

УДК: 52:53:517.5

НОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ ФЕРМИ-ГАЗА

С. И. БЛИННИКОВ, М. А. РУДЗСКИЙ

Поступила 30 июня 1987

Принята к печати 15 января 1988

Получены представления уравнения состояния равновесного идеального газа фермионов в виде интегралов и рядов, легко оцениваемых при релятивистских плотностях или температурах. Приведены численные оценки точности этих представлений.

1. *Введение.* При расчетах свойств экстремально плотного или горячего вещества часто возникает необходимость точного вычисления термодинамических функций идеального ферми-газа. Например, в теории эволюции звезд требуется учет электрон-позитронного газа, а в расчетах коллапса звезд и в космологии, кроме того, — учет нейтринного газа и т. п. При этом нужны как высокая точность (для получения таких величин, как теплоемкость) при произвольной степени вырождения, так и эффективность вычисления.

В настоящей работе получены новые представления термодинамических функций ферми-газа, находящегося в равновесии с тепловым излучением. Эти представления применимы (и применяются нами) как в холодном веществе при сильном вырождении, так и в горячем, невырожденном веществе малой плотности, например, при расчетах коллапса, эволюции и взрывов белых карликов, нейтронных и сверхмассивных звезд и т. д. — всюду, где важно давление релятивистских электронов или других фермионов. Наши формулы расширяют релятивистскую асимптотику Надёжина [1]. Они представлены в виде, удобном как для точного численного счета, так и для приближенных аналитических оценок.

Для определенности будем говорить об электрон-позитронном газе. Все функции состояния выражаются через большой термодинамический потенциал $\Omega(\mu, T) = -PV$, где μ — химический потенциал, T — температура, P — давление, V — объем. Поэтому достаточно вычислить давление P в функции μ и T . Будем работать в системе единиц, где $\hbar = c = k_B = 1$ (k_B — постоянная Больцмана), и вместо T и μ введем безразмерные величины

$$\beta = m/T \quad (1)$$

(m — масса электрона) и

$$\varphi = \mu/T. \quad (2)$$

Тогда для давления идеального газа электронов имеем хорошо известное выражение [1—3]:

$$P_- = \frac{m^4}{3\pi^2} \beta^{-4} \text{FDI}(\varphi, \beta), \quad (3)$$

где обозначено

$$\text{FDI}(\varphi, \beta) = \int_0^\infty \frac{(x^2 + \beta^2)^{-1/2} x^4 dx}{\exp[(x^2 + \beta^2)^{1/2} - \varphi] + 1}. \quad (4)$$

Напомним, что в системе, где $\hbar = c = 1$, m^4 задает характерный масштаб давления, что в системе СГС соответствует $mc^2/(\hbar/mc)^3 = 1.422 \cdot 10^{25}$ эрг/см³.

2. Вывод интегрального представления для давления. В работах [2, 3] получено представление выражений типа (4) в виде контурных интегралов. Отметим, что первым такие представления для ферми-дираковских интегралов получил, по-видимому, Румер [4]. Для связности изложения приведем краткий вывод этого представления для FDI. Имеем

$$\text{FDI} = \int_0^\infty \frac{(x^2 + \beta^2)^{-1/2} x^4 dx}{1 + s \exp(x^2 + \beta^2)^{1/2}}, \quad (5)$$

где $s = \exp(-\varphi)$. Рассматривая FDI как функцию от s , произведем преобразование Меллина:

$$\begin{aligned} M(t, \beta) &= \int_0^\infty ds s^{t-1} \int_0^\infty \frac{(x^2 + \beta^2)^{-1/2} x^4 dx}{1 + s \exp(x^2 + \beta^2)^{1/2}} = \\ &= \int_0^\infty dx x^4 (x^2 + \beta^2)^{-1/2} \exp[-t(x^2 + \beta^2)^{1/2}] \int_0^\infty \frac{\sigma^{t-1} d\sigma}{1 + \sigma}. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя соотношение

$$\int_0^\infty \frac{\sigma^{t-1} d\sigma}{1 + \sigma} = \Gamma(t) \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}, \quad (7)$$

где $\Gamma(t)$ — гамма-функция, и производя подстановку $x = \beta \operatorname{sh} \theta$, получаем:

$$M(t, \beta) = \frac{\pi}{\sin \pi t} \beta^t \int_0^\infty \exp(-\beta t \operatorname{ch} \theta) \operatorname{sh}^t \theta d\theta. \quad (8)$$

С помощью интегрального представления для функции Макдональда $K_\nu(\beta)$ [5]

$$K_\nu(\beta) = \frac{\pi^{1/2} (\beta/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{ch} \theta) \operatorname{sh}^{2\nu} \theta d\theta. \quad (9)$$

Из (8) получаем

$$M(t, \beta) = \frac{3\pi\beta^2}{\sin \pi t} \frac{K_2(\beta t)}{t^2} \quad (10)$$

Теперь, применяя к $M(t, \beta)$ обратное преобразование Меллина, получаем искомое выражение FDI в виде контурного интеграла

$$\text{FDI} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} M(t, \beta) s^{-t} dt = \frac{3\beta^2}{2i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\exp(\varphi t) K_2(\beta t) dt}{t^2 \sin \pi t}. \quad (11)$$

Здесь $0 < C < 1$, так что прямая $\operatorname{Re}(t) = C$ разделяет полюсы функций $\Gamma(t)$ и $\Gamma(1-t)$ в комплексной t -плоскости (рис. 1).

Для взятия интегралов типа (11) авторы [2, 3] деформируют контур интегрирования так, чтобы воспользоваться вычетами, порождаемыми $\sin \pi t$. При этом в вырожденной и невырожденной областях получаются разные, несовместимые разложения, расходящиеся на границе $\varphi = \beta$, так как контур приходится деформировать по-разному при $\varphi > \beta$ и $\varphi < \beta$. Здесь мы применим другой подход, позволяющий получить единое представление, независимо от степени вырождения.

В работе [1] Надёжин отметил, что выражение для суммарного давления электрон-позитронного газа выглядит проще, чем отдельные выражения для P_- и для давления позитронов P_+ , если рассматривать важный случай равновесия электрон-позитронной плазмы с чернотельным излучением.

Добавим к P_- вклад позитронов P_+ , химический потенциал которых равен $-\mu$, тогда

$$P = P_- + P_+ = m^4 (3\pi^2 \beta^4)^{-1} \text{FD}(\varphi, \beta), \quad (12)$$

где

$$FD(\varphi, \beta) = FDI(\varphi, \beta) + FDI(-\varphi, \beta). \quad (13)$$

С учетом (11) для FD получаем интегральное представление

$$FD(\varphi, \beta) = -3\beta^2 i \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\operatorname{ch}(\varphi t) K_2(\beta t) dt}{t^2 \sin \pi t}. \quad (14)$$

Интегрирование в (14) будем проводить по контуру, изображенному на рис. 2, т. е. вдоль мнимой оси с обходом нуля по полуокружности радиуса C .

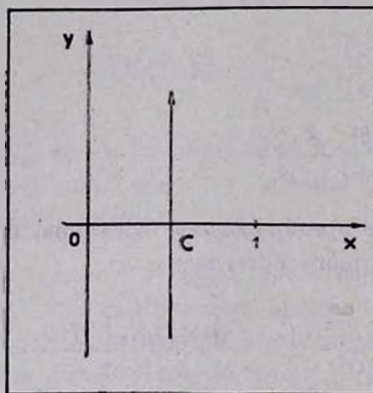


Рис. 1. Контур интегрирования в выражении (11).

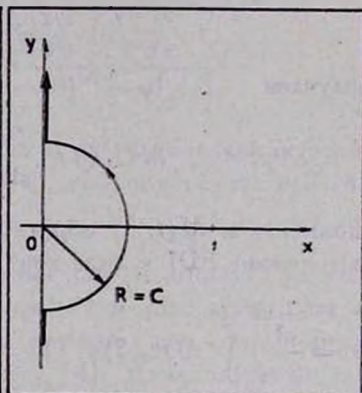


Рис. 2. Контур интегрирования в выражении (14).

Представим FD в виде суммы

$$FD = A_C + A_y, \quad (15)$$

где

$$A_C = -3\beta^2 i \int_C \frac{\operatorname{ch} \varphi t K_2(\beta t) dt}{t^2 \sin \pi t}, \quad (16)$$

т. е. в A_C интегрирование проводится по полуокружности, а в A_y оно ведется от $-i\infty$ до $-iC$ и от iC до $i\infty$. Используем представление [5]

$$K_2(x) = -I_2(x) \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^{-2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+2} \frac{\psi(m+3) + \psi(m+1)}{m! (m+2)!}, \quad (17)$$

где $I_2(x)$ — модифицированная функция Бесселя, а $\psi(m)$ — дигамма-функция, и сделаем замену $t = i\tau$, тогда

$$K_2(\beta t) = K_2(i\beta\tau) = J_2(\beta\tau) \left(\ln |\beta\tau/2| + \dots + \frac{i\pi}{2} \operatorname{sign} \tau \right). \quad (18)$$

Здесь $J_2(\beta\tau)$ — функция Бесселя первого рода, а многоточием обозначена четная функция от τ . В результате получаем

$$A_g = -3\pi\beta^2 \int_C^{\infty} \frac{\cos(\varphi\tau) J_2(\beta\tau) d\tau}{\tau^2 \operatorname{sh} \pi\tau}. \quad (19)$$

Теперь устремляем $C \rightarrow 0$. Возникающие в A_C и A_g сингулярности компенсируют друг друга (детали расчета A_C и A_g приводятся в Приложении).

Окончательно

$$\begin{aligned} \text{FD}(\varphi, \beta) = & \frac{3}{8} \beta^4 \left(\ln \frac{4\pi}{\beta} + \frac{3}{4} \right) - \frac{\beta^2}{4} (3\varphi^2 + \pi^2) + \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{7}{15} \pi^4 + 2\pi^2 \varphi^2 + \varphi^4 \right) + \frac{\beta^4}{2\pi} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{3/2} \psi_F(\beta x + \varphi). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь введено обозначение

$$\psi_F(x) = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{ix}{2\pi}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{ix}{2\pi}\right), \quad (21)$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ — дигамма функция [5], причем $\psi_F(x)$ — четная действительная функция действительного аргумента (рис. 3).

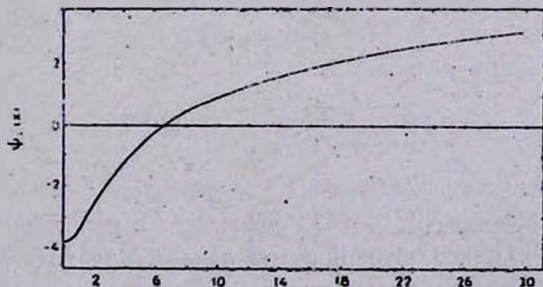


Рис. 3. График функции $\psi_F(x)$, определенной формулой (21). При $x < 0$ график получается отражением относительно оси ординат, так как $\psi_F(-x) = \psi_F(x)$.

Итак,

$$P = \frac{m^4}{12\pi^2} \left[\beta^{-4} \left(\frac{7\pi^2}{15} + 2\pi^2\varphi^2 + \varphi^4 \right) - \beta^{-2} (\pi^2 + 3\varphi^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \left(\ln \frac{4\pi}{\beta} + \frac{3}{4} \right) + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{3/2} \psi_F(\varphi + \beta x) \right]. \quad (22)$$

Выражение (22) является точным (для идеального ферми-газа) и справедливо для любых значений β и φ , а значит и любых температур и плотностей.

Используя общие соотношения, связывающие термодинамические величины с большим потенциалом Ω , получаем из (22) выражение для плотности избытка заряда

$$n_- - n_+ = \frac{\beta}{m} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{m^3}{\pi^2} \left[\frac{1}{3} \beta^{-3} (\varphi^3 + \pi^2 \varphi) - \frac{1}{2} \beta^{-1} \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 dx x (1-x^2)^{1/2} \psi_F(\varphi + \beta x) \right]. \quad (23)$$

Энергия единицы объема есть

$$E = -\beta \frac{\partial P}{\partial \beta} - P = \frac{m^4}{4\pi^2} \left[\beta^{-4} \left(\frac{7\pi^4}{15} + 2\pi^2\varphi^2 + \varphi^4 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \beta^{-2} (\pi^2 + 3\varphi^2) - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4\pi}{\beta} - \frac{1}{4} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{1/2} x^2 \psi_F(\varphi + \beta x) \right]. \quad (24)$$

Энтропия единицы объема есть

$$S = [P + E - (n_- - n_+) \mu] / T. \quad (25)$$

3. *Представление термодинамических функций в виде рядов.* Первые два члена в выражениях (22)–(25) совпадают с релятивистской асимптотикой Надёжина [1], полученной путем разложения интегралов типа (4) по фермиевским функциям целых индексов. В [1] показано, что такой подход не дает возможности получения дальнейших членов асимптотики, так как приводит к расходящимся интегралам. Тем не менее уже эти первые члены достаточны на практике при высоких температурах или плотностях.

Это означает, что в области релятивистских фермионов следующие члены в наших выражениях (22)—(25) являются малой добавкой к первым членам и их можно вычислять с невысокой точностью. Кроме того, из (22)—(25) можно получить и полное разложение по степеням обратной температуры β .

Используем разложение в ряд Тейлора

$$\psi_F(\varphi + \beta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_F^{(n)}(\varphi) \frac{\beta^n x^n}{n!}. \quad (26)$$

Подставляем (26) в выражение (22) для P и интегрируем по x , в результате получаем

$$P = \frac{m^4}{12\pi^2} \left[\beta^{-4} \left(\frac{7\pi^4}{15} + 2\pi^2\varphi^2 + \varphi^4 \right) - \beta^{-2} (\pi^2 + 3\varphi^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \left(\ln \frac{4\pi}{\beta} + \frac{3}{4} \right) + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{2k}}{2^{2k} k! (k+2)!} \psi_F^{(2k)}(\varphi) \right], \quad (27)$$

где

$$\psi_F^{(2k)}(\varphi) = \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}} \left[\psi^{(2k)} \left(\frac{1}{2} + \frac{i\varphi}{2\pi} \right) + \psi^{(2k)} \left(\frac{1}{2} - \frac{i\varphi}{2\pi} \right) \right]. \quad (28)$$

Здесь $\psi^{(2k)}(\varphi)$ — полигамма-функция [5].

Выражение (27) дает высокотемпературное разложение для P , так как $\beta = m/T$. Отметим, что оно сходится и при $T \rightarrow 0$, то есть при $\beta \rightarrow \infty$, если $\varphi/\beta = \mu/m > 1$ и фиксировано, и точно дает известный ответ для холодного ферми-газа (при любой степени релятивизма). Подчеркнем, что в отличие от известного асимптотического разложения Чандрасекара [7] (см. также [1—3]), которое при фиксированных плотности и температуре расходится, ряд (27) сходится в широком диапазоне параметров.

Из (27) получаем разложение и других величин, аналогично (23)—(25).

$$n_- - n_+ = \frac{m^3}{\pi^2} \left[\frac{\beta^{-3}}{3} (\varphi^3 + \pi^2\varphi) - \frac{\beta^{-1}}{2} \varphi + \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{2k+1}}{2^{2k} k! (k+2)!} \psi_F^{(2k+1)}(\varphi) \right], \quad (29)$$

$$E = \frac{m^4}{4\pi^2} \left[\beta^{-4} \left(\frac{7}{15} \pi^4 + 2\pi^2\varphi^2 + \varphi^4 \right) - \frac{\beta^{-2}}{3} (\pi^2 + 3\varphi^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4\pi}{\beta} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{2k} (2k+1)}{2^{2k} k! (k+2)!} \psi_F^{(2k)}(\varphi) \right]. \quad (30)$$

Поскольку

$$\psi_F^{(n)}(\varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} \psi_F^{(n+p)}(0) \frac{\varphi^p}{p!}, \quad (31)$$

причем $\psi_F^{(n+p)}(0)$ не равно нулю только при четном $n+p=2l$:

$$\psi_F^{(2l)}(0) = \frac{2(-1)^l \psi^{(2l)}(1/2)}{(2\pi)^{2l}} = \frac{(-1)^{l+1}}{\pi^{2l}} (2l+1)! \frac{2^{2l+1}-1}{2^{2l-1}} \zeta(2l+1), \quad (32)$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана. Таким образом, разложения (27), (29), (30) дают нам полную аналитическую структуру термодинамических функций по степеням β и φ . Из этих рядов видно, что при малых φ они сходятся при $\beta < \pi$, то есть при $T > m/\pi$. При сходимости учет нескольких членов рядов (27), (29), (30) существенно расширяет область применимости асимптотики Надёжина. Но практический смысл этих разложений не только в этом. Главное, что их можно использовать для построения эффективных аппроксимаций. В частности, из них можно получить паде-разложение по φ и β (см., например, [8]).

4. Численные результаты. Выражения (22)–(25) для термодинамических функций можно применять, когда известны температура T и химический потенциал μ .

В реальных расчетах обычно μ неизвестно и его надо находить по плотности ρ из условия электронейтральности

$$\rho Y_e N_A = n_- - n_+, \quad (33)$$

где Y_e — средний заряд на нуклон, N_A — число Авогадро.

Для оценки границ применимости наших выражений при различной точности вычисления интегралов, мы использовали квадратурные формулы Чебышева.

Для гладкой функции $f(x)$ имеем [5, гл. 25]:

$$\int_{-1}^1 f(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) + R_n, \quad (34)$$

где $R_n = \pi f^{(2n)}(\xi) / [(2n)! 2^{2n-1}]$ для некоторого ξ в интервале $(-1, 1)$. Мы видим, что интегралы в выражениях (22)–(24) идеально подходят для применения квадратуры Чебышева (34): при любом n узлы и веса вычисляются тривиально.

Мы провели расчет давления $P(\rho, T)$ по формуле (22), вычисляя μ из (23) с помощью (33), (34) при $Y_e = 0.5$, $n = 3$ и $n = 10$. Кон

трольные значения P вычислялись по программе Надёжина, реализующей его представление из [1], а также по формуле трапеций для специально преобразованных фермиевских интегралов [3] и по нашим формулам при $n = 60 + 80$. Функция $\psi_F(x)$ из (21) вычислялась с помощью стандартной программы комплексной дигамма-функции CDIGAM из библиотеки Церна. Расчеты проводились на БЭСМ-6 и ЕС-1061 в режиме одинарной точности.

Члены порядка β^{-4} и β^{-2} в (22) и β^{-3} , β^{-1} в (23) дают релятивистскую асимптотику Надёжина и обеспечивают относительную точность P лучше 10^{-3} при $\lg \rho > 9.1$ (если $Y_e = 0.5$ и ρ в г/см³) или $\lg T > 10.5$ (T в К). Наши формулы (22), (23) с квадратурой Чебышева обеспечивают точность 10^{-3} при

$$\begin{aligned}
 \lg \rho > 7.0 \text{ или } \lg T > 9.8 \text{ для } n = 3, \\
 \lg \rho > 5.3 \text{ или } \lg T > 9.0 \text{ для } n = 10.
 \end{aligned} \tag{35}$$

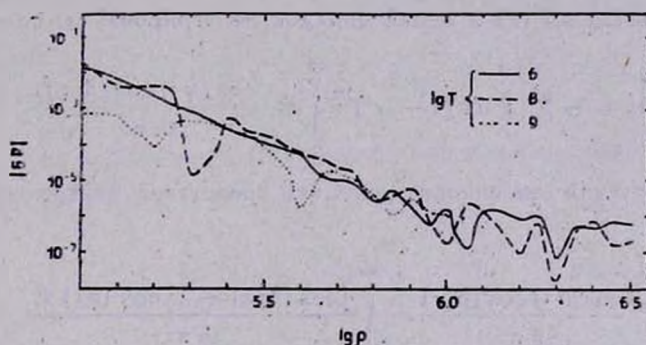


Рис. 4. Зависимость модуля относительной ошибки давления δ_P от плотности ρ при $Y_e = 0.5$ и $n = 10$ в (34). Цифры у кривых показывают значение $\lg T$ (К).

На рис. 4 показано, как меняется относительная ошибка в P при различных ρ и T в случае $n = 10$. Например, при $\lg T = 6$ и $\lg \rho > 6$ ошибка уже меньше 10^{-6} , т. е. резко убывает с ростом релятивизма. В области релятивистского вырождения наш метод, по-видимому, самый подходящий для получения численных результатов произвольной точности, потому что метод Гаусса нелегко приспособить для произвольного числа узлов [1], а метод трапеций [3] не работает при сильном вырождении. При малых ρ и T наши разложения становятся непрактичными, так как внеинтегральные члены уже не отражают поведения термодинамических функций. К счастью, здесь, в нерелятивистской области, известно много удобных и точных представлений этих функций.

Благодарим О. С. Бартунова за помощь, а Д. К. Надёжина за постоянную поддержку.

Интеграл A_C вычисляется из (16) разложением в степенные ряды по t подинтегрального выражения. В результате получается:

$$A_C = -\frac{3\beta^4}{8} \ln C - \frac{3\beta^4}{8} \ln \frac{\beta}{2} + \frac{7}{60} \pi^4 - \frac{\beta^4 \pi^2}{4} + \\ + \frac{3}{8} \left(\frac{3}{4} - 1 \right) \beta^4 + \frac{\pi^2}{2} \varphi^2 - \frac{3}{4} \varphi^2 \beta^2 + \frac{1}{4} \varphi^4, \quad (\text{П1})$$

с явно выделенной логарифмической особенностью при $C \rightarrow 0$. Для вычисления интеграла A_y воспользуемся представлением [5]:

$$J_1(t) = \frac{t^2}{3\pi} \int_{-1}^1 \cos(tx) (1-x^2)^{3/2} dx. \quad (\text{П2})$$

Подставляя (П2) в (19) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$A_y = -\beta^4 \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{3/2} \int_C^\infty d\tau \frac{\cos(\varphi\tau) \cos(\beta\tau x)}{\text{sh } \pi\tau}. \quad (\text{П3})$$

С целью выделения особенности при $C \rightarrow 0$ представим внутренний интеграл так:

$$\int_C^\infty d\tau \frac{\cos(\varphi\tau) \cos(\beta\tau x)}{\text{sh } \pi\tau} = \int_0^\infty \frac{[\cos(\beta\tau x) - 1] \cos(\varphi\tau) d\tau}{\text{sh } \pi\tau} + \\ + \int_0^C \frac{\cos(\varphi\tau) [1 - \cos(\beta\tau x)] d\tau}{\text{sh } \pi\tau} + \int_C^\infty \frac{\cos(\varphi\tau) d\tau}{\text{sh } \pi\tau}. \quad (\text{П4})$$

Преобразуем первый интеграл в правой части (П4):

$$\int_0^\infty \frac{[\cos(\beta\tau x) - 1] \cos(\varphi\tau) d\tau}{\text{sh } \pi\tau} = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\text{sh } \pi\tau} [\cos(\varphi\tau - \beta\tau x) - \cos(\varphi\tau) + \cos(\varphi\tau + \beta\tau x) - \cos(\varphi\tau)] = \\ = \frac{1}{4\pi} \left[2\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{i\varphi}{2\pi}\right) + 2\psi\left(\frac{1}{2} - \frac{i\varphi}{2\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varphi - \beta x}{2\pi}\right) - \right.$$

$$-\psi\left(\frac{1}{2}-i\frac{\varphi-\beta x}{2\pi}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varphi+\beta x}{2\pi}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-i\frac{\varphi+\beta x}{2\pi}\right)\Big]. \quad (\text{П5})$$

Здесь мы воспользовались выражением [6]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{\operatorname{sh} cx} dx = \frac{1}{2c} \left[\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{ib}{2c}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{ia}{2c}\right) + \right. \\ \left. + \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{ib}{2c}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{ia}{2c}\right) \right]. \quad (\text{П6})$$

Второй интеграл в (П4) обращается в нуль при $C \rightarrow 0$, а третий дает:

$$\int_C^{\infty} \frac{\cos \varphi\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau} d\tau = -2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\varphi\tau/2)}{\operatorname{sh} \pi\tau} d\tau - \int_0^C \frac{\cos \varphi\tau - 1}{\operatorname{sh} \pi\tau} d\tau + \int_C^{\infty} \frac{d\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau}. \quad (\text{П7})$$

Имеем [6]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\varphi\tau/2)}{\operatorname{sh} \pi\tau} d\tau = \frac{1}{4\pi} \left[\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{i\varphi}{2\pi}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{i\varphi}{2\pi}\right) - 2\psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \quad (\text{П8})$$

Второй интеграл зануляется в (П7) при $C \rightarrow 0$, а третий имеет особенность, компенсирующую особенность в (П1):

$$\int_C^{\infty} \frac{d\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau} = -\ln C - \ln \frac{\pi}{2}. \quad (\text{П9})$$

Окончательно:

$$\text{FD}(\varphi, \beta) = A_C + A_\varphi = \frac{3}{8} \beta^4 \left(\ln \frac{4\pi}{\beta} + \frac{3}{4} \right) - \frac{\beta^2}{4} (3\varphi^2 + \pi^2) + \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{7}{15} \pi^4 + \varphi^4 + 2\pi^2 \varphi^2 \right) + \\ + \frac{\beta^4}{2\pi} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{3/2} \left[\psi\left(\frac{1}{2} + i\frac{\beta x + \varphi}{2\pi}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{\beta x + \varphi}{2\pi}\right) \right], \quad (\text{П10})$$

что соответствует выражению (20).

Институт теоретической и
экспериментальной физики

НПО космических исследований
АН Азерб.ССР

NEW REPRESENTATIONS FOR THERMODYNAMIC
FUNCTIONS OF A FERMI GAS

S. I. BLINNIKOV, M. A. RUDZSKIY

We express the equation of state of an equilibrium ideal gas of fermions through integrals or series which are easily evaluated for relativistic density or temperature. The accuracy of these representations is numerically determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. К. Надежин, Научные информации, вып. 32, М., ГИМЛ, Астрономического Совета АН СССР, 1974, стр. 3.
2. A. W. Jaess, *Advances in Astronomy and Astrophysics*, 1966, v. 4, p. 159.
3. R. F. Tooper, *Astrophys. J.*, 1969, v. 156, p. 1075.
4. Ю. Б. Румер, Ж. эксперим. и теор. физ., 1948, т. 18, стр. 1081.
5. Справочник по специальным функциям под ред. Абрамовиц М. и Стиган И. М., Наука, 1979.
6. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, М., Наука, 1981.
7. С. Чандрасекар, *Введение в учение о строениях звезд*, М., ИЛ, 1950.
8. Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Поде*, М., Мир, 1986.