2}{m}$, where m — is test body mass this orbit is unstable.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Наука, М., 399, 1973.
2. И. М. Тернов, В. Р. Халилов, Г. А. Чижов, А. Б. Гаина, Изв. вузов, Физика, 21, № 9, 109, 1978.
3. S. Detweiler, Phys. Rev. D: Part. and Fields, 22, 2323, 1980.
4. А. Б. Гаина, Г. А. Чижов, Изв. вузов, Физика, 23, № 4, 120, 1980.
5. А. Б. Гаина, Ф. Г. Кочорба, Ж. эксперим. и теор. физ., 92, вып. 2, 369, 1987.
6. К. К. Лихарев, Введение в динамику джозефсоновских переходов, Наука, М., 56, 1985.
7. С. А. Шапиро, С. А. Тьюколски, Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды, Наука, М., 2, 1985.